

Механика деформируемого твёрдого тела

УДК 539.376

ЧИСТЫЙ ИЗГИБ БАЛКИ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ ИЗ РАЗНОСОПРОТИВЛЯЮЩЕГОСЯ МАТЕРИАЛА

А. М. Локощенко, К. А. Агахи, Л. В. Фомин

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
НИИ механики МГУ,
119992, Россия, Москва, Мичуринский пр-т, 1.

E-mails: loko@imec.msu.ru, kamilla@imec.msu.ru, lef1975@rambler.ru

Решены задачи о чистом изгибе балок прямоугольного и круглого поперечных сечений при установившейся ползучести с учётом различных характеристик материала при растяжении и сжатии. Определяющие соотношения установившейся ползучести приняты в виде дробно-степенных функций. Приводится сравнение решений задач для балок квадратного и круглого сечений с одинаковыми значениями осевых моментов инерции.

Ключевые слова: балки, изгиб, установившаяся ползучесть, разносопротивляемость материала, дробно-степенная модель, квадратное сечение, круглое сечение.

Введение. В настоящее время опубликовано довольно много работ, посвященных изучению чистого изгиба балок в процессе установившейся ползучести. Проведенный обзор некоторых из них [1–13] послужил поводом для дальнейшего исследования этой задачи. Задачи чистого изгиба балок при ползучести для материалов, имеющих одинаковые свойства на растяжение и сжатие, рассмотрены, например, в работах [1, 3–6, 10–13]. В этих работах в качестве определяющих соотношений в основном используются степенные и экспоненциальные функции. В работах [2, 7–9] рассматривается чистый изгиб балок в процессе установившейся и неустановившейся ползучести, в которых учитывается разносопротивляемость материала растяжению и сжатию. При этом для описания ползучести при изгибе авторы используют как степенные [2, 7], так и экспоненциальные [9] определяющие соотношения. Во всех перечисленных работах, за исключением работ [12, 13], используется феноменологический подход к описанию процесса ползучести. В работах [12, 13] предложена методика решения одномерных краевых задач изгиба балки на основе структурной модели среды.

В настоящей статье исследуется чистый изгиб балок с различными формами поперечных сечений в процессе установившейся ползучести. В отличие от рассмотренных работ, для учета разносопротивляемости материала растя-

Александр Михайлович Локощенко (д.ф.-м.н., проф.), зам. директора, НИИ механики МГУ. Камилла Абдул Гусейн кызы Агахи (к.ф.-м.н., доц.), и. о. зав. лаборатории, лаб. прочности и ползучести при высоких температурах НИИ механики МГУ. Леонид Викторович Фомин, ведущий инженер, НИИ механики МГУ.

жению и сжатию принимается сингулярная дробно-степенная модель с различными значениями пределов кратковременной прочности при растяжении и сжатии [14, 15].

Проводится сравнение полученных решений для балок круглого и квадратного поперечного сечений с равными значениями их осевых моментов инерции при действии одинакового изгибающего момента.

1. Чистый изгиб балки прямоугольного поперечного сечения. Рассмотрим чистый изгиб балки в условиях высокотемпературной ползучести. Материал балки при соответствующей температуре имеет разные значения пределов кратковременной прочности при растяжении $\sigma_{b1} > 0$ и сжатии $\sigma_{b2} < 0$ (отношение пределов прочности $\alpha = -\sigma_{b2}/\sigma_{b1}$). Примем, что сечение балки имеет две оси симметрии (Ox и Oy), изгибающий момент M действует в плоскости yOz . Высота сечения балки по оси Oy равна H , ширина b , длина l удовлетворяет неравенствам $l \gg H, l \gg b$.

В этом случае гипотеза плоских сечений имеет вид

$$\dot{p} = \dot{\chi}(y - y_0), \tag{1}$$

где $\dot{p} = \dot{p}_z$ — скорость деформации ползучести; $\dot{\chi}$ — скорость изменения кривизны балки; y — координата, отсчитываемая от срединной линии балки ($-0,5H \leq y \leq 0,5H$); y_0 — координата нейтральной поверхности, на которой отсутствуют напряжения ($\sigma(y_0) = \sigma_z(y_0) = 0$). Смещение нейтральной поверхности от оси симметрии ($y = 0$) балки при ползучести в рассматриваемой задаче происходит вследствие разносопротивляемости материала растяжению и сжатию.

Определяющие соотношения ползучести в одноосном случае примем в виде, предложенном С. А. Шестериковым и М. А. Юмашевой [14, 15], в котором зависимость \dot{p} от напряжения σ имеет дробно-степенной вид:

$$\dot{p} = A \left(\frac{\sigma}{\sqrt{(\sigma_{b1} - \sigma)(\sigma - \sigma_{b2})}} \right)^n. \tag{2}$$

Таким образом, напряжённно-деформированное состояние изогнутой балки в любой момент времени определяется осевыми напряжениями $\sigma = \sigma(y)$ и осевыми деформациями ползучести $p = p(y, t)$. Мгновенными упруго-пластическими деформациями пренебрегаем.

Уравнения равновесия балки имеют следующий вид:

$$\int_{-H/2}^{y_0} (\sigma_-) dy + \int_{y_0}^{H/2} (\sigma_+) dy = 0, \quad \int_{-H/2}^{y_0} (\sigma_-) y dy + \int_{y_0}^{H/2} (\sigma_+) y dy = \frac{M}{b}, \tag{3}$$

где σ_-, σ_+ — напряжения в сжатой и растянутой зонах балки соответственно.

Введём следующие безразмерные переменные:

$$\alpha = -\sigma_{b2}/\sigma_{b1}, \quad \bar{\sigma} = \sigma/\sigma_{b1}, \quad \bar{t} = tA$$

$$\bar{M} = \frac{4M}{bH^2\sigma_{b1}}, \quad \bar{N} = \frac{2N}{bH\sigma_{b1}}, \quad \dot{\bar{\chi}} = \frac{d\bar{\chi}}{d\bar{t}} = \frac{H}{2A} \frac{d\chi}{dt}, \quad \bar{y} = \frac{2y}{H}.$$

С учётом введённых безразмерных переменных определяющее соотношение (2) преобразуется к следующему виду:

$$\frac{dp}{d\bar{t}} = \left(\frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{(1-\bar{\sigma})(\alpha+\bar{\sigma})}} \right)^n. \quad (4)$$

На рис. 1 представлены графики зависимости модуля скорости деформации $|dp/d\bar{t}|$ от модуля безразмерного напряжения $|\bar{\sigma}|$ (4) при $n = 1$.

Согласно гипотезе плоских сечений (1) и определяющему соотношению (2) в безразмерных переменных имеем

$$\begin{aligned} \frac{dp}{d\bar{t}} &= \left(\frac{\bar{\sigma}^2}{(1-\bar{\sigma})(\alpha+\bar{\sigma})} \right)^{n/2} = \\ &= \frac{d\bar{\chi}}{d\bar{t}} (\bar{y} - \bar{y}_0). \end{aligned} \quad (5)$$

Преобразуем последнее выражение:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\sigma}^2}{(1-\bar{\sigma})(\bar{\sigma}+\alpha)} &= \\ &= \left(\frac{d\bar{\chi}}{d\bar{t}} (\bar{y} - \bar{y}_0) \right)^{2/n} = B(\bar{y}). \end{aligned} \quad (6)$$

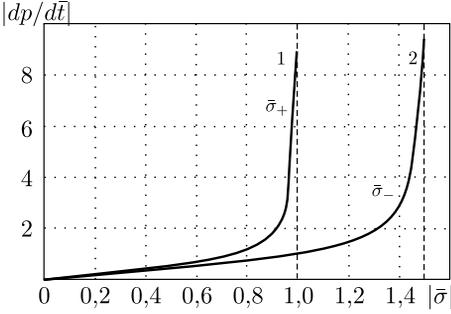


Рис. 1. Графики зависимости $|dp/d\bar{t}|$ от $|\bar{\sigma}|$ при $\alpha = 1,5$: 1 – область растяжения; 2 – область сжатия

Представим выражение (6) в виде квадратного уравнения относительно безразмерного напряжения $\bar{\sigma}$:

$$(1 + B)\bar{\sigma}^2 + B(\alpha - 1)\bar{\sigma} - \alpha B = 0. \quad (7)$$

В результате выражение для безразмерных напряжений принимает следующий вид:

$$\bar{\sigma}_{+,-} = \frac{-B(\alpha - 1) \pm \sqrt{B^2(\alpha - 1)^2 + 4(1 + B)\alpha B}}{2(1 + B)}. \quad (8)$$

Система уравнений равновесия (3) в безразмерных переменных приводит к виду

$$\bar{N} = \int_{-1}^{\bar{y}_0} (\bar{\sigma}_-) d\bar{y} + \int_{\bar{y}_0}^1 (\bar{\sigma}_+) d\bar{y} = 0; \quad \bar{M} = \int_{-1}^{\bar{y}_0} (\bar{\sigma}_-) \bar{y} d\bar{y} + \int_{\bar{y}_0}^1 (\bar{\sigma}_+) \bar{y} d\bar{y}. \quad (9)$$

Подставив выражения $\bar{\sigma}_+$ и $\bar{\sigma}_-$ из (8) в (9) и учитывая (6), получим систему двух уравнений относительно \bar{y}_0 и $\bar{\chi}$.

В таблице в столбцах 1 и 3 приведены результаты решения системы (9) при $\bar{M} = 0,5$, $\alpha = 1,5$ для некоторых значений n . На рис. 2 сплошными линиями изображены вычисленные согласно (6), (8), (9) эпюры напряжений в балке при этих же значениях констант. На рис. 3 приведены зависимости смещения нейтральной оси \bar{y}_0 от показателя степени n при $\alpha = 1,5$.

2. Чистый изгиб балки круглого поперечного сечения. В настоящем пункте рассматривается чистый изгиб при ползучести балки круглого поперечного сечения радиуса R , изготовленной из материала с разными значениями преде-

Результаты численного решения систем уравнений для балок прямоугольного (столбцы 1 и 3) и круглого (столбцы 2 и 4) сечений

n	y_0		$\dot{\chi}$	$\dot{\chi}$
	1	2	3	4
1	-0,045	-0,038	0,696	0,803
3	-0,061	-0,049	0,148	0,172
15	-0,077	-0,061	0,00001	0,0000131

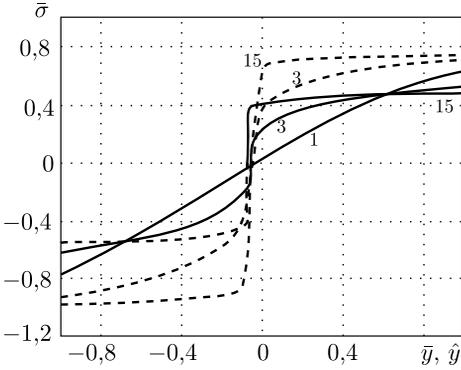


Рис. 2. Эпюры безразмерного напряжения $\bar{\sigma}$ для балок прямоугольного и круглого сечений при $n = 1, 3, 15$ и $\alpha = 1,5$

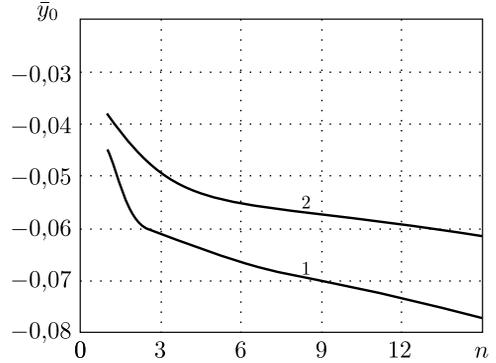


Рис. 3. Графики зависимости смещения нейтральной оси \bar{y}_0 от показателя n для балок прямоугольного (1) и круглого (2) поперечных сечений

лов прочности при растяжении σ_{b1} и сжатии σ_{b2} (отношение пределов прочности по-прежнему равно $\alpha = -\sigma_{b2}/\sigma_{b1}$). Задача решается с учётом гипотезы плоских сечений. Примем, что сечение балки имеет две оси симметрии (Ox и Oy), изгибающий момент действует в плоскости yOz . Высота сечения балки по оси y равна $2R$, ширина $b = 2R \cos \varphi$, φ — угол между радиусом и осью Ox (см. рис. 4), длина l удовлетворяет неравенству $l \gg R$.

Как и в п. 1, напряжённно-деформированное состояние изогнутой балки в любой момент времени определяется осевыми напряжениями $\sigma = \sigma(y)$ и осевыми деформациями ползучести $p = p(y, t)$. Мгновенными упруго-пластическими деформациями по-прежнему пренебрегаем.

В этом случае, как и в п. 1, гипотеза плоских сечений имеет вид

$$\dot{p} = \dot{\chi}(y - y_0), \quad y = R \sin \varphi, \quad y_0 = R \sin \varphi_0. \quad (10)$$

Введём безразмерные переменные

$$\alpha = -\sigma_{b2}/\sigma_{b1}, \quad \bar{\sigma} = \sigma/\sigma_{b1}, \quad \bar{t} = tA;$$

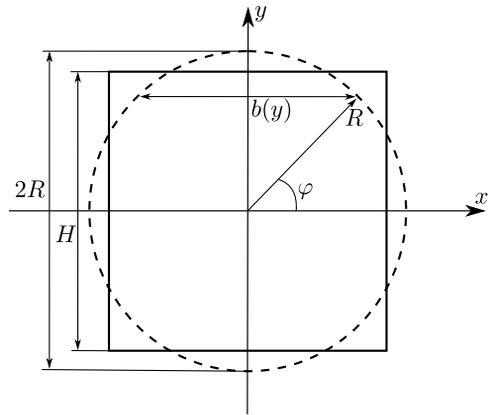


Рис. 4. Круглое и квадратное поперечное сечение балок с одинаковыми осевыми моментами инерции

$$\hat{M} = \frac{1}{2R^3\sigma_{b1}}M, \quad \hat{N} = \frac{1}{2R^2\sigma_{b1}}N, \quad \hat{\chi} = \frac{d\hat{\chi}}{d\hat{t}} = \frac{R}{A} \frac{d\chi}{dt}, \quad \hat{y} = \frac{y}{R} = \sin \varphi.$$

При рассмотрении изгиба балок прямоугольного и круглого сечений все уравнения (5), (7), (8) совпадают, различие наблюдается только в уравнениях равновесия:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/2}^{\varphi_0} \bar{\sigma}_- \cos^2 \varphi d\varphi + \int_{\varphi_0}^{\pi/2} \bar{\sigma}_+ \cos^2 \varphi d\varphi &= \hat{N} = 0, \\ \int_{-\pi/2}^{\varphi_0} \bar{\sigma}_- \sin \varphi \cos^2 \varphi d\varphi + \int_{\varphi_0}^{\pi/2} \bar{\sigma}_+ \sin \varphi \cos^2 \varphi d\varphi &= \hat{M}, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\bar{\sigma}_{+,-}$ выражаются через $B(\bar{y})$ по формуле (8), а $B(\bar{y})$ с учётом (6), (10) в безразмерных координатах принимает вид

$$B = \left(\frac{d\hat{\chi}}{d\hat{t}} (\sin \varphi - \sin \varphi_0) \right)^{2/n}.$$

Таким образом, в системе (11) величины $d\hat{\chi}/d\hat{t}$ и φ_0 являются неизвестными.

3. Сравнение решений задач об изгибе балок круглого и квадратного поперечного сечения. Проведём сравнение решений задач об изгибе балок круглого и квадратного поперечного сечения (как частный случай прямоугольного поперечного сечения при $b = H$) при одном и том же изгибающем моменте с учётом равенства осевых моментов инерции. Из равенства осевых моментов инерции следует, что

$$\frac{H^4}{12} = \frac{\pi R^4}{4}.$$

Отсюда получим соотношение между радиусом R круглого поперечного сечения и стороной H квадратного поперечного сечения:

$$H = (3\pi)^{1/4} R \approx 1,752R.$$

Соотношение размеров круглого и квадратного поперечных сечений балок показано на рис. 4. Сравнивая выражения для безразмерных изгибающих моментов в случае квадратного \bar{M} и круглого \hat{M} поперечных сечений, получаем

$$\hat{M} \approx 0,672\bar{M}.$$

В п. 1 для задачи изгиба при ползучести балки прямоугольного поперечного сечения был произведен расчёт для $\bar{M} = 0,5$. Аналогично выполним расчёт для балки круглого сечения, нагруженной моментом $\hat{M} = 0,336$.

В таблице в столбцах с номерами 2 и 4 приведены результаты решения системы уравнений (11) при $\bar{M} = 0,5$, $\hat{M} = 0,336$, $\alpha = 1,5$ для некоторых значений n . На рис. 2 штриховыми линиями представлены эпюры распределения напряжений $\bar{\sigma}$ для балки круглого поперечного сечения.

Из рис. 2 видно, что при $n = 1$ распределение напряжений близко к линейному. С ростом показателя n наблюдается перераспределение напряжений к характерному для идеально-пластического материала. Наряду с изменением эпюр напряжений в зависимости от показателя степени n наблюдается

смещение нейтральной оси ($\sigma(y_0) = 0$) от оси симметрии балки за счет разнородности материала.

На рис. 3 приведены графики зависимости смещения нейтральной оси \bar{y}_0 от показателя степени n для балок круглого и квадратного поперечных сечений.

Сравнение эпюр распределения безразмерных напряжений $\bar{\sigma}$ при различных значениях n для балок круглого и прямоугольного поперечных сечений (при одинаковых осевых моментах инерции) под действием одного и того же изгибающего момента показало, что величина этих напряжений по абсолютной величине больше для балки круглого поперечного сечения. Это можно объяснить тем, что вследствие гипотезы плоских сечений выдерживать основную часть нагрузки должны волокна, наиболее удаленные от плоскости симметрии, а у балки круглого сечения в этой области ширина меньше.

Из рис. 3 видно, что для любого n смещение нейтральной оси для балки круглого поперечного сечения меньше.

Легко показать, что в частном случае материала балок с одинаковыми свойствами ($\alpha = 1$) в аналогичной задаче чистого изгиба смещения нейтральной оси не происходит ($\bar{y}_0 = 0$).

Также необходимо отметить, что используемое дробно-степенное определяющее соотношение наиболее адекватно позволяет описывать процесс ползучести, так как оно ограничивает уровень допустимых напряжений пределами кратковременной прочности при растяжении и сжатии.

Заключение. Решены задачи о чистом изгибе балки при ползучести с учетом различия свойства материала при растяжении и сжатии. Определяющее уравнение принято в виде сингулярной дробно-степенной зависимости скорости ползучести от напряжения, мгновенные деформации не принимаются во внимание. Решения получены для прямоугольного и круглого поперечных сечений балок. На основании эпюр распределения напряжений по сечению балок проведено сравнение полученных результатов.

Представленные эпюры напряжений подтверждают гипотезу о смещении нейтральной оси балки при чистом изгибе в случае разнородного материала.

Показано влияние показателя n в дробно-степенной зависимости на характер распределения напряжений.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 11-08-01015, 11-08-00007).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Качанов Л. М. Теория ползучести. М.: Физматгиз, 1960. 456 с. [*Kachanov L. M. Theory of Creep. Moscow: Fizmatgiz, 1960. 456 pp.*]
2. Работнов Ю. Н. Сопrotивление материалов. М.: Физматгиз, 1962. 456 с. [*Rabotnov Yu. N. Strength of Materials. Moscow: Fizmatgiz, 1962. 456 pp.*]
3. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с. [*Rabotnov Yu. N. Creep of Structural Elements. Moscow: Nauka, 1966. 752 pp.*]
4. Boyle J. T., Spence J. Stress Analysis for Creep. London: Buittenworth, 1983. 296 pp.; русск. пер.: Бойл Дж., Спенс Дж. Анализ напряжений в конструкциях при ползучести. М.: Мир, 1986. 360 с.
5. Радченко В. П., Еремин Ю. А. Реологическое деформирование материалов и элементов конструкций. М.: Машиностроение-1, 2004. 264 с. [*Radchenko V. P., Eremin Yu. A.*

- Rheological Deformation and Failure of Materials and Structural Elements. Moscow: Mashinostroenie-1, 2004. 264 pp.]
6. Сорокин О. В., Самарин Ю. П., Одинг И. А. К расчёту ползучести балок при изгибе // Докл. АН СССР, 1964. Т. 157, № 6. С. 1325–1328; англ. пер.: Sorokin O. V., Samarin Yu. P., Oding I. A. Calculation of the Creep of Beams During Bending // *Sov. Phys., Dokl.* Vol. 9. Pp. 728–733.
 7. Никитенко А. Ф., Соснин О. В. Изгиб балки из материала с разными характеристиками ползучести при растяжении и сжатии // *Проблемы прочности*, 1971. № 6. С. 67–70; англ. пер.: Nikitenko A. F., Sosnin O. V. Beam flexure for materials possessing different creep characteristics in tension and compression // *Strength of Materials*, 1971. Vol. 3, no. 6. Pp. 693–697.
 8. Горев Б. В. К расчёту на неустановившуюся ползучесть изгибаемого бруса из материала с разными характеристиками на растяжение и сжатие / В сб.: *Динамика сплошной среды*: Сб. научн. тр. Вып. 14. Новосибирск, 1973. С. 44–51. [Gorev B. V. To unsteady creep calculation of a flexible rod made of material with different characteristics for tension and compression / In: *Dynamics of Continuous Media*: Collected scientific papers. 14. Novosibirsk, 1973. Pp. 44–51].
 9. Леллеп Я. Установившаяся ползучесть балок в случае материалов с разными характеристиками на растяжение и сжатие // *Тр. Тартус. ун-та (Tartu Ülikooli toimetised)*, 1975. Т. 355, № 15. С. 245–252. [Lellep Ja. Steady-state creep of beams in case of materials with different characteristics at tension and compression // *Tr. Tartus. Un-ta.*, 1975. Vol. 355, no. 15. Pp. 245–252].
 10. Еремин Ю. А., Кайдалова Л. В., Радченко В. П. Исследование ползучести балок на основе аналогии структуры уравнения состояния материалов и элементов конструкций // *Машиноведение*, 1983. № 2. С. 67–74. [Eremín Yu. A., Kaydalova L. V., Radchenko V. P. The study of creep of beams based on the analogy of the structure of the equation of state of materials and structural elements // *Mashinovedenie*, 1983. no. 2. Pp. 67–74].
 11. Локощенко А. М., Печенина Н. Е., Шестериков С. А. Долговечность цилиндрического бруса при чистом изгибе // *Изв. вуз. Машиностр.*, 1988. № 9. С. 9–13. [Lokoshenko A. M., Pechenina N. E., Shesterikov S. A. The durability of a cylindrical rod under pure bending // *Izv. vuz. Mashinostr.*, 1988. no. 9. Pp. 9–13].
 12. Басов М. В. Применение структурной модели стержневого типа для решения задачи изгиба и разрушения балки в условиях ползучести / В сб.: *Актуальные проблемы современной науки. Естественные науки*: Тр. 3-й Междунар. конф. молодых учёных и студентов. Часть 1. Математика. Механика (30 сентября – 2 октября 2002 г.). Самара: СамГТУ, 2002. С. 47–48. [Basov M. V. Application of a structural model of rod type to solving the problem of bending and fracture of a beam under creep conditions / In: *Actual Problems of Modern Science. Natural Sciences*. Part 1. Samara: SamGTU, 2002. Pp. 47–48].
 13. Андреева Е. А., Агафонов А. А. Решение краевой задачи изгиба балки из пластически разупрочняющегося материала на основании структурной модели / В сб.: *Актуальные проблемы современной науки. Естественные науки*: Тр. Междунар. форума молодых учёных (9-й Междунар. конф.). Часть 1–3. Математика. Математическое моделирование. Механика (20–23 ноября 2008 г.). Самара: СамГТУ, 2008. С. 168–178. [Andreeva E. A., Agafonov A. A. The solution of the boundary value problem of rod bending made of plastic softening material on the basis of the structural model / In: *Actual Problems of Modern Science. Natural Sciences*. Part 1–3. Samara: SamGTU, 2008. Pp. 168–178].
 14. Шестериков С. А., Юмашева М. А. Конкретизация уравнения состояния в теории ползучести // *Изв. АН СССР. Мех. тв. тела*, 1984. № 1. С. 86–91. [Shesterikov S. A., Yumasheva M. A. Specification of Equation of State in Creep Theory // *Izv. AN SSSR. Mekh. Tverd. Tela*, 1984. no. 1. Pp. 86–91].
 15. Шестериков С. А., Юмашева М. А. Вариант уравнения состояния при ползучести и его приложения / В сб.: *Вопросы долговременной прочности энергетического оборудования* / Труды ЦКТИ. Вып. 246. Ленинград: НПО ЦКТИ, 1988. С. 74–77. [Shesterikov S. A., Yumasheva M. A. Variant of state equations for creep and its

applications/ In: *Voprosy dolgovremennoiy prochnosti energeticheskogo oborudovaniya/* Trudy TsKTI. 246. Leningrad: NPO TsKTI, 1988. Pp. 74–77].

Поступила в редакцию 07/1/2012;
в окончательном варианте — 22/1/2012.

MSC: 74K10; 74C99

PURE BENDING OF BEAMS MADE OF MULTIMODULAR BEHAVIOR MATERIAL UNDER CREEP CONDITIONS

A. M. Lokoschenko, K. A. Agakhi, L. V. Fomin

M. V. Lomonosov Moscow State University,
Research Institute of Mechanics,
1, Michurinsky pr., Moscow, 119192, Russia.

E-mails: loko@imec.msu.ru, kamilla@imec.msu.ru, lef1975@rambler.ru

The problem of pure bending of beams with rectangular and circular cross-section is solved at steady-state creep, taking into account the different characteristics of the material in tension and compression. Constitutive relations for steady-state creep are taken in the form of fractional functions. A comparison of solutions of problems for beams with square and circular cross-section with the same values of the axial moments of inertia is given.

Key words: *beams, bending, steady-state creep, multimodulus behavior of material, fractional model, square cross-section, circular cross-section.*

Original article submitted 07/1/2012;
revision submitted 22/1/2012.

Alexander M. Lokoschenko (Dr. Sci. (Phys. & Math.)), Deputy Director, Research Institute of Mechanics. *Kamilla A. Agakhi* (Ph. D. (Phys. & Math.)), Head of Laboratory, Lab. of Strength and Creep at High Temperatures, Research Institute of Mechanics. *Leonid V. Fomin*, Leading Engineer, Research Institute of Mechanics.