Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2012. № 3 (28). С. 215–218

Информатика

УДК 519.7

К АЛГОРИТМАМ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

В. Г. Овчинников

Самарский государственный технический университет,
443100, Россия, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mail: ovchinnikov42@mail.ru

Формулируется задача дискретного оптимального управления, имеющая m последовательно применяемых функций цели. В этой задаче оптимальный процесс, называемый также m-оптимальным, разыскивается как пара функций, определяемых на конечном множестве шагов, при связях, с помощью которых одна функция однозначно определяет другую, при ограничениях этих функций включением "$\in$" их значений в конечные множественные значения функций, составляющих известную пару. Построением ограничиваемой этой парой сверху по включениям "$\subset$" неубывающей последовательности на основе характеризации разрешимости задачи дается единообразное представление множеств, которые образуют k-оптимальные процессы в случаях k не больше m.

Ключевые слова: *дискретное оптимальное управление, последовательно применяемые критерии, динамическое программирование, алгоритмы.*

1. Хорошо известно, что метод динамического программирования основывается на использовании информации о решениях вспомогательных подзадач, и необходимость использования такой информации может послужить препятствием к применению метода, так как требует дополнительной памяти и, возможно, мощных процессоров. Кроме того, легко строится пример, когда для хранения указанной информации требуется память в размере большем, чем количество адресов самого современного процессора.

Эффективные алгоритмы динамического программирования оптимальных по одному критерию процессов даны в [1, 2], причем предложенные в [2] алгоритмы W_O, R_O основаны на использовании лишь не исключенных алгоритмом O [2] вспомогательных подзадач и поэтому требуют меньше дополнительной памяти, чем алгоритмы [1].

В настоящей статье, продолжающей исследования [2], алгоритмам W_O, R_O дается развитие в случаях нескольких последовательно применяемых функций цели в виде процедуры $W^p_O(Y, V)$ и алгоритма $R^m_O(\varphi, \psi)$ для обобщающей задачу [2] следующей задачи дискретного оптимального управления (задачи A^m).

Задача A^m. *Даны:* $m \in \mathbb{N}$*; множества* A, B*; множество шагов* T $(1<\|T\|<\infty)$ *со строгим порядком* $\prec$*, подмножеством* $T_0 = \{i \in T \mid \varnothing = \{j \in T \mid j \prec i\}\}$ $(\neq T)$ *начальных шагов и определением* $\pi(i)$ *как единственного шага в* $\{j \in T \mid (j \prec i) \wedge (\varnothing = \{g \in T \mid j \prec g \prec i\})\}$ — *подмножестве шагов, которые непосредственно предшествуют шагу* i $(\forall i \in T \backslash T_0)$*; имеющие множественные значения функции* $X{:}T \to \boldsymbol{\beta}(A)$ $(\boldsymbol{\beta}(A) = \{C \mid C \subset A\})$, $U : (T\backslash T_0) \times A \to \boldsymbol{\beta}(B)$*, удовлетворяющие неравенствам* $0 < \|X(i)\| < \infty$ $(\forall i \in T)$, $\|U(i, \alpha)\| < \infty$ $(\forall i \in T\backslash T_0)$ $(\forall \alpha \in A)$*; функции цели* $f^k : (T\backslash T_0) \times A \times B \to \mathbb{R}$ $(\forall k \in \{1, \dots, m\})$ *и связей* $s : (T\backslash T_0) \times A \times B \to A$*;*

Валерий Гаврилович Овчинников, старший преподаватель, каф. разработки нефтяных и газовых месторождений.

множество D, которое образуют процессы, т. е. пары (x, u) функций $x : T \to A$, $u : T \to B$ со значениями $x_i(\forall i \in T)$, $u_i(\forall i \in T)$ при ограничениях $x_i = u_i(\forall i \in T_0)$, $x_i = s(i, x_{\pi(i)}, u_i)$ $(\forall i \in T\backslash T_0)$, $x_i \in X(i)(\forall i \in T)$, $u_i \in U(i, x_{\pi(i)})$ $(\forall i \in T\backslash T_0)$.

Требуется найти называемую (m)-оптимальным процессом пару $(x^*, u^*) \in D^m$, если $D^0 = D$,

$$D^k = \Bigg\{(x, u) \in D^{k-1} \,\Bigg|\, \sum_{i\in T\backslash T_0} f^k(i, x_{\pi(i)}, u_i) \leqslant \\ \leqslant \sum_{i\in T\backslash T_0} f^k(i, y_{\pi(i)}, v_i)\,\big(\forall (y, v) \in D^{k-1}\big)\Bigg\} (\forall k \in \{1, \ldots, m\}).$$

Замечание 1. В случае, когда $m = 1 = \|T_0\|$, задача A^m формулируется как задача A в [2].

2. В общем случае наряду с терминами [2] будут использоваться следующие обозначения и термины: $\tau(i) = \{j \in T\backslash T_0 \mid \pi(j) = i\}$ $(\forall i \in T)$, $M = \{i \in T \| \tau(i) = \varnothing$, $h(i) = \|\{j \in T \mid j \prec i\}\|$ $(\forall i \in T)$, $h(T) = \max_{i\in T} h(i)$, $T_k = \{i \in T \mid h(i) = k\}$ $(\forall k \in \{1, \ldots, h(T)\})$; пара (Y, V) называется подходящей, если ее составляют функции $Y : T \to \boldsymbol{\beta}(A)$, $V : \{(i, \alpha) \mid i \in T\backslash T_0,\, \alpha \in Y(\pi(i))\} \to \boldsymbol{\beta}(B)$, когда $Y(i) \neq \varnothing$ $(\forall i \in T)$; для каждой подходящей пары (Y, V) множество $F(Y, V)$ образуют пары (x, u) функций $x : T \to A$, $u : T \to B$ со значениями $x_i(\forall i \in T)$, $u_i(\forall i \in T)$ при ограничениях $x_i = u_i(\forall i \in T_0)$, $x_i = s(i, x_{\pi(i)}, u_i)$ $(\forall i \in T\backslash T_0)$, $x_i \in Y(i)$ $(\forall i \in T)$, $u_i \in V(i, x_{\pi(i)})$ $(\forall i \in T\backslash T_0)$; пара (Y, V) называется s-согласованной, когда она является подходящей и выполнены условия $\varnothing \neq V(i, \alpha) = \{\beta \in V(i, \alpha) \mid s(i, \alpha, \beta) \in Y(i)\}$ $(\forall \alpha \in Y(\pi(i)))$ $(\forall i \in T\backslash T_0)$.

3. Следующее утверждение даёт характеризацию разрешимости задачи A^m.

Теорема 1. *Оптимальный процесс в задаче A^m существует, если и только если определяемая из равенств $X^0(i) = \{\alpha \in X(i) \mid \varnothing \neq \{\beta \in U(j, \alpha)|\ s(j, \alpha, \beta) \in X^0(j)\}$ $(\forall j \in \tau(i))\}$ $(\forall i \in T\backslash M)$, $X^0(i) = X(i)$ $(\forall i \in M)$ функция $X^0 : T \to \boldsymbol{\beta}(A)$ удовлетворяет условиям $X^0(i) \neq \varnothing$ $(\forall i \in T)$.*

При этих условиях указанная функция $X^0 : T \to \boldsymbol{\beta}(A)$ и определяемая при помощи равенств $U^0(i, \alpha) = \{\beta \in U(i, \alpha) \mid s(i, \alpha, \beta) \in X^0(i)\}$ $(\forall \alpha \in X^0(\pi(i)))$ $(\forall i \in T\backslash T_0)$ функция $U^0 : \{(i, \alpha) \mid i \in T\backslash T_0,\, \alpha \in X^0(\pi(i))\} \to \boldsymbol{\beta}(B)$ составляют s-согласованную пару (X^0, U^0), удовлетворяющую равенству $D^0 = F(X^0, U^0)$.

Замечание 2. В указанном замечанием 1 случае с помощью теоремы 1 получается теорема 3 [2].

Замечание 3. В общем случае указанная теоремой 1 функция $X^0 : T \to \boldsymbol{\beta}(A)$ определяется тремя способами: (а) при помощи алгоритма, получаемого из алгоритма O [2] заменой S_{h-1} на T_{h-1}; (б) при помощи равенств $X^0(i) = \{\alpha \in X(i) \mid B(i, \alpha) < \infty\}$ $(\forall i \in T)$, если в них значения $B(i, \alpha)$ $(\forall \alpha \in X(i))$ $(\forall i \in T)$ определяются алгоритмом, получаемым из алгоритма W [2] заменой S_{h-1} на T_{h-1} и функции f на одну из функций f^k $(\forall k \in \{1, \ldots, m\})$; (в) при помощи равенств $X^0(i) = \{\alpha \in X(i) \mid B(i, \alpha) = 0\}$ $(\forall i \in T)$, где значения $B(i, \alpha)$ $(\forall \alpha \in X(i))$ $(\forall i \in T)$ находит следующий алгоритм (алгоритм W).

Алгоритм W. Этот алгоритм использует значения функции $f^0 : (T\backslash T_0) \times A \times B \to \mathbb{R}$, определяемые из условий: $f^0(i, \alpha, \beta) = 0$ в случае $(\alpha \in X(\pi(i))) \wedge (\beta \in U(i, \alpha)) \wedge (s(i, \alpha, \beta) \in X(i))$ либо $f^0(i, \alpha, \beta) = 1$ в иных случаях $(\forall i \in T\backslash T_0)$ $(\forall \alpha \in A)$ $(\forall \beta \in B)$.

Шаг 0. Положить $B(i, \alpha) = 0$ $(\forall \alpha \in Y(i))$ $(\forall i \in M)$, $h = h(T)$, $\mu = 1$.

Шаг μ. Если $\mu = h(T) + 1$, остановиться. Иначе аналогично алгоритму W [2] положить $B(i,\, \alpha) = 1$ в случае $(\exists j \in \tau(i))$ $(\varnothing = \{\beta \in U(j,\, \alpha) | s(j,\, \alpha,\, \beta) \in X(j)\})$, либо положить

$$B(i,\, \alpha) = \sum_{j \in \tau(i)} \min_{\beta \in \{\beta \in U(j,\alpha) | s(j,\alpha,\beta) \in X(j)\}} \big(f^0(j, \alpha, \beta) + B(j, s(j, \alpha, \beta))\big)$$

в иных случаях $(\forall \alpha \in X(i))$ $(\forall i \in T_{h-1} \backslash M)$, заменить h на $h-1$, μ на $\mu+1$ и идти на Шаг μ.

Далее предполагается, что оптимальный процесс в задаче A^m существует, пара $(X^0,\, U^0)$ составлена, как указано в теореме 1 и, следовательно, $D^0 = F(X^0,\, U^0)$.

4. Следующее утверждение указывает способ получения для множеств D^k $(\forall k \in \{1, \ldots, m\})$ аналогичных $D^0 = F(X^0,\, U^0)$ равенств, на которых основывается динамическое программирование для задачи A^m.

Теорема 2. *В порядке увеличения k при помощи обращений $(X^k,\, U^k) = W_O^k(X^{k-1},\, U^{k-1})$ к следующей процедуре (процедуре $W_O^p(Y,\, V)$) получаются s-согласованные пары $(X^k,\, U^k)$, удовлетворяющие равенствам $D^k = F(X^k,\, U^k)$ $(\forall k \in \{1, \ldots, m\})$.*

Процедура $W_O^p(Y,\, V)$. В этой процедуре аргументами являются номер $p \in \{1, \ldots, m\}$ и s-согласованная пара $(Y,\, V)$.

Шаг 0. Положить $B(i,\, \alpha) = 0$ $(\forall \alpha \in Y(i))$ $(\forall i \in M)$, $h = h(T)$, $\mu = 1$.

Шаг μ. Если $\mu = h(T) + 1$, идти на Завершение процедуры. Иначе аналогично алгоритму W_O [2] положить

$$B(i,\, \alpha) {=} \sum_{j \in \tau(i)} \min_{\beta \in V(j,\, \alpha)} (f^p(j,\, \alpha,\, \beta) {+} B(j,\, s(j,\, \alpha,\, \beta)))\ (\forall \alpha \in Y(i))\, (\forall i \in T_{h-1} \backslash M),$$

заменить h на $h-1$, μ на $\mu+1$ и идти на Шаг μ.

Завершение процедуры. Обозначить $W_O^p(Y,\, V)$ пару $(Y^1,\, V^1)$, где функции Y^1, V^1 задаются равенствами $Y^1(i) = \{\alpha^1 \in Y(i) \mid B(i,\, \alpha^1) = \min\limits_{\alpha \in Y(i)} B(i,\, \alpha)\}$ $(\forall i \in T_0)$, $Y^1(i) = Y(i)$ $(\forall i \in T \backslash T_0)$,

$$\begin{aligned} V^1(i, \alpha) = \{\beta^1 \in V(i, \alpha) | f^p(i, \alpha, \beta^1) + B(i, s(i, \alpha, \beta^1)) = \\ = \min_{\beta \in V(i,\alpha)} (f^p(i, \alpha, \beta) + B(i, s(i, \alpha, \beta)))\} \quad (\forall \alpha \in Y^1(\pi(i))) \quad (\forall i \in T \backslash T_0). \end{aligned}$$

5. Следующее утверждение даёт обоснование динамическому программированию для задачи A^m.

Теорема 3. *При любой паре $(\varphi,\, \psi)$ функций (выбора элементов из подмножеств) $\varphi : (\boldsymbol{\beta}(A) \backslash \{\varnothing\}) \to A$, $\psi : (\boldsymbol{\beta}(B) \backslash \{\varnothing\}) \to B$ следующий алгоритм (алгоритм $R_O^m(\varphi,\, \psi)$), используя полученную по теореме 2 пару $(X^m,\, U^m)$, находит значения $x_i (\forall i \in T)$, $u_i (\forall i \in T)$ функций x: $T \to A$, $u : T \to B$, составляющих оптимальный процесс в задаче A^m.*

Алгоритм $R_O^m(\varphi,\, \psi)$.

Шаг 0. Положить $u_i = x_i = \varphi(X^m(i)) (\forall i \in T_0)$, $\mu = 1$.

Шаг μ. Если $\mu = h(T) + 1$, остановиться. Иначе положить $u_i = \psi(U^m(i, x_{\pi(i)}))$ $(\forall i \in T_\mu)$, $x_i = s(i, x_{\pi(i)}, u_i) (\forall i \in T_\mu)$, заменить μ на $\mu+1$ и идти на Шаг μ.

Замечание 4. В указанном замечанием 1 случае из теоремы 3 получается теорема 4 [2] и алгоритм $R_O^m(\varphi,\, \psi)$ формулируется как алгоритм R_O [2].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Хачатуров В. Р., Веселовский В. Е., Злотов А. В., Калдябаев С. У., Калиев Е. Ж., Коваленко А. Г., Монтлевич В. М., Сигал И. Х., Хачатуров Р. В.* Комбинаторные методы и алгоритмы решения задач дискретной оптимизации большой размерности. М.: Наука, 2000. 353 с. [*Khachaturov V. R., Veselovskiy V. E., Zlotov A. V., Kaldybaev S. U., Kaliev E. Zh., Kovalenko A. G., Montlevich V. M., Sigal I. Kh., Khachaturov R. V.* Combinatorial methods and algorithms for solving discrete optimization problems of large dimension. Moscow: Nauka, 2000. 353 pp.]
2. *Овчинников В. Г.* Алгоритмы динамического программирования оптимальных и близких к ним процессов / В сб.: *Труды пятой Всероссийской научной конференции с международным участием* (29–31 мая 2008 г.). Часть 4: Информационные технологии в математическом моделировании / Матем. моделирование и краев. задачи. Самара: СамГТУ, 2008. С. 107–112. [*Ovchinnikov V. G.* Algorithms of dynamic programming for optimal and similar processes / In: *Proceedings of the Fifth All-Russian Scientific Conference with international participation* (29–31 May 2008). Part 4 / Matem. Mod. Kraev. Zadachi. Samara: Samara State Technical Univ., 2008. Pp. 107–112].

Поступила в редакцию 04/VII/2012;
в окончательном варианте — 15/VIII/2012.

MSC: 90C27; 90C10, 90C39

ON THE ALGORITHMS OF DYNAMIC PROGRAMMING FOR OPTIMAL PROCESSES

V. G. Ovchinnikov

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia.

E-mail: ovchinnikov42@mail.ru

The problem of discrete optimal control which has m consistently applied objective functions is formulated. In this problem the optimal process, also called m-optimal, is sought as a pair of functions defined on a finite set of steps at the links by which one function is uniquely defines the other, with the constraints of these functions with inclusion "$\in$" of their values in the final multiple values of the functions of the known pair. A uniform representation of sets, forming the k-optimal processes for k not greater than m, is given with construction of nondecreasing sequence, upper limited by this pair by the "$\subset$" inclusions, on the basis of characterization of solvability of the problem.

Key words: *discrete optimal control, consistently applied criteria, dynamic programming, algorithms.*

Original article submitted 04/VII/2012;
revision submitted 15/VIII/2012.

Valeriy G. Ovchinnikov, Senior Lecturer, Dept. of Oil and Gas Fields Development.