

УДК 539.3

## ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ДИНАМИКИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОЙ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

*Ю. Э. Сеницкий*

Самарский государственный архитектурно-строительный университет,  
443001, Россия, Самара, ул. Молодогвардейская, 194.

E-mail: senitskiy@mail.ru

*На основе уточнённой теории обобщённым методом конечных интегральных преобразований построено новое аналитическое решение осесимметричной динамической задачи для неоднородных по толщине круговых конических оболочек с конечной сдвиговой жёсткостью. Рассматривается произвольное динамическое нагружение для оболочки, упруго защемлённой по торцам. В расчётной схеме учитываются диссипативные силы вязкого сопротивления. Анализируются напряжённо-деформированное состояние и динамические характеристики оболочек в зависимости от степени неоднородности деградируемых конструкций.*

**Ключевые слова:** коническая неоднородная оболочка, уточнённая теория, конечные интегральные преобразования, аналитическое решение, частоты колебаний, осциллограммы перемещений.

**Введение.** При взаимодействии одной из поверхностей оболочки с физическими или химическими полями, т.е. когда они подвержены интенсивному температурному воздействию, радиационному облучению, действию химически активных сред (факторов наведенной неоднородности), механические характеристики материала становятся переменными по толщине конструкции [1]. В связи с этим возникает необходимость в определении динамических характеристик и оценке напряжённо-деформированного состояния подобных конструкций. Таким образом, разработка эффективных методов расчета неоднородных оболочек на нестационарные воздействия представляет актуальную проблему современной строительной механики.

В настоящее время известны аналитические решения соответствующих задач динамики для неоднородных цилиндрических, пологих и непологих сферических оболочек [2–4]. Однако автору неизвестны аналогичные результаты для конических оболочек даже в случае, когда материал конструкции однородный.

В предлагаемой работе, на основе уточненной технической теории оболочек, дополненной учётом деформаций поперечного сдвига, инерцией поворота сечений [5–7], при некоторых допущениях (усреднениях) построено аналитическое решение в специальных функциях осесимметричной динамической задачи для неоднородной по толщине круговой конической оболочки. Применяется разработанный автором [8] структурный алгоритм метода конечных интегральных преобразований (КИП), в процедуре которого однозначно определяются все компоненты (ядро, трансформанта, обобщённое соотношение ортогональности) получающихся при этом спектральных разложений.

В математическую модель в соответствии с методом квазинормальных

---

*Юрий Эдуардович Сеницкий* (д.т.н., проф.), зав. кафедрой, каф. сопротивления материалов и строительной механики.

координат [9] вводятся также диссипативные силы вязкоупругого сопротивления. Рассматривается общий случай загрузки оболочки произвольной осесимметричной динамической нагрузкой, торцы которой упруго заземлены. Модуль упругости  $E(z)$  и плотность  $\rho(z)$  материала при этом являются произвольными функциями толщины координаты  $z$  ( $-h_1 \leq z \leq h_2$ ;  $h_1, h_2$  — расстояния от нейтральной до лицевых поверхностей оболочки).

**Постановка задачи.** Будем рассматривать круговую оболочку в виде усеченного конуса (рис. 1) высотой  $H^*$  и толщиной  $h = h_1 + h_2$ .

Воспользуемся системой координат  $(x^*, \varphi)$ , т. е. круговые параллели  $x = \text{const}$  и прямолинейные меридианы  $\varphi = \text{const}$  при этом являются главными кривизнами поверхности. Для неоднородного материала справедливо представление

$$E(z) = E_0 f_1(z), \quad \rho(z) = \rho_0 f_2(z), \quad \nu = \text{const}.$$

Здесь  $E_0, \rho_0, \nu$  — модуль упругости, плотность материала и коэффициент Пуассона соответствующей однородной конической оболочки;  $f_1(z), f_2(z)$  — произвольные безразмерные функции неоднородности.

Воспользуемся нижесформулированными автором в криволинейных координатах дифференциальными уравнениями движения для неоднородных оболочек произвольной геометрии и конечной сдвиговой жёсткости [6].

Если определить положение нейтральной поверхности из условия

$$\int_{-h_1}^{h-h_1} f_1(z) z dz = 0, \tag{1}$$

то формулы для внутренних усилий  $N_x^*, N_\varphi^*, M_x^*, M_\varphi^*, Q_x^*$  записываются так же, как для однородной оболочки. В случае осевой симметрии эти соотношения, представленные в безразмерной форме, принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} N_x &= N_x^* C^{-1} = \frac{\partial U}{\partial x} + \nu x^{-1} \left( U + \frac{1}{\text{tg } \theta} W \right), \\ N_\varphi &= N_\varphi^* C^{-1} = \nu \frac{\partial U}{\partial x} + x^{-1} \left( U + \frac{1}{\text{tg } \theta} W \right), \\ M_x &= M_x^* R_2 D^{-1} = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \nu x^{-1} \psi, \\ M_\varphi &= M_\varphi^* R_2 D^{-1} = \nu \frac{\partial \psi}{\partial x} + x^{-1} \psi, \\ Q_x &= Q_x^* C^{-1} = k^2 \left( \frac{\partial W}{\partial x} + \psi - x^{-1} \frac{1}{\text{tg } \theta} U \right). \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь  $U = U^* R_2^{-1}, V = 0, W = W^* R_2^{-1}$  — тангенциальные и нормальная безразмерные компоненты вектора перемещений;  $\psi$  — угол поворота сечений

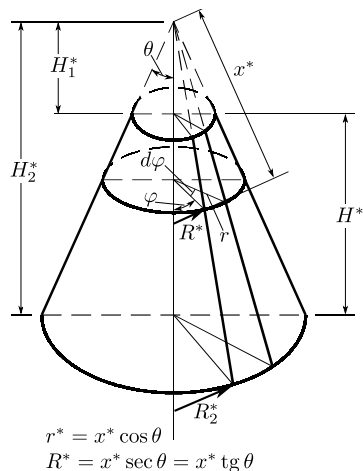


Рис. 1. Геометрическая схема конической оболочки

в меридиональной плоскости;  $x = x^* R_2^{-1}$  — безразмерная координата;  $C$  и  $D$  — соответствующие жёсткости неоднородной оболочки:

$$C = C_0 n_1 = E_0 h (1 - \nu^2)^{-1} n_1, \quad D = D_0 n_2 = E_0 h^3 (12(1 - \nu^2))^{-1} n_2;$$

$n_1, n_2$  — безразмерные коэффициенты неоднородности упругих характеристик:

$$n_1 = h^{-1} \int_{-h_1}^{h-h_1} f_1(z) dz, \quad n_2 = 12h^{-3} \int_{-h_1}^{h-h_1} f_1(z) z^2 dz; \quad (3)$$

$k^2 = k_1(1 - \nu)/2$ ;  $k_1$  — коэффициент поперечного сдвига, определяемый в соответствии с предложением Миндлина [7]. Звёздочкой обозначены соответствующие размерные величины. В работе автора [6] приведены сформулированные в усилиях и криволинейных координатах ( $\alpha \sim x, \beta \sim \varphi$ ) дифференциальные уравнения движения неоднородных оболочек.

Имея осесимметричный характер деформирования (независимость всех функций от переменной  $\varphi$ ), коэффициенты первой квадратичной формы конической поверхности  $A = 1, B = x \sin \theta$ , а также соотношения (2), получаем разрешающую систему для рассматриваемой оболочки:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{U}{x^2} + \frac{1 + \nu + k^2}{x \operatorname{tg} \theta} \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{1 + \nu}{x^2 \operatorname{tg} \theta} U + \frac{k^2}{x \operatorname{tg} \theta} \psi - m^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= -q_x, \\ k^2 \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{W}{x^2} \right) - \frac{1 + \nu + k^2}{x \operatorname{tg} \theta} \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{2(1 + \nu) - k^2 \operatorname{tg}^2 \theta}{x^2 \operatorname{tg}^2 \theta} W - \\ &\quad - \frac{1 + \nu}{x^2 \operatorname{tg} \theta} U + k^2 \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\psi}{x} \right) - m^2 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = -q_z, \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\psi}{x^2} - \frac{k^2 C}{D} R_2^2 \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{k^2 C}{D x \operatorname{tg} \theta} R_2^2 U - \frac{k^2 C}{D} R_2^2 \psi - s^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= -\mu_x. \end{aligned} \quad (4)$$

В общем случае могут быть заданы такие начальные условия:

$$\begin{aligned} U(x, 0) = U_0(x), \quad W(x, 0) = W_0(x), \quad \psi(x, 0) = \psi_0(x), \\ \frac{\partial U}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{U}_0(x), \quad \frac{\partial W}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{W}_0(x), \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{\psi}_0(x). \end{aligned} \quad (5)$$

Граничные условия для упруго закреплённой по торцам конической оболочки формулируются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \nu \frac{\psi}{x} = -r_{11} \psi, \quad U = 0, \quad W = 0 \quad \text{при } x = H_1 \sec \theta = l_1; \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} + \nu \frac{\psi}{x} = r_{11} \psi, \quad U = 0, \quad W = 0 \quad \text{при } x = H_2 \sec \theta = l_2. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $q_x, q_z, \mu_x$  — соответствующие безразмерные компоненты распределённой по поверхности оболочки осесимметричной линейной и моментной нагрузки, причём  $q_x = q_x^* R_2 C^{-1}, q_z = q_z^* R_2 C^{-1}, \mu_x = \mu_x^* R_2^2 D^{-1}$ ;  $t, r_{11}$  — безразмерное время и коэффициент жёсткости упругого заземления торцов оболочки:

$$t = t^* R_2^{-1} \sqrt{\frac{E_0}{\rho_0(1 - \nu^2)}}, \quad r_{11} = r_{11}^* R_2 D;$$

$$m^2 = \left[ 1 + \frac{1}{12} \left( \frac{h}{R_2} \right)^2 \right] \frac{m_1}{n_1}, \quad s^2 = \left[ 1 + \frac{3}{20} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \right] \frac{m_2}{n_2}. \quad (7)$$

Безразмерные усреднённые в интервале  $(l_1, l_2)$  коэффициенты неоднородности инерционных характеристик конической оболочки выражаются через функцию  $f_2(z)$  по таким зависимостям [6]:

$$\begin{aligned} m_1 &= \left[ 1 + \frac{1}{12} \left( \frac{h}{R_2} \right)^2 \right]^{-1} [h(l_2 - l_1)]^{-1} \int_{-h_1}^{h-h_1} \int_{l_1}^{l_2} f_2(z) \left[ 1 + \frac{z}{R(x)} \right]^2 dx dz = \\ &= \left[ 1 + \frac{1}{12} \left( \frac{h}{R_2} \right)^2 \right]^{-1} [h(H_2 - H_1)]^{-1} \cos \theta \left[ F_1(h)(H_2 - H_1) \sec \theta + \right. \\ &\quad \left. + 2F_2(h) \ln \frac{H_2}{H_1} \operatorname{ctg} \theta + F_3(h) \frac{H_2 - H_1}{H_1 H_2} \operatorname{ctg} \theta \sec \theta \right], \\ m_2 &= \left[ 1 + \frac{3}{20} \left( \frac{h}{R_2} \right)^2 \right]^{-1} [h^3(l_2 - l_1)]^{-1} \int_{-h_1}^{h-h_1} \int_{l_1}^{l_2} f_2(z) \left[ 1 + \frac{z}{R(x)} \right]^2 z^2 dx dz = \\ &= 12 \left[ 1 + \frac{3}{20} \left( \frac{h}{R_2} \right)^2 \right]^{-1} [h^3(l_2 - l_1)]^{-1} \cos \theta \left[ F_3(h)(H_2 - H_1) \sec \theta + \right. \\ &\quad \left. + 2F_4(h) \ln \frac{H_2}{H_1} \operatorname{ctg} \theta + F_5(h) \frac{H_2 - H_1}{H_1 H_2} \operatorname{ctg} \theta \sec \theta \right], \quad (8) \end{aligned}$$

$$F_k(h) = \int_{-h_1}^{h-h_1} f_2(z) z^{k-1} dz, \quad k = 1, 2, 3, 4, 5;$$

$U_0(x), W_0(x), \psi_0(x), \dot{U}_0(x), \dot{W}_0(x), \dot{\psi}_0(x)$  — известные функции, определяющие положение оболочки в начальный момент времени  $t = 0$ .

Если принять  $f_1(z) = f_2(z) = 1$ , то из (1) следует  $h_1 = h_2 = h/2$ , а из (3)  $n_1 = n_2 = 1$ , и соответственно упрощаются выражения  $m_1, m_2$  по формулам (8). В этом случае соотношения (4) становятся дифференциальными уравнениями движения для однородной конической оболочки. Равенства (4)–(6) представляют собой математическую формулировку рассматриваемой начально-краевой задачи.

**Метод решения.** Применяется разработанный автором структурный алгоритм метода конечных интегральных преобразований (КИП) по пространственной переменной  $x$  [2–5, 8]. Для этого вводим для  $x \in [l_1, l_2]$  КИП с неизвестными компонентами  $G_1(\lambda_i, x), G_2(\lambda_i, x), G_3(\lambda_i, x)$  вектор-функции  $\overline{G}(\lambda_i, x)$  ядра преобразования

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda_i, x) &= \int_{l_1}^{l_2} p(x) [b_1 U(x, t) G_1(\lambda_i, x) + \\ &\quad + b_2 W(x, t) G_2(\lambda_i, x) + b_3 \psi(x, t) G_3(\lambda_i, x)] dx \quad (9) \end{aligned}$$

с соответствующими формулами обращения [8]:

$$\begin{aligned} U(x, t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \varphi G_1 \|G_i\|^{-2}, & W(x, t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \varphi G_2 \|G_i\|^{-2}, \\ \psi(x, t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \varphi G_3 \|G_i\|^{-2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь  $\|G_i\|^2$  — квадрат нормы вектор-функции ядра преобразования:

$$\|G_i\|^2 = \int_{l_1}^{l_2} p(x) [b_1 G_1^2(\lambda_i x) + b_2 G_2^2(\lambda_i x) + b_3 G_3^2(\lambda_i x)] dx,$$

$\lambda_i, i \in \mathbb{N}$  — вещественные параметры, образующие счётное множество;  $b_1, b_2, b_3$  — постоянные весовые коэффициенты;  $p(x)$  — весовая функция, определяемая с точностью до константы по коэффициентам при старших производных исходной системы уравнений (4) [8]:

$$p(x) = \exp \int \frac{1}{x} dx = x. \quad (11)$$

Выражение (9) представляет трансформанту (изображение), а формулы обращения (10) справедливы при выполнении условия ортогональности

$$\begin{aligned} \int_{l_1}^{l_2} p(x) [b_1 G_1(\lambda_i x) G_1(\lambda_j x) + b_2 G_2(\lambda_i x) G_2(\lambda_j x) + \\ + b_3 G_3(\lambda_i x) G_3(\lambda_j x)] dx = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j; \\ \|G_i\|^2, & \text{если } i = j. \end{cases} \end{aligned} \quad (12)$$

Применяя структурный алгоритм метода КИП [8], сначала умножаем первое, второе и третье уравнения (4), а также первое и четвёртое, второе и пятое, третье и шестое начальные условия (5) соответственно на  $pb_1 G_1, pb_2 G_2, pb_3 G_3$  и интегрируем в отрезке  $[l_1, l_2]$ . Выполняя квадратуры по частям для членов, содержащих производные по пространственной переменной  $x$ , а затем складывая уравнения и принимая во внимание соответствующие начальные условия и (11), имеем

$$\begin{aligned} \Phi(U, W, \psi, G_1, G_2, G_3) \Big|_{l_1}^{l_2} + \int_{l_1}^{l_2} x L^*(U, W, \psi, G_1, G_2, G_3) dx - \\ - \frac{d^2}{dt^2} \varphi(\lambda_i, t) = -P(\lambda_i, t). \end{aligned} \quad (13)$$

При  $t = 0$

$$\varphi(\lambda_i, 0) = \varphi_0(\lambda_i), \quad \frac{d}{dt} \varphi(\lambda_i, t) \Big|_{t=0} = \dot{\varphi}_0(\lambda_i), \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(U, W, \psi, G_1, G_2, G_3) = & \frac{b_1}{m^2} \left[ x \left( \frac{\partial U}{\partial x} G_1 - U G_1' \right) + \frac{1 + \nu + k^2}{\operatorname{tg} \theta} W G_1 \right] + \\ & + \frac{b_2}{m^2} k^2 \left[ x \left( \frac{\partial W}{\partial x} G_2 - W G_2' + \psi G_2 \right) - \frac{1 + \nu + k^2}{\operatorname{tg} \theta} k^{-2} U G_2 \right] + \\ & + \frac{b_3}{s^2} x \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} G_3 - \psi G_3' - \frac{k^2 C R_2^2}{D} W G_3 \right), \quad (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L^*(U, W, \psi, G_1, G_2, G_3) = & U \left[ \frac{b_1}{m^2} \left( G_1'' + \frac{1}{x} G_1' - \frac{1}{x^2} G_1 - \frac{k^2}{x^2 \operatorname{tg}^2 \theta} G_1 \right) + \right. \\ & + \frac{b_2}{m^2} \left( \frac{1 + \nu + k^2}{x \operatorname{tg}^2 \theta} G_2' - \frac{1 + \nu}{x^2 \operatorname{tg}^2 \theta} G_2 \right) + \left. \frac{b_3}{s^2} \frac{k^2 C R_2^2}{D x \operatorname{tg} \theta} G_3 \right] + \\ & + W \left[ \frac{k^2 b_2}{m^2} \left( G_2'' + \frac{1}{x} G_2' - \frac{1}{x^2} G_2 \right) - \frac{2(1 + \nu) k^{-2} - \operatorname{tg}^2 \theta}{x^2 \operatorname{tg}^2 \theta} G_2 \right] - \\ & - \frac{b_1}{m^2} \left( \frac{1 + \nu + k^2}{x \operatorname{tg} \theta} G_1' + \frac{1 + \nu}{x^2 \operatorname{tg} \theta} G_1 \right) + \frac{k^2 b_3}{s^2} \frac{C}{D} \left( G_3' + \frac{1}{x} G_3 \right) + \\ & + \psi \left[ \frac{b_3}{s^2} \left( G_3'' + \frac{1}{x} G_3' - \frac{1}{x^2} G_3 - \frac{k^2 C R_2^2}{D} G_3 \right) + \frac{b_1}{m^2} \frac{k^2}{x \operatorname{tg} \theta} G_1 - \frac{b_2}{m^2} k^2 G_2' \right]; \end{aligned}$$

$$\varphi_0(\lambda_i) = \int_{l_1}^{l_2} x \left[ b_1 U_0(x) G_1(\lambda_i, x) + b_2 W_0(x) G_2(\lambda_i, x) + b_3 \psi_0(x) G_3(\lambda_i x) \right] dx,$$

$$\dot{\varphi}_0(\lambda_i) = \int_{l_1}^{l_2} x \left[ b_1 \dot{U}_0(x) G_1(\lambda_i, x) + b_2 \dot{W}_0(x) G_2(\lambda_i, x) + b_3 \dot{\psi}_0(x) G_3(\lambda_i x) \right] dx;$$

$$\begin{aligned} P(\lambda_i, t) = & \int_{l_1}^{l_2} x \left[ \frac{b_1}{m^2} q_x(x, t) G_1(\lambda_i, x) + \frac{b_2}{m^2} q_z(x, t) G_2(\lambda_i, x) + \right. \\ & \left. + \frac{b_3}{s^2} \mu_x(x, t) G_3(\lambda_i x) \right] dx. \quad (16) \end{aligned}$$

Здесь штрих означает дифференцирование по переменной  $x$ .

Воспользуемся двумя условиями структурного алгоритма метода КИП [8], соответствующими рассматриваемой самосопряженной задаче. Первое представляет из себя равенство нулю полилинейной формы (15), а второе — операционные свойства

$$\Phi(U, W, \psi, G_1, G_2, G_3) \Big|_{l_1}^{l_2} = 0, \quad (17)$$

$$\int_{l_1}^{l_2} xL^*(U, W, \psi, G_1, G_2, G_3)dx = -\lambda_i^2 \int_{l_1}^{l_2} x(b_1UG_1 + b_2WG_2 + b_3\psi G_3)dx. \quad (18)$$

С помощью соотношений (17), (18) и обозначения трансформант (9), (16) равенство (13) превращается в уравнение для трансформанты  $\varphi(\lambda_i, t)$ . В соответствии с методом квазинормальных координат [9] в это уравнение вводятся силы упруго-вязкого сопротивления. Такой приём основан на экспериментально подтверждённом факте о том, что силы вязкого сопротивления практически не оказывают влияния на формы колебаний конструкции и их следует вводить в математическую модель после отделения пространственной переменной  $x$ . Обозначив через  $\gamma_i$  коэффициент потерь для каждой моды колебаний  $i, i \in \mathbb{N}$ , силу вязкого сопротивления (внутреннего трения), следуя скорректированной частотно-независимой гипотезе Фойхта, можно представить в виде [9]:

$$T(\lambda_i, t) = \gamma_i \lambda_i \frac{d\varphi(\lambda_i, t)}{dt}. \quad (19)$$

С учётом (19) уравнение (13) для трансформанты  $\varphi(\lambda_i, t)$  при начальных условиях (14) записывается так:

$$\frac{d^2\varphi(\lambda_i, t)}{dt^2} + \gamma_i \lambda_i \frac{d\varphi(\lambda_i, t)}{dt} + \lambda_i^2 \varphi(\lambda_i, t) = P(\lambda_i, t). \quad (20)$$

Решение (20) для произвольной правой части ищется методом вариации произвольных постоянных и с учётом (14) представляется следующим образом:

$$\varphi(\lambda_i, t) = e^{-\beta_i t} \left[ \varphi_0(\lambda_i) (\cos \alpha_i t + \frac{\beta_i}{\alpha_i} \sin \alpha_i t) + \frac{\dot{\varphi}_0(\lambda_i)}{\alpha_i} \sin \alpha_i t + \frac{1}{\alpha_i} \int_0^t P(\lambda_i, \tau) \cdot e^{\beta_i \tau} \sin \alpha_i (t - \tau) d\tau \right], \quad (21)$$

где

$$\alpha_i = |[\lambda_i^2(1 - 0,25\gamma_i^2)]^{1/2}|, \quad \beta_i = 0,5\gamma_i \lambda_i. \quad (22)$$

Возвращаясь к соотношениям (17), (18), замечаем, что из операционного свойства (18) следует сопряжённая с исходной система дифференциальных уравнений для  $G_1, G_2, G_3$ . Равенства

$$b_1 m^{-2} = b_2 m^{-2} = b_3 s^{-2} C R_2^2 D^{-1} = 1 \quad (23)$$

являются условием её инвариантности уравнениям (4) относительно КИП (9), (11) при соответствиях  $U \sim G_1, W \sim G_2, \psi \sim G_3, d^2/dt^2 \sim -\lambda_i^2$ .

Замечание 1. Соотношения (23) совместно с приведёнными ниже граничными условиями (25) являются критериями самосопряжённости рассматриваемой начально-краевой задачи (4)–(6) [8].

Таким образом, из (18) с учётом (23) следует система уравнений

$$G_1'' + \frac{1}{x} G_1' - \frac{1}{x^2} G_1 - \frac{k^2}{\text{tg}^2 \theta} \frac{1}{x^2} G_1 + \frac{1 + \nu + k^2}{\text{tg} \theta} \frac{1}{x} G_2' - \frac{1 + \nu}{\text{tg} \theta} \frac{1}{x^2} G_2 + \frac{k^2}{\text{tg} \theta} \frac{1}{x} G_3 + \lambda_i^2 m^2 G_1 = 0,$$

$$k^2 \left( G_2'' + \frac{1}{x} G_2' - \frac{1}{x^2} G_2 \right) - \frac{2(1+\nu) - k^2 \operatorname{tg}^2 \theta}{\operatorname{tg}^2 \theta} \frac{1}{x^2} G_2 - \frac{1+\nu + k^2}{\operatorname{tg} \theta} \frac{1}{x} G_1' - \\ - \frac{1+\nu}{\operatorname{tg} \theta} \frac{1}{x^2} G_1 + k^2 \left( G_3' + \frac{1}{x} G_3 \right) + \lambda_i^2 m^2 G_2 = 0, \quad (24)$$

$$G_3'' + \frac{1}{x} G_3' - \frac{1}{x^2} G_3 - \frac{k^2 C R_2^2}{D} G_3 + \frac{k^2 C R_2^2}{D} \frac{1}{\operatorname{tg} \theta} \frac{1}{x} G_1 - \frac{k^2 C R_2^2}{D} G_2' + \lambda_i^2 s^2 G_3 = 0.$$

Соотношения (17), (15) совместно с равенствами (6) формируют систему самосопряжённых граничных условий для компонентов ядра преобразования:

$$G_1 = 0, \quad G_2 = 0, \quad G_3' + \nu x^{-1} G_3 = \mp r_{11} G_3 \quad \text{при } x = l_1, l_2. \quad (25)$$

Отсюда следует, что рассматриваемая начально-краевая задача (4)–(6) является самосопряжённой, а компоненты  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$  удовлетворяют условию ортогональности (12) с весом (11) и справедливы формулы обращения (10).

Интегрирование системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами (24) является сложной задачей. Ниже формулируются условия её интегрируемости в цилиндрических функциях. Введём потенциалы  $U(\lambda_i, x)$ ,  $V(\lambda_i, x)$  по формулам

$$G_1 = U', \quad G_3 = k^2 V - G_2'. \quad (26)$$

Затем, усредняя коэффициенты, содержащие младшие производные, т. е. полагая  $x \operatorname{tg} \theta \simeq 0,5(R_1 + R_2) = R_c$ , систему дифференциальных уравнений (24) приводим к виду

$$(U'' + x^{-1}U')' - \frac{k^2}{R_c^2}U' + \frac{1+\nu}{R_c^2} \operatorname{tg} \theta (xG_2)' + \frac{1}{R_c}V' + \lambda_i^2 m^2 U' = 0,$$

$$\frac{1+\nu+k^2}{R_c}(U'' + x^{-1}U') - (V'' + x^{-1}V') - \frac{k^2 \operatorname{tg} \theta}{R_c^2}U' + \\ + \frac{2(1+\nu)}{R_c^2}G^2 + \lambda_i^2 m^2 G_2 = 0, \quad (27)$$

$$k^{-2}(V'' + x^{-1}V')' - (G_2'' + xG_2')' - \frac{C R_2^2}{D}V' + \frac{k^2 C R_2^2}{D R_c}U' + \\ + \lambda_i^2 s^2 k^{-2}V' - \lambda_i^2 s^2 G_2' = 0.$$

В процессе преобразований второго уравнения системы (27) к нему был добавлен и затем вычтен член  $k^2(\operatorname{tg} \theta)^{-1}x^{-2}U'$ .

Выполняя интегрирование уравнений (27), получаем с точностью до несущественных постоянных систему

$$\begin{aligned} \nabla^2 U + a_0 U + a_1 V + a_2 G_2 + a_{3i} U &= 0, \\ \nabla^2 V - a_4 \nabla^2 U + a_5 U' - a_6 G_2 - a_{3i} G_2 &= 0, \\ \nabla^2 V - a_7 \nabla^2 G_2 - a_8 V + a_9 U + a_{10i} V - a_{11i} G_2 &= 0, \end{aligned} \quad (28)$$



где  $\nabla^2 = \frac{d^2}{dx^2} + x^{-1} \frac{d}{dx}$ ,

$$\begin{aligned} a_0 &= -k^2 a_1^2, & a_1 &= R_C^{-1}, & a_2 &= (1 + \nu) a_1, \\ a_{3i} &= \lambda_i^2 m^2, & a_4 &= (1 + \nu + k^2) a_1, & a_5 &= k^2 \operatorname{tg} \theta a_1^2, \\ a_6 &= 2(1 + \nu) a_1^2, & a_7 &= k^2, & a_8 &= k^2 R_2^2 D^{-1}, \\ a_9 &= k^4 C R_2^2 (D R_C)^{-1}, & a_{10i} &= \lambda_i^2 s^2, & a_{11i} &= k^2 a_{10i}. \end{aligned} \quad (29)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Во втором уравнении (28), фактически, без потери точности можно пренебречь третьим слагаемым  $a_5 U'$  по сравнению с соответствующим слагаемым  $a_4 \nabla^2 U$  второго члена. Действительно,

$$a_5 U' = a_5 x x^{-1} U' = k^2 R_C^{-1} x^{-1} U', \quad a_4 x^{-1} U' = (1 + \nu + k^2) R_C^{-1} x^{-1} U'$$

и  $r = a_5 U' / a_4 x^{-1} U' \ll 1$ . Так, например, для стали ( $k_1 = 0,86$ ;  $\nu = 0,33$ )  $r = 0,178$ .

Дальнейшее решение системы (28) приводится для этого случая:

$$\begin{aligned} \nabla^2 U + a_{12i} U + a_1 V + a_2 G_2 &= 0, \\ \nabla^2 V - a_4 \nabla^2 U - a_{14i} G_2 &= 0, \\ \nabla^2 V - a_7 \nabla^2 G_2 - a_{15i} V + a_9 U - a_{11i} G_2 &= 0, \end{aligned} \quad (30)$$

где

$$a_{12i} = a_0 + a_{3i}, \quad a_{14i} = a_6 + a_{3i}, \quad a_{15i} = a_8 - a_{10i}. \quad (31)$$

Пользуясь вторым уравнением системы (30) и исключая из неё функцию  $G_2$ , получим

$$G_2 = a_{14i}^{-1} \nabla^2 V - a_4 a_{14i}^{-1} \nabla^2 U, \quad \nabla^2 G_2 = a_{14i}^{-1} \nabla^2 \nabla^2 V - a_4 a_{14i}^{-1} \nabla^2 \nabla^2 U. \quad (32)$$

Подстановка равенств (32) в (30) позволяет преобразовать её к виду

$$\begin{aligned} a_{16i} \nabla^2 U + a_{17i} \nabla^2 V + a_{12i} U + a_1 V &= 0, \\ a_{18i} \nabla^2 \nabla^2 U - a_{19i} \nabla^2 \nabla^2 V + a_{21i} \nabla^2 U + a_{20i} \nabla^2 V + a_9 U - a_{15i} V &= 0. \end{aligned} \quad (33)$$

где

$$\begin{aligned} a_{16i} &= 1 - a_2 a_4 a_{14i}^{-1}, & a_{17i} &= a_2 a_{14i}^{-1}, & a_{18i} &= a_7 a_4 a_{14i}^{-1}, \\ a_{19i} &= a_7 a_{14i}^{-1}, & a_{20i} &= 1 - a_{11i} a_{14i}^{-1}, & a_{21i} &= a_4 a_{11i} a_{14i}^{-1}. \end{aligned} \quad (34)$$

Выражая из первого уравнения (33) потенциал  $V$  и действуя затем на полученное равенство оператором  $\nabla^2$ , имеем

$$\begin{aligned} V &= -a_1^{-1} a_{17i} \nabla^2 V - a_1^{-1} a_{16i} \nabla^2 U - a_1^{-1} a_{12i} U, \\ \nabla^2 V &= -a_1^{-1} a_{17i} \nabla^2 \nabla^2 V - a_1^{-1} a_{16i} \nabla^2 \nabla^2 U - a_1^{-1} a_{12i} \nabla^2 U, \\ \nabla^2 \nabla^2 V &= -a_1^{-1} a_{17i} \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 V - a_1^{-1} a_{16i} \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 U - a_1^{-1} a_{12i} \nabla^2 \nabla^2 U. \end{aligned} \quad (35)$$

Производя обратные замены, подставляем последнее выражение во второе равенство (35), находим

$$\begin{aligned} \nabla^2 V &= a_1^{-2} a_{17i} \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 V + a_1^{-2} a_{16i} a_{17i} \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 U + \\ &+ a_1^{-1} (a_1^{-1} a_{12i} a_{17i} - a_{16i}) \nabla^2 \nabla^2 U - a_1^{-1} a_{12i} \nabla^2 U. \end{aligned} \quad (36)$$

Первое соотношение (35) с учётом (36) принимает вид

$$V = -a_1^{-3}a_{17i}\nabla^2\nabla^2\nabla^2V - a_1^{-3}a_{16i}a_{17i}^2\nabla^2\nabla^2\nabla^2U - \\ - a_1^{-2}a_{17i}(a_1^{-1}a_{12i}a_{17i} - a_{16i})\nabla^2\nabla^2U + a_1^{-1}(a_1^{-1}a_{12i}a_{17i} - a_{16i})\nabla^2U. \quad (37)$$

Подстановка последнего равенства (35), а также (36) и (37), во второе уравнение (33) позволяет получить

$$\nabla^2\nabla^2\nabla^2V = -a_{22i}^{-1}a_{23i}\nabla^2\nabla^2\nabla^2U - a_{22i}^{-1}a_{24i}\nabla^2\nabla^2U - a_{22i}^{-1}a_{25i}\nabla^2U + a_{22i}^{-1}a_{26i}U.$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_{22i} &= a_1^{-1}a_{17i}(a_{19i} + a_1^{-1}a_{20i} + a_1^{-2}a_{17i}a_{15i}), \\ a_{23i} &= a_1^{-1}a_{16i}(a_{19i} + a_1^{-1}a_{17i}a_{20i} + a_1^{-2}a_{17i}^2a_{15i}), \\ a_{24i} &= a_{18i} + a_1^{-1}[a_{19i}a_{12i} + (a_1^{-1}a_{12i}a_{17i} - a_{16i})(a_{20i} + a_1^{-1}a_{15i}a_{17i})], \\ a_{25i} &= a_{21i} - a_1^{-1}[a_{20i}a_{12i} - a_{15i}(a_1^{-1}a_{12i}a_{17i} - a_{16i})], \\ a_{26i} &= a_9 - a_1^{-1}a_{15i}a_{12i}. \end{aligned} \quad (38)$$

Выражение (38) совместно с последним соотношением (35) позволяет определить  $\nabla^2\nabla^2V$ :

$$\begin{aligned} \nabla^2\nabla^2V &= a_1^{-1}(a_{22i}^{-1}a_{17i}a_{23i} - a_{16i})\nabla^2\nabla^2\nabla^2U + \\ &+ a_1^{-1}(a_{22i}^{-1}a_{17i}a_{24i} - a_{12i})\nabla^2\nabla^2U + a_1^{-1}a_{22i}^{-1}a_{17i}a_{25i}\nabla^2U + \\ &+ a_1^{-1}a_{22i}^{-1}a_{17i}a_{26i}U. \end{aligned} \quad (39)$$

Подставляя, наконец, выражение (39) во второе соотношение (35), а затем полученное равенство в первое уравнение (35), окончательно находим

$$\begin{aligned} \nabla^2V &= -a_1^{-2}a_{17i}(a_{22i}^{-1}a_{17i}a_{23i} - a_{16i})\nabla^2\nabla^2\nabla^2U - \\ &- a_1^{-1}[a_1^{-1}a_{17i}(a_{22i}^{-1}a_{17i}a_{24i} - a_{12i}) + a_{16i}]\nabla^2\nabla^2U - \\ &+ a_1^{-1}(a_1^{-1}a_{22i}^{-1}a_{17i}a_{25i} + a_{12i})\nabla^2U, \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} V &= a_1^{-3}a_{17i}(a_{22i}^{-1}a_{17i}a_{23i} - a_{16i})\nabla^2\nabla^2\nabla^2U + \\ &+ a_1^{-2}a_{17i}[a_1^{-1}a_{17i}(a_{22i}^{-1}a_{17i}a_{24i} - a_{12i}) + a_{16i}]\nabla^2\nabla^2U + \\ &+ a_1^{-1}(a_1^{-2}a_{22i}^{-1}a_{17i}^2a_{23i} + a_1^{-1}a_{17i}a_{12i} - a_{16i})\nabla^2U + \\ &+ a_1^{-1}(a_1^{-2}a_{22i}^{-1}a_{17i}^3a_{26i} - a_{12i})U. \end{aligned} \quad (41)$$

В результате подстановки выражений (39)–(41) во второе равенство (33) окончательно получаем разрешающее дифференциальное уравнение для потенциала  $U$ :

$$\nabla^2\nabla^2\nabla^2U + b_{1i}\nabla^2\nabla^2U + b_{2i}\nabla^2U + b_{3i}U = 0, \quad (42)$$

где

$$b_{1i} = \{a_1^{-1}(a_{22i}^{-1}a_{17i}a_{23i} - a_{16i})[a_{19i} + a_1^{-1}a_{17i}(a_{20i} + a_1^{-1}a_{15i}a_{17i})]\}^{-1} \times$$

$$\times [a_1^{-1}(a_{22i}^{-1}a_{17i}a_{24i} - a_{12i})(a_{19i} + a_1^{-1}a_{20i}a_{17i} + a_1^{-2}a_{15i}a_{17i}^2) + a_1^{-1}a_{16i}(a_{20i} + a_1^{-1}a_{15i}a_{17i}) - a_{18i}],$$

$$b_{2i} = \{a_1^{-1}(a_{22i}^{-1}a_{17i}a_{23i} - a_{16i})[a_{19i} + a_1^{-1}a_{17i}(a_{20i} + a_1^{-1}a_{15i}a_{17i})]\}^{-1} \times \\ \times \{a_1^{-1}a_{22i}^{-1}a_{17i}[a_{19i}a_{25i} + a_1^{-1}a_{17i}(a_{20i}a_{25i} + a_1^{-1}a_{15i}a_{23i})] + \\ + a_1^{-1}[a_{20i}a_{12i} + a_{15i}(a_1^{-1}a_{17i}a_{12i} - a_{26i})] - a_{21i}\}, \quad (43)$$

$$b_{3i} = \{a_1^{-1}(a_{22i}^{-1}a_{17i}a_{23i} - a_{16i})[a_{19i} + a_1^{-1}a_{17i}(a_{20i} + a_1^{-1}a_{15i}a_{17i})]\}^{-1} \times \\ \times [a_1^{-1}a_{22i}^{-1}a_{17i}a_{26i}(a_{19i} + a_1^{-2}a_{17i}^2a_{15i}) - a_1^{-1}a_{15i}a_{12i} - a_9].$$

Вводим порождающее дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$\nabla^2 U = -\xi_{ik}^2 U, \quad k = 1, 2, \dots, 6, \quad i \in \mathbb{N}. \quad (44)$$

Из (44) следует

$$\nabla^2 \nabla^2 U = \xi_{ik}^4 U, \quad \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 U = -\xi_{ik}^6 U. \quad (45)$$

Используя (44), (45), уравнение (42) можно записать в виде

$$\xi_{ik}^6 - b_{1i}\xi_{ik}^4 + b_{2i}\xi_{ik}^2 - b_{3i} = 0. \quad (46)$$

Корни  $\eta_{ik} = \xi_{ik}^2$  ( $k = 1, 2, 3$ ) бикубического уравнения определяются по формулам Кардано. При этом берутся лишь положительные корни  $\xi_{ik}$ . Принимая во внимание дифференциальный оператор (29), замечаем, что (44) представляет собой уравнение Бесселя, и его решение для каждого  $\xi_{ik}$  записывается в виде

$$U(\lambda_{ik}, x) = C_{1k}^i J_0(\xi_{ik}x) + C_{2k}^i Y_0(\xi_{ik}x), \quad k = 1, 2, 3. \quad (47)$$

Поскольку системы уравнений (24) и соответственно (27) линейные, то потенциал  $U$  определяется в результате суммирования решений (47) по всем  $\xi_{ik}$ :

$$U(\lambda_i, x) = \sum_{k=1}^3 [C_{1k}^i J_0(\xi_{ik}x) + C_{2k}^i Y_0(\xi_{ik}x)]. \quad (48)$$

Здесь  $J_0(\xi_{ik}x)$ ,  $Y_0(\xi_{ik}x)$  — функции Бесселя нулевого порядка 1-го и 2-го рода;  $C_{1k}^i$ ,  $C_{2k}^i$  — произвольные постоянные интегрирования.

Для определения потенциала  $V$  воспользуемся равенством (41), уравнениями (44), (45) и общим решением (48):

$$V(\lambda_i, x) = \sum_{k=1}^3 (b_{5i}\xi_{ik}^4 - b_{4i}\xi_{ik}^6 + b_{7i} - b_{6i}\xi_{ik}^2)[C_{1k}J_0(\xi_{ik}x) + C_{2k}Y_0(\xi_{ik}x)].$$

Здесь

$$b_{4i} = a_1^{-3}a_{17i}^2(a_{22i}^{-1}a_{17i}a_{23i} - a_{16i}), \\ b_{5i} = a_1^{-2}a_{17i}[a_1^{-1}a_{17i}(a_{22i}^{-1}a_{17i}a_{24i} - a_{12i}) + a_{16i}], \\ b_{6i} = a_1^{-1}(a_1^{-2}a_{22i}^{-1}a_{17i}^2a_{23i} + a_1^{-1}a_{17i}a_{12i} - a_{16i}), \\ b_{7i} = a_1^{-1}(a_1^{-2}a_{22i}^{-1}a_{17i}^3a_{26i} - a_{12i}).$$

Если воспользоваться первым равенством (26), решением (48) и рекуррентными формулами дифференцирования функций Бесселя, то немедленно получаем компоненту  $G_1$  ядра преобразования:

$$G_1(\lambda_i, x) = - \sum_{k=1}^3 \xi_{ik} [C_{1k}^i J_1(\xi_{ik}x) + C_{2k}^i Y_1(\xi_{ik}x)], \quad (49)$$

где  $J_1(\xi_{ik}x)$ ,  $Y_1(\xi_{ik}x)$  — функции Бесселя первого порядка 1-го и 2-го рода. Используя первое равенство (32), а также соотношения (40), (44), (45) и решение (48), получаем выражение для компоненты  $G_2$ :

$$G_2(\lambda_i, x) = \sum_{k=1}^3 (b_{8i}\xi_{ik}^6 - b_{9i}\xi_{ik}^4 + b_{10i}\xi_{ik}^2 - b_{11i}) [C_{1k}^i J_0(\xi_{ik}x) + C_{2k}^i Y_0(\xi_{ik}x)], \quad (50)$$

где

$$\begin{aligned} b_{8i} &= a_1^{-2} a_{14i}^{-1} a_{17i} (a_{22i}^{-1} a_{17i} a_{23i} - a_{16i}), \\ b_{9i} &= a_1^{-1} a_{14i}^{-1} [a_1^{-1} a_{17i} (a_{22i}^{-1} - a_{17i} a_{24i} a_{12i}) + a_{16i}], \\ b_{10i} &= a_{14i}^{-1} [a_1^{-1} (a_1^{-1} a_{22i}^{-1} a_{17i}^2 a_{23i} + a_{12i}) + a_4], \\ b_{11i} &= a_1^{-2} a_{14i}^{-1} a_{22i}^{-1} a_{17i}^2 a_{26i}. \end{aligned}$$

При определении компоненты ядра преобразования  $G_3$  воспользуемся вторым равенством (26), а также представлением (50):

$$\begin{aligned} G_3(\lambda_i, x) &= \sum_{k=1}^3 \xi_{ik} [(b_{4i} + b_{8i}k^{-2})\xi_{ik}^6 - (b_{5i} + b_{9i}k^{-2})\xi_{ik}^4 + (b_{6i} + b_{10i}k^{-2})\xi_{ik}^2 - \\ &\quad - (b_{7i} + b_{11i}k^{-2})] [C_{1k}^i J_1(\xi_{ik}x) + C_{2k}^i Y_1(\xi_{ik}x)]. \end{aligned} \quad (51)$$

Дальнейшее решение связано с определением собственных значений  $\lambda_i$  и собственных функций  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$ , т. е. постоянных  $C_{1k}^i$ ,  $C_{2k}^i$ . В результате подстановки соотношений (49), (50), (51) в граничные условия (25) формируется однородная система алгебраических уравнений относительно  $C_{1k}^{(i)}$ ,  $C_{2k}^{(i)}$ :

$$\left\{ \begin{aligned} \delta_{11}^{(i)} C_{11}^i + \delta_{12}^{(i)} C_{12}^i + \cdots + \delta_{16}^{(i)} C_{23}^i &= 0, \\ \delta_{21}^{(i)} C_{11}^i + \delta_{22}^{(i)} C_{12}^i + \cdots + \delta_{26}^{(i)} C_{23}^i &= 0, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots & \\ \delta_{61}^{(i)} C_{11}^i + \delta_{62}^{(i)} C_{12}^i + \cdots + \delta_{66}^{(i)} C_{23}^i &= 0. \end{aligned} \right. \quad (52)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 \delta_{1j}^{(i)} &= \xi_{ik} J_1(\xi_{ik} l_1), \\
 \delta_{2j}^{(i)} &= (b_{8i} \xi_{ik}^6 - b_{9i} \xi_{ik}^4 + b_{10i} \xi_{ik}^2 - b_{11i}) J_0(\xi_{ik} l_1), \\
 \delta_{3j}^{(i)} &= B_{ik} [\xi_{ik} J_0(\xi_{ik} l_1) + (\nu l_1 + r_{11} - l_1^{-1}) J_1(\xi_{ik} l_1)], \\
 \delta_{4j}^{(i)} &= \xi_{ik} J_1(\xi_{ik} l_2), \\
 \delta_{5j}^{(i)} &= (b_{8i} \xi_{ik}^6 - b_{9i} \xi_{ik}^4 + b_{10i} \xi_{ik}^2 - b_{11i}) J_0(\xi_{ik} l_2), \\
 \delta_{6j}^{(i)} &= B_{ik} [\xi_{ik} J_0(\xi_{ik} l_2) + (\nu l_2 - r_{11} - l_1^{-1}) J_1(\xi_{ik} l_2)] \quad \text{при } j = 1, 2, 3; \\
 \delta_{1j}^i &= \xi_{ik} Y_1(\xi_{ik} l_1), \\
 \delta_{2j}^i &= (b_{8i} \xi_{ik}^6 - b_{9i} \xi_{ik}^4 + b_{10i} \xi_{ik}^2 - b_{11i}) Y_0(\xi_{ik} l_1), \\
 \delta_{3j}^{(i)} &= B_{ik} [\xi_{ik} Y_0(\xi_{ik} l_1) + (\nu l_1 + r_{11} - l_1^{-1}) Y_1(\xi_{ik} l_1)], \\
 \delta_{4j}^{(i)} &= \xi_{ik} Y_1(\xi_{ik} l_2), \\
 \delta_{5j}^{(i)} &= (b_{8i} \xi_{ik}^6 - b_{9i} \xi_{ik}^4 + b_{10i} \xi_{ik}^2 - b_{11i}) Y_0(\xi_{ik} l_2), \\
 \delta_{6j}^{(i)} &= B_{ik} [\xi_{ik} Y_0(\xi_{ik} l_2) + (\nu l_2 - r_{11} - l_2^{-1}) Y_1(\xi_{ik} l_2)] \quad \text{при } j = 4, 5, 6;
 \end{aligned} \tag{53}$$

$$B_{ik} = (b_{4i} + b_{8i} k^{-2}) \xi_{ik}^7 - (b_{5i} + b_{9i} k^{-2}) \xi_{ik}^5 + (b_{6i} + b_{10i} k^{-2}) \xi_{ik}^3 - (b_{7i} + b_{11i} k^{-2}) \xi_{ik}.$$

Для получения нетривиального решения системы (52) приравняем её главный детерминант нулю и получим трансцендентное уравнение для определения параметров  $\lambda_i$ :

$$D(\lambda_i) = \begin{vmatrix} \delta_{11}^{(i)} & \delta_{12}^{(i)} & \dots & \delta_{16}^{(i)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{61}^{(i)} & \delta_{62}^{(i)} & \dots & \delta_{66}^{(i)} \end{vmatrix} = 0. \tag{54}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Фактически (54) является частотным уравнением. Действительно, с учётом равенства (7) круговые частоты колебаний неоднородной оболочки  $\omega_i$  связаны с  $\lambda_i$ :

$$\omega_i = \frac{\lambda_i}{R_2} \sqrt{\frac{E_0}{\rho_0(1 - \nu^2)}}, \quad i = \mathbb{N}.$$

При определении  $\lambda_i$  и соответственно  $\omega_i$  организуется итерационный процесс решения трансцендентного уравнения (54) совместно с (46). На каждой итерации  $i$  задаётся  $\lambda_i$ ; по формулам (29), (31), (34), (38), (43) вычисляются коэффициенты  $a_{3i}$ ,  $a_{10i}$ ,  $a_{11i}$ ,  $a_{12i}$ ,  $a_{14i}$ ,  $a_{15i}$ ,  $a_{16i} - a_{26i}$ ,  $b_{1i}$ ,  $b_{2i}$ ,  $b_{3i}$  и корни  $\xi_{ik}$  ( $k = 1, 2, \dots, 6$ ) уравнения (46); по выражениям (53) находятся  $\delta_{1j}$ ,  $\delta_{2j}$ ,  $\dots$ ,  $\delta_{6j}$  ( $j = 1, 2, \dots, 6$ ), и проверяется удовлетворение уравнения (54). Затем этот цикл повторяется.

Отбрасывая последнее равенство (52), из оставшейся системы выражаем постоянные  $C_{11}^i$ ,  $C_{12}^i$ ,  $C_{13}^i$ ,  $C_{21}^i$ ,  $C_{22}^i$  через  $C_{23}^i$ :

$$\begin{aligned}
 C_{11}^i &= A_1^i A_6^{-1} C_{23}^i, & C_{12}^i &= A_2^i A_6^{-1} C_{23}^i, \\
 C_{13}^i &= A_3^i A_6^{-1} C_{23}^i, & C_{21}^i &= A_4^i A_6^{-1} C_{23}^i, \\
 C_{22}^i &= A_5^i A_6^{-1} C_{23}^i,
 \end{aligned}$$

где

$$A_6 = \begin{vmatrix} \delta_{11}^{(i)} & \delta_{12}^{(i)} & \dots & \delta_{15}^{(i)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{51}^{(i)} & \delta_{52}^{(i)} & \dots & \delta_{55}^{(i)} \end{vmatrix}.$$

Определители  $A_1^i, A_2^i, A_3^i, A_4^i, A_5^i$  получаются из  $A_6$  заменой в нём соответственно первого, второго, третьего, четвертого и пятого столбцов на столбец  $\| -\delta_{16}^{(i)} - \delta_{26}^{(i)} - \delta_{36}^{(i)} - \delta_{46}^{(i)} - \delta_{56}^{(i)} \|^\top$ . Не ограничивая общности рассуждений, принимаем  $C_{23}^i = A_6^i$ , откуда следует

$$C_{11}^i = A_1^i, \quad C_{12}^i = A_2^i, \quad C_{13}^i = A_3^i, \quad C_{21}^i = A_4^i, \quad C_{22}^i = A_5^i. \quad (55)$$

Формулы обращения (10) совместно с выражениями (21), (22) и (49), (50), (51), (55), а также трансцендентным уравнением (54) представляют общее решение рассматриваемой осесимметричной динамической задачи для неоднородной конической оболочки.

**Частные случаи. Результаты расчёта.** Рассмотрим некоторые частные случаи нагружения и закрепления торцов оболочки.

1. Пусть на коническую оболочку, находящуюся в положении равновесия

$$\begin{aligned} U_0(x) = W_0(x) = \psi_0(x) = \dot{U}_0(x) = \dot{W}_0(x) = \dot{\psi}_0(x) = 0, \\ \varphi_0(\lambda_i) = \dot{\varphi}_0(\lambda_i) = 0 \end{aligned} \quad (56)$$

действует внезапно приложенная равномерно распределённая по боковой поверхности нагрузка интенсивностью  $q^* = \text{const}$ :

$$q_z = qH(t), \quad q_x = \mu_x = 0. \quad (57)$$

Здесь  $H(t)$  — единичная функция Хэвисайда,  $q = q^* R_2 / C$ . Учитывая (9), а также выражения (11), (23), (56), (57), трансформанте КИП (21) можно придать вид

$$\varphi(\lambda_i, t) = q \alpha_i^{-1} e^{-\beta_i t} \left[ \int_{l_1}^{l_2} x G_2(\lambda_i x) dx \right] \int_0^t e^{\beta_i \tau} \sin \alpha_i (t - \tau) d\tau. \quad (58)$$

Вычисляя последовательно с учётом (49), (50), (51) квадратуры, содержащиеся в (58), получаем

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda_i, x) = q \sum_{k=1}^3 \xi_{ik}^2 a_{2i}^{-1} [(\xi_{ik}^2 - a_{2i}) a_1^{-1} - a_3] \times \\ \times \{ C_{1k}^i \xi_{ik}^{-1} [l_2 J_1(\xi_{ik} l_2) - l_1 J_1(\xi_{ik} l_1)] + C_{2k}^i \xi_{ik}^{-1} [l_2 Y_1(\xi_{ik} l_2) - l_1 Y_1(\xi_{ik} l_1)] \} \times \\ \times (\alpha_i^2 + \beta_i^2)^{-1} [1 - e^{-\beta_i t} (\beta_i \alpha_i^{-1} \sin \alpha_i t + \cos \alpha_i t)]. \end{aligned}$$

2. Действие на оболочку равномерно распределённой по поверхности вибрационной нагрузки. Имеем

$$q_z(x, t) = p \sin \Omega t, \quad (59)$$

где  $p$  — безразмерная амплитуда вибрационной нагрузки,  $\Omega$  — частота изменения полных циклов такого воздействия. Принимая во внимание (59) и повторяя приведённые выше преобразования, окончательно имеем

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda_i, t) = & \frac{p}{2} (\alpha_i \beta_i)^{-1} e^{-\beta_i t} \sum_{k=1}^3 \xi_{ik}^2 a_{2i}^{-1} [(\xi_{ik}^2 - a_{2i}) a_1^{-1} - a_3] \times \\ & \times \left[ C_{1k}^i \xi_{ik}^{-1} [l_2 J_1(\xi_{ik} l_2) - l_1 J_1(\xi_{ik} l_1)] + C_{2k}^i \xi_{ik}^{-1} [l_2 Y_1(\xi_{ik} l_2) - l_1 Y_1(\xi_{ik} l_1)] \right] \times \\ & \times \left[ e^{\beta_i \tau} [\beta_i^2 + (\Omega + \alpha_i)^2] \{ \beta_i \cos [(\Omega + \alpha_i) \tau - \alpha_i t] + \right. \\ & \left. + (\Omega + \alpha_i) \sin [(\Omega + \alpha_i) \tau - \alpha_i t] \} - e^{\beta_i \tau} [\beta_i^2 + (\Omega - \alpha_i)^2] \times \right. \\ & \left. \times \{ \beta_i \cos [(\Omega - \alpha_i) \tau + \alpha_i t] + (\Omega - \alpha_i) \sin [(\Omega - \alpha_i) \tau + \alpha_i t] \} \right]_{\tau=0}^{\tau=t} \end{aligned}$$

Аналогично могут быть рассмотрены и другие случаи загрузки оболочки.

Если проварьировать коэффициент жёсткости  $r_{11}$ , то можно исследовать различные идеализированные схемы закрепления торцов оболочки:

- 1) шарнирное закрепление торцов:  $x = H_1 \sec \theta, H_2 \sec \theta$  ( $x = l_1, l_2$ ); в этом случае в граничных условиях (25), а также в выражениях (53) для  $\delta_{1j}, \delta_{2j}, \dots, \delta_{6j}$  следует принять коэффициент жёсткости  $r_{11} = 0$ ;
- 2) жёсткое защемление по торцам конической оболочки; для подобных граничных условий необходимо разделить соответствующие уравнения (25) и выражения (53) на  $r_{11}$ , а затем осуществить предельные переходы при  $r_{11} \rightarrow \infty$ ;
- 3) если проделать описанную в пункте 1) процедуру для первых трёх уравнений (25) и соответствующих равенств (53) для  $\delta_{1j}^{(i)}, \delta_{2j}^{(i)}, \dots, \delta_{6j}^{(i)}$ ,  $j = 1, 2, 3$ , а затем приведённую в пункте 2) для оставшихся соотношений (25) и (53) для  $\delta_{1j}^{(i)}, \delta_{2j}^{(i)}, \dots, \delta_{6j}^{(i)}$ ,  $j = 4, 5, 6$ , то получим решение для случая шарнирно опертой оболочки на торце  $x = l_1$  и жёстко защемленной на краю  $x = l_2$ .

Наконец, если функции неоднородности  $f_1(z) = f_2(z) = 1$  и, следовательно, из (3)  $n_1 = n_2 = 1$ , а по равенствам (8) и формулам (29), (31), (34), (38) упрощаются выражения  $m_1, m_2, a_{li}$ , то построенное решение (10), (21), (49), (50), (51) справедливо для однородных конических оболочек.

В качестве модельного примера рассматривалась железобетонная коническая оболочка при действии на неё единичного равномерно распределённого внезапно приложенного воздействия  $q^* = 1$  кН/м<sup>2</sup> (57). Расчёты проводились при следующих данных:  $H^* = 60$  м,  $R_2^* = 23,13$  м,  $E_0 = 4,1 \cdot 10^{10}$  Па,  $\rho_0 = 2,85 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $\theta = 6^\circ$ ,  $R_1^* = 16,5$  м,  $\nu = 0,16$ ,  $h = 1,2$  м,  $k_1 = 0,86$ ,  $\gamma_i = 0,01$ ,  $r_{11} = 0$ .

Приняты линейные законы неоднородности, соответствующие частичной деградации материала оболочки:

$$f_1(z^*) = 0,5 \left( 1 + \frac{z^* + h_1}{h} \right), \quad f_2(z^*) = 0,75 + 0,25 \frac{z^* + h_1}{h},$$

при которых значения  $E$  и  $\rho$  на внешней поверхности оболочки  $z^* = h_2 = h - h_1$  сохраняются, т. е.  $E(h_2) = E_0$ ,  $\rho(h_2) = \rho_0$ .

В таблице приведены собственные значения  $\lambda_i$  и соответствующие им частоты (в герцах) свободных осесимметричных колебаний  $\omega_i(2\pi)^{-1}$  конической оболочки без учёта и с учётом наведённой неоднородности.

Тон колебаний $i$	Однородная оболочка		Неоднородная оболочка	
	$\lambda_i$	$(2\pi)^{-1}\omega_i$ , Гц	$\lambda_i$	$(2\pi)^{-1}\omega_i$ , Гц
1	0,662	17,52	0,583	15,43
2	0,942	24,46	0,672	17,79
3	0,957	25,33	0,782	20,68
4	1,273	33,68	0,961	25,42
5	1,448	38,71	1,017	26,91

Вследствие деградации конструкции при наведённой неоднородности происходит заметное снижение частот колебаний, а сам спектр становится более плотным. Аналогичная картина наблюдается на графиках, приведённых на рис. 2, характеризующих изменения частот первых пяти тонов колебаний  $\omega_i(2\pi)^{-1}$  в зависимости от относительной толщины  $h/R_2$  однородных и неоднородных оболочек. Сплошные линии на рис. 2 соответствуют однородным коническим оболочкам, а пунктирные — неоднородным; цифры соответствуют тонам колебаний.

На рис. 3 представлена осциллограмма нормальных перемещений  $W^*$  в сечении  $x^* = (H_1^* + H^*/2) \sec \theta$  оболочки при указанном выше воздействии. Следует отметить, что оболочка совершает затухающие колебания относительно

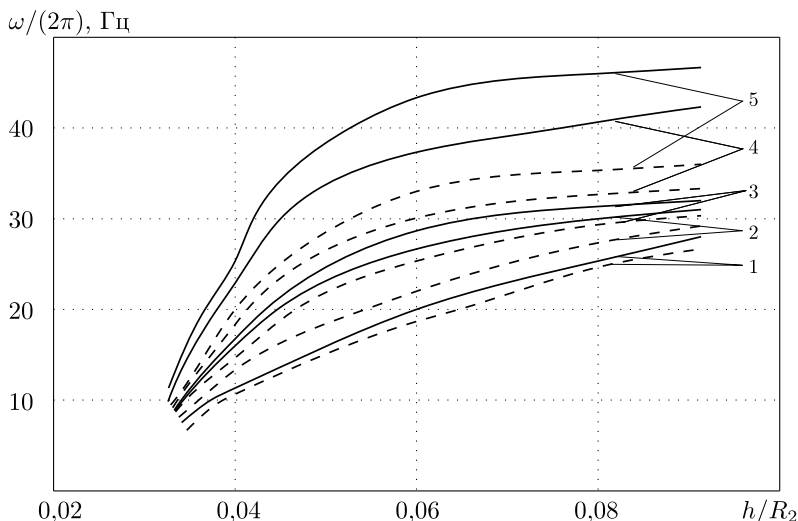


Рис. 2. Зависимость частот  $\omega_i(2\pi)^{-1}$  от относительной толщины  $h/R_2$  однородных и неоднородных конических оболочек



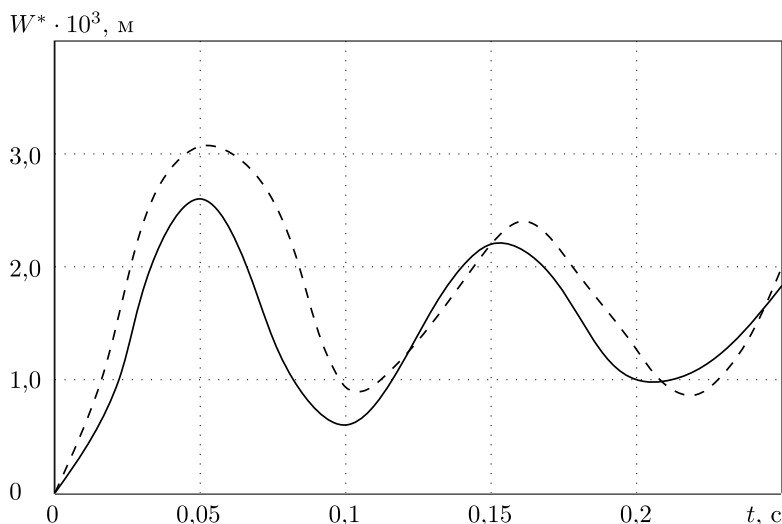


Рис. 3. Оциллограммы нормальных перемещений  $W^*$  в сечении посередине однородной и неоднородной оболочек

положения статического равновесия, не совпадающего с её первоначальным недеформированным состоянием. Как и следовало ожидать, при частичной деградации материала конструкции возрастают более чем на 15 % максимальные перемещения по сравнению с  $W_{\max}^*$  в однородных оболочках.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Петров В. В. Овчинников И. Г. Шихов Ю. М. Расчет элементов конструкций взаимодействующих с агрессивной средой. Саратов: Саратовск. гос. ун-т, 1987. 288 с. [Petrov V. V., Ovchinnikov I. G., Shikhov Yu. M. Design of Structural Elements in Corrosive Environment. Saratov: Saratovsk. Gos. Un-t, 1987. 288 pp.]
2. Сеницкий Ю. Э. Козьма И. Е. К решению осесимметричной динамической задачи для неоднородной по толщине цилиндрической оболочки с конечной сдвиговой жёсткостью // Изв. вузов. Строительство, 2005. №2. С. 8–18. [Senitskiy Yu. É., Koz'ma I. E. Towards the Solution of Axissymmetric Dynamic Problem for Nonhomogeneous in Thickness Cylindrical Shell with Finite Shearing Rigidity // Izv. Vuzov. Stroitel'stvo, 2005. no. 2. Pp. 8–18].
3. Сеницкий Ю. Э. Об интегрируемости начально-краевой задачи динамики для неоднородной пологой сферической оболочки // Вестник Самарск. ун-та, 1998. №2 (8). С. 106–121. [Senitskiy Yu. É. On the integrability of the dynamical initial-boundary value problem for an inhomogeneous shallow spherical shell // Vestnik Samarsk. Un-ta, 1998. no. 2 (8). Pp. 106–121].
4. Сеницкий Ю. Э. Динамика неоднородной непологой сферической оболочки // Изв. РАН. МТТ, 2002. №6. С. 144–157; англ. пер.: Senitskii Yu. E. Dynamics of inhomogeneous non-shallow spherical shells // Mech. Solids, 2002. Vol. 37, no. 6. Pp. 123–133.
5. Григолюк Э. И., Селезов И. Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек / Итоги науки и техн. Сер. Механика деформируемого твёрдого тел, Т. 5. М.: ВИНТИ, 1973. С. 5–199. [Grigolyuk E. I., Selezov I. T. Nonclassical Theories of Vibration of Beams, Plates, and Shells / Advances in Science and Technology. Mechanics of Deformable Solids, Vol. 5. Moscow: VINITI, 1973. Pp. 5–199].
6. Сеницкий Ю. Э. Уравнения движения неоднородных оболочек с конечной сдвиговой жесткостью // Изв. вузов. Строительство, 2002. №10. С. 19–27. [Senitskiy Yu. É.

The equations of motion of inhomogeneous shells with finite shear stiffness // *Izv. Vuzov. Stroitel'stvo*, 2002. no. 10. Pp. 19–27].

7. Сеницкий Ю. Э., Еленицкий Э. Я. О физически непротиворечивой модели уточненной теории пластин и оболочек // *Докл. РАН*, 1993. Т. 331, № 5. С. 580–582. [*Senitskiy Yu. É., Elenitskiy É. Ya.* On the physical consistent model refined theory of plates and shells // *Dokl. RAN*, 1993. Vol. 331, no. 5. Pp. 580–582].
8. Сеницкий Ю. Э. Исследование упругого деформирования элементов конструкций при динамических воздействиях методом конечных интегральных преобразований. Саратов.: Саратовск. гос. ун-т, 1985. 176 с. [*Senitskiy Yu. É.* Use of the Method of Finite Integral Transforms to Study the Elastic Deformation of Structural Elements under Dynamic Loads. Saratov: Saratovsk. Gos. Un-t, 1985. 176 pp.]
9. Цейтлин А. И., Кусаинов А. А. Методы учета внутреннего трения в динамических расчетах конструкций. Алма-Ата: Наука, 1987. 237 с. [*Tseitlin A. I., Kusainov A. A.* Methods for Taking into Account Internal Friction in Dynamic Problems for Structures. Alma-Ata: Nauka, 1987. 237 pp.]

Поступила в редакцию 19/XII/2011;  
в окончательном варианте — 20/I/2012.

MSC: 74K25; 74H99

## AXISYMMETRIC PROBLEM FOR INHOMOGENEOUS CONICAL SHELL

*Yu. É. Senitskiy*

Samara State University of Architecture and Civil Engineering,  
194, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443001, Russia.

E-mail: [senitskiy@mail.ru](mailto:senitskiy@mail.ru)

*New analytical solution of the axisymmetric dynamic problem for circular conical shells with inhomogeneous thickness and finite shear rigidity was developed on the basis of improved theory by generalized method of finite integral transformations. Arbitrary dynamic load for the shells with rigidly clamped edges is considered. Dissipative forces of viscous resistance are taken into account in the calculation. The stress state as well as dynamic characteristics of the shells depending on the degree of its heterogeneity is analyzed.*

**Key words:** *conical shell, inhomogeneous, improved theory, finite integral transformations, analytical solution, oscillation frequencies, oscillogram of moves.*

Original article submitted 19/XII/2011;  
revision submitted 20/I/2012.