

УДК 539.376

## МОДЕЛИРОВАНИЕ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ ПРОСТРАНСТВЕННО-АРМИРОВАННЫХ МЕТАЛЛОКОМПОЗИТОВ С УЧЁТОМ АНИЗОТРОПИИ ФАЗОВЫХ МАТЕРИАЛОВ

*А. П. Янковский*

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,  
630090, Россия, Новосибирск, ул. Институтская, 4/1.

E-mail: lab4nemir@rambler.ru

*Предложена итерационная модель, описывающая механическое поведение металлокомпозитных сред, перекрёстно армированных в пространстве, материалы компонентов которых работают в условиях установившейся анизотропной ползучести. Проведён сравнительный анализ расчётов, выполненных по разным структурным моделям механического поведения перекрёстно армированных в плоскости и в пространстве металлокомпозитов в условиях установившейся ползучести.*

**Ключевые слова:** *металлокомпозиты, армирование пространственное, установившаяся ползучесть, анизотропия, структурная теория.*

**Введение.** В последнее время особое внимание к себе привлекают композиционные материалы с пространственным расположением арматуры [1, 2 и др.]. Эффективность пространственного расположения арматуры определяется не только возможностью ликвидировать такой недостаток слоистых композитов как опасность расслоения вследствие слабого сопротивления межслойному сдвигу и поперечному отрыву, но и возможностью локализовать в пределах нескольких пространственных ячеек распространение трещин. Этим резко повышается несущая способность материала в толстостенных конструкциях, особенно в зонах приложения локализованных нагрузок и концентраторов напряжений при интенсивных термосиловых воздействиях, характерных для современных технических устройств [1]. При наличии таких воздействий конструкцию целесообразно изготавливать из металлокомпозитов, которые находят все более широкое применение на практике.

Известно, что при длительном термосиловом нагружении металлоконструкции большую часть времени эксплуатации работают в условиях установившейся ползучести [3], поэтому актуальной является проблема математического моделирования процессов ползучести в армированных металлокомпозитах. На сегодняшний день эта проблема находится, по сути, в зачаточном состоянии. Так, в работе [4] рассмотрена установившаяся ползучесть металлокомпозитов слоистой структуры; в [5] предложена модель ползучести однонаправленно армированного композита, но такие виды армирования редко встречаются на практике (как правило, в стержневых элементах конструкций); в [6] разработана модель механического поведения в условиях установившейся ползучести перекрёстно армированного в плоскости металлокомпозитного слоя с одномерным напряжённым состоянием в армирующих элемен-

---

*Андрей Петрович Янковский* (д.ф.-м.н., проф.), ведущий научный сотрудник, лаб. физики быстротекающих процессов.

тах, в рамках которой не учитываются напряжения в поперечном направлении в арматуре (как нормальные, так и касательные). Последнее обстоятельство как бы моделирует неидеальное сцепление арматуры со связующим, что нередко наблюдается на практике при перекрестном армировании. Современные же технологии позволяют создавать композиционные материалы с хорошей адгезией [5], близкой к идеальному механическому сцеплению.

Все указанные модели [4–6] базируются на предположении об изотропии материалов компонентов композиции. Однако известно, что при испытаниях на ползучесть анизотропия проявляется больше, чем при любом другом виде механических испытаний [3]. Анизотропия характеристик ползучести может быть не только связана с исходным состоянием материала, но и порождена кратковременными пластическими деформациями, возникающими при нагружении и предшествующими ползучести, а также может возникнуть на первой стадии ползучести, сопутствуя упрочнению.

В связи с указанными обстоятельствами настоящее исследование посвящено разработке модели механического поведения пространственно-армированных металлокомпозитов, работающих в условиях установившейся ползучести всех фазовых материалов, которые предполагаются анизотропными и в которых учитываются все компоненты напряжённого состояния.

**1. Итерационная модель пространственно-армированного металлокомпозита, работающего в условиях установившейся анизотропной ползучести.** Так как наличие арматуры с существенно разными механическими характеристиками значительно расширяет диапазон свойств композиционных материалов с пространственной схемой армирования [1], в глобальной декартовой системе координат  $(x_1, x_2, x_3)$  рассмотрим гибридный металлокомпозит, армированный в произвольных направлениях  $K$  семействами прямолинейных волокон (проволок) с относительным объёмным содержанием — плотностями (интенсивностями) армирования  $\omega_k$ ,  $1 \leq k \leq K$ . Относительное объёмное содержание связующего материала обозначим через  $\omega_0$ , тогда имеет место условие нормировки

$$\omega_0 + \sum_k \omega_k = 1, \quad \omega_0 > 0, \omega_k \geq 0, \quad 1 \leq k \leq K. \quad (1)$$

Здесь и далее суммирование осуществляется по указанному индексу от 1 до  $K$ , если не проставлены пределы.

Кроме условия нормировки (1) должны выполняться и физические условия взаимного непроникновения материалов различных компонентов композиции. Эти условия накладывают определенные ограничения на предельно допустимые значения суммарных плотностей армирования (на значения суммы в (1)) при плотной упаковке армирующих элементов. Так, в [1] приведены указанные предельные значения для некоторых структур пространственного армирования композитной среды, которые меньше единицы. Далее в настоящем исследовании предполагается, что эти ограничения на значения суммарных плотностей армирования выполняются. При построении модели механического поведения рассматриваемого металлокомпозита знание конкретных чисел  $\omega_k$  необязательно, важным является выполнение условия нормировки (1).

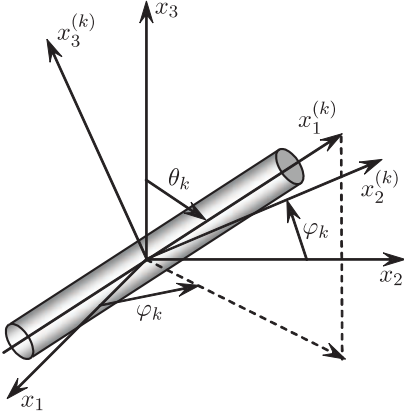


Рис. 1. Локальная система координат, связанная с арматурой  $k$ -того семейства

С каждым  $k$ -тым семейством арматуры свяжем свою локальную ортогональную систему координат  $(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)})$ ,  $1 \leq k \leq K$  так, чтобы ось  $x_1^{(k)}$  совпадала с направлением траекторий армирования этого семейства, а оси  $x_2^{(k)}, x_3^{(k)}$  были перпендикулярны этим траекториям (рис. 1). Направляющие косинусы (см. табл. 11.1 в [7]) между осями  $x_i^{(k)}$  и  $x_j$  обозначим как  $l_{ij}^{(k)}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ), для которых выполняются равенства

$$\sum_{j=1}^3 l_{ij}^{(k)} l_{ij}^{(k)} = \sum_{j=1}^3 l_{ji}^{(k)} l_{ji}^{(k)} = 1,$$

$$i = 1, 2, 3, 1 \leq k \leq K.$$

Все компоненты композиции предполагаются обладающими анизотропией ползучести, причем каждый  $k$ -тый фазовый материал в условиях ползучести характеризуется потенциалом ползучести  $\Phi_k(S_k, \Theta_k)$ , зависящим только от температуры  $\Theta_k$  и от одного квадратичного инварианта  $S_k$ , составленного из компонентов тензора напряжений  $\sigma_{ij}^{(k)}$  и компонентов некоторого тензора анизотропии четвертого ранга  $A_{ijklm}^{(k)}(\Theta_k)$ , также зависящего от температуры. Запишем этот инвариант следующим образом (см. стр. 283 в [3]):

$$S_k = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 A_{ijklm}^{(k)}(\Theta_k) \sigma_{ij}^{(k)} \sigma_{lm}^{(k)}, \quad 0 \leq k \leq K, \quad (2)$$

где

$$A_{ijklm}^{(k)} = A_{jilm}^{(k)} = A_{ijml}^{(k)} = A_{lmij}^{(k)}. \quad (3)$$

Скорости деформаций установившейся ползучести  $\xi_{ij}^{(k)}$  в  $k$ -том фазовом материале с учётом (2), (3) определяются так:

$$\xi_{ij}^{(k)} = \frac{\partial \Phi_k(S_k, \Theta_k)}{\partial S_k} \frac{\partial S_k}{\partial \sigma_{ij}^{(k)}} = 2\Phi'_k(S_k, \Theta_k) \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 A_{ijklm}^{(k)}(\Theta_k) \sigma_{lm}^{(k)}, \quad i, j=1, 2, 3, \quad (4)$$

где

$$\Phi'_k(S_k, \Theta_k) \equiv \frac{\partial \Phi_k(S_k, \Theta_k)}{\partial S_k}, \quad 0 \leq k \leq K.$$

Если дополнительно предполагается, что деформации ползучести удовлетворяют условию несжимаемости, то получим [3], что

$$\sum_{i=1}^3 A_{iilm}^{(k)} = \sum_{i=1}^3 A_{imil}^{(k)} = \sum_{i=1}^3 A_{lmii}^{(k)} = \sum_{i=1}^3 A_{mlii}^{(k)} = 0, \quad 0 \leq k \leq K. \quad (5)$$

Для удобства изложения (хотя это и не принципиально) характеристики анизотропии связующего ( $k = 0$ ) считаются заданными в глобальной системе координат  $(x_1, x_2, x_3)$ , а арматуры  $k$ -того семейства — в локальной системе  $(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}, 1 \leq k \leq K)$ . Определяющие соотношения установившейся ползучести для металлокомпозиции будем строить также в глобальной системе координат. В связи с этим далее чертой сверху будем обозначать величины, определенные в локальной системе координат  $(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)})$ , связанной с  $k$ -тым семейством волокон, а без черты — определенные в глобальной системе  $(x_1, x_2, x_3)$  (т.е. соотношения (2)–(5) записаны в глобальной системе; если же компоненты тензоров  $A_{ijlm}^{(k)}, \sigma_{lm}^{(k)}, \xi_{ij}^{(k)}$  снабдить сверху чертой, то получим запись соотношений (2)–(5) в  $k$ -той локальной системе,  $1 \leq k \leq K$ ).

Определяющие соотношения (4) в указанных системах отсчёта можно записать в матричной форме

$$\xi_0 = 2\Phi'_0(S_0, \Theta_0)A_0\sigma_0, \quad \bar{\xi}_k = 2\Phi'_k(S_k, \Theta_k)\bar{A}_k\bar{\sigma}_k, \quad 1 \leq k \leq K, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_0^* &= \left\{ \sigma_1^{(0)}, \sigma_2^{(0)}, \sigma_3^{(0)}, \sigma_4^{(0)}, \sigma_5^{(0)}, \sigma_6^{(0)} \right\} \equiv \left\{ \sigma_{11}^{(0)}, \sigma_{22}^{(0)}, \sigma_{33}^{(0)}, \sigma_{23}^{(0)}, \sigma_{31}^{(0)}, \sigma_{12}^{(0)} \right\}, \\ \xi_0^* &= \left\{ \xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \xi_3^{(0)}, \xi_4^{(0)}, \xi_5^{(0)}, \xi_6^{(0)} \right\} \equiv \left\{ \xi_{11}^{(0)}, \xi_{22}^{(0)}, \xi_{33}^{(0)}, \xi_{23}^{(0)}, \xi_{31}^{(0)}, \xi_{12}^{(0)} \right\}, \\ \bar{\sigma}_k^* &= \left\{ \bar{\sigma}_1^{(k)}, \bar{\sigma}_2^{(k)}, \bar{\sigma}_3^{(k)}, \bar{\sigma}_4^{(k)}, \bar{\sigma}_5^{(k)}, \bar{\sigma}_6^{(k)} \right\} \equiv \left\{ \bar{\sigma}_{11}^{(k)}, \bar{\sigma}_{22}^{(k)}, \bar{\sigma}_{33}^{(k)}, \bar{\sigma}_{23}^{(k)}, \bar{\sigma}_{31}^{(k)}, \bar{\sigma}_{12}^{(k)} \right\}, \\ \bar{\xi}_k^* &= \left\{ \bar{\xi}_1^{(k)}, \bar{\xi}_2^{(k)}, \bar{\xi}_3^{(k)}, \bar{\xi}_4^{(k)}, \bar{\xi}_5^{(k)}, \bar{\xi}_6^{(k)} \right\} \equiv \left\{ \bar{\xi}_{11}^{(k)}, \bar{\xi}_{22}^{(k)}, \bar{\xi}_{33}^{(k)}, \bar{\xi}_{23}^{(k)}, \bar{\xi}_{31}^{(k)}, \bar{\xi}_{12}^{(k)} \right\}; \end{aligned} \quad (7)$$

$A_0 = (a_{ij}^{(0)})$ ,  $\bar{A}_k = (\bar{a}_{ij}^{(k)})$  — (6×6)-матрицы (в общем случае несимметричные), элементы которых зависят от температуры и определяются компонентами тензоров анизотропии ползучести  $A_{ijlm}^{(0)}(\Theta_0)$ ,  $\bar{A}_{ijlm}^{(k)}(\Theta_k)$  (см. (4), (6), (7)):

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(0)} &= A_{ijij}^{(0)}, & a_{i4}^{(0)} &= 2A_{ii23}^{(0)}, & a_{i5}^{(0)} &= 2A_{ii31}^{(0)}, & a_{i6}^{(0)} &= 2A_{ii12}^{(0)}, \\ a_{4i}^{(0)} &= A_{23ii}^{(0)}, & a_{5i}^{(0)} &= A_{31ii}^{(0)}, & a_{6i}^{(0)} &= A_{12ii}^{(0)}, & a_{44}^{(0)} &= 2A_{2323}^{(0)}, \\ a_{45}^{(0)} &= 2A_{2331}^{(0)}, & a_{46}^{(0)} &= 2A_{2312}^{(0)}, & a_{54}^{(0)} &= 2A_{3123}^{(0)}, & a_{55}^{(0)} &= 2A_{3131}^{(0)}, \\ a_{56}^{(0)} &= 2A_{3112}^{(0)}, & a_{64}^{(0)} &= 2A_{1223}^{(0)}, & a_{65}^{(0)} &= 2A_{1231}^{(0)}, & a_{66}^{(0)} &= 2A_{1212}^{(0)}, \\ \bar{a}_{ij}^{(k)} &= \bar{A}_{ijij}^{(k)}, & \bar{a}_{i4}^{(k)} &= 2\bar{A}_{ii23}^{(k)}, & \bar{a}_{i5}^{(k)} &= 2\bar{A}_{ii31}^{(k)}, & \bar{a}_{i6}^{(k)} &= 2\bar{A}_{ii12}^{(k)}, \\ \bar{a}_{4i}^{(k)} &= \bar{A}_{23ii}^{(k)}, & \bar{a}_{5i}^{(k)} &= \bar{A}_{31ii}^{(k)}, & \bar{a}_{6i}^{(k)} &= \bar{A}_{12ii}^{(k)}, & \bar{a}_{44}^{(k)} &= 2\bar{A}_{2323}^{(k)}, \\ \bar{a}_{45}^{(k)} &= 2\bar{A}_{2331}^{(k)}, & \bar{a}_{46}^{(k)} &= 2\bar{A}_{2312}^{(k)}, & \bar{a}_{54}^{(k)} &= 2\bar{A}_{3123}^{(k)}, & \bar{a}_{55}^{(k)} &= 2\bar{A}_{3131}^{(k)}, \\ \bar{a}_{56}^{(k)} &= 2\bar{A}_{3112}^{(k)}, & \bar{a}_{64}^{(k)} &= 2\bar{A}_{1223}^{(k)}, & \bar{a}_{65}^{(k)} &= 2\bar{A}_{1231}^{(k)}, & \bar{a}_{66}^{(k)} &= 2\bar{A}_{1212}^{(k)}, \\ & & i, j &= 1, 2, 3, & 1 \leq k \leq K; \end{aligned} \quad (8)$$

$\sigma_0, \bar{\sigma}_k$  — шестикомпонентные вектор-столбцы напряжений в связующем и арматуре  $k$ -того семейства;  $\xi_0, \bar{\xi}_k$  — шестикомпонентные вектор-столбцы скоростей деформаций установившейся ползучести в тех же материалах соответственно (здесь в отличие от [7] для удобства изложения под компонентами  $\xi_4^{(0)}, \xi_5^{(0)}, \xi_6^{(0)}$  и  $\bar{\xi}_4^{(k)}, \bar{\xi}_5^{(k)}, \bar{\xi}_6^{(k)}$  векторов  $\xi_0, \bar{\xi}_k$  понимаются не полные сдвиговые скорости деформаций ползучести, а их половины, равные соответствующим

компонентам тензоров скоростей деформаций  $\xi_{23}^{(0)}$ ,  $\xi_{31}^{(0)}$ ,  $\xi_{12}^{(0)}$  и  $\bar{\xi}_{23}^{(k)}$ ,  $\bar{\xi}_{31}^{(k)}$ ,  $\bar{\xi}_{12}^{(k)}$ , что согласно (4), (6) и приводит к несимметричности матриц  $A_0$ ,  $A_k$  в случае общей анизотропии, см. (8)); звездочка означает операцию транспонирования.

Равенства (7) задают соответствия между шестью компонентами  $f_i^{(0)}$ ,  $\bar{f}_i^{(k)}$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ) некоторых векторов  $\mathbf{f}_0$ ,  $\bar{\mathbf{f}}_k$  и компонентами соответствующих симметричных тензоров второго ранга  $f_{ij}^{(0)}$ ,  $\bar{f}_{ij}^{(k)}$ ;  $i, j = 1, 2, 3$ ,  $1 \leq k \leq K$ .

В реальных материалах наличие текстуры, созданной при обработке, предполагает тот или иной вид симметрии свойств ползучести. Наиболее высокая степень симметрии наблюдается в образцах из пруткового материала или цилиндрических образцах, упрочненных путем растяжения вдоль оси [3]. Это обстоятельство относится и к армирующим металлическим проволокам. Учитывая, что ось волокна  $k$ -того семейства совпадает с направлением  $x_1^{(k)}$ , ненулевые компоненты симметричных в этом случае матриц  $\bar{A}_k$  при выполнении условий несжимаемости (5) имеют выражения (см. (69.4) в [3]):

$$\begin{aligned} \bar{a}_{11}^{(k)} &= 2/3, & \bar{a}_{1i}^{(k)} &= \bar{a}_{i1}^{(k)} = -1/3, \\ \bar{a}_{ii}^{(k)} &= (2 - \alpha_k)/3, & \bar{a}_{23}^{(k)} &= \bar{a}_{32}^{(k)} = (\alpha_k - 1)/3, \\ \bar{a}_{44}^{(k)} &= (3/2 - \alpha_k)/3, & \bar{a}_{55}^{(k)} &= \bar{a}_{66}^{(k)} = (3/2 - \beta_k)/3, \\ & & i &= 2, 3, \quad 1 \leq k \leq K, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\alpha_k = \alpha_k(\Theta_k)$ ,  $\beta_k = \beta_k(\Theta_k)$  — величины, характеризующие анизотропию ползучести моноотропных (трансверсально-изотропных) волокон. Случай изотропных волокон получается из (9), если положить  $\alpha_k = \beta_k = 0$ . Требование положительной определенности квадратичных форм  $S_k$  (см. (2)) с учётом (8), (9) приводит к следующим ограничениям [3]:  $\alpha_k < 3/2$ ,  $\beta_k < 3/2$ ,  $1 \leq k \leq K$ .

В случае моноотропных волокон, когда анизотропия ползучести в них определяется соотношениями (9), направляющие косинусы  $l_{ij}^{(k)}$  можно однозначно определить с помощью двух углов сферической системы координат (см. рис. 1): полярного расстояния  $\theta_k$  и долготы  $\varphi_k$ . При этом ось  $x_2^{(k)}$  удобно получить поворотом оси  $x_2$  на угол  $\varphi_k$  вокруг оси  $x_3$  (именно этот случай изображен на рис. 1), а направление оси  $x_3^{(k)}$  определяется векторным произведением ортов, задающих направления  $x_1^{(k)}$ ,  $x_2^{(k)}$ . Направляющие косинусы  $l_{ij}^{(k)}$  при таком задании локальной системы координат вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} l_{11}^{(k)} &= \sin \theta_k \cos \varphi_k, & l_{12}^{(k)} &= \sin \theta_k \sin \varphi_k, \\ l_{13}^{(k)} &= \cos \theta_k, & l_{21}^{(k)} &= -\sin \varphi_k, \\ l_{22}^{(k)} &= \cos \varphi_k, & l_{23}^{(k)} &= 0, \\ l_{31}^{(k)} &= -\cos \theta_k \cos \varphi_k, & l_{32}^{(k)} &= -\cos \theta_k \sin \varphi_k, \\ l_{33}^{(k)} &= \sin \theta_k, & & 1 \leq k \leq K. \end{aligned} \quad (10)$$

Соотношения (10) могут быть использованы и в случае общей анизотропии материалов арматуры, но тогда все компоненты тензора анизотропии ползучести  $A_{ijlm}^{(k)}$  волокон  $k$ -того семейства обязательно должны быть заданы именно в этой системе координат.

Так как установить фактическое распределение напряжений и скоростей деформаций ползучести в композитной среде, где основной материал имеет многочисленные более жесткие включения, весьма затруднительно, то при построении практически пригодных определяющих уравнений установившейся ползучести рассматриваемого металлокомпозита необходимо сделать некоторые допущения в виде исходных предпосылок.

1. Армированный материал представляет собой сплошное макроскопически квазиоднородное анизотропное тело. (При достаточно густом равномерном насыщении связующего арматурными стержнями или волокнами это предположение вполне допустимо. К этому выводу приходят все исследователи, изучающие механические свойства дисперсно-армированных сред [7].)
2. Между связующим и арматурой существует полное сцепление — идеальный термомеханический контакт.
3. В пределах представительного элемента, выделенного из композита на миниуровне, скорости деформаций ползучести, напряжения и температуры во всех компонентах и в композиции кусочно-постоянны. Эффектами высших порядков, связанными с изменением полей скоростей деформаций, напряжений и температур на микроуровне в малых окрестностях границ контакта связующего и волокон, пренебрегаем.
4. Усредненные поля скоростей деформаций ползучести, напряжений и температуры в композиции определяются по правилу простой смеси — пропорционально объёмному содержанию  $\omega_k$  каждого составляющего.
5. Все фазовые материалы однородны, а установившаяся анизотропная ползучесть в них описывается квазилинейными уравнениями (6) с учётом (7)–(9), (2), (3).
6. Соотношения (6) с учётом (7)–(9), (2), (3) удовлетворяют достаточным условиям сходимости метода последовательных приближений, аналогичного методу секущего модуля [8].
7. К рассматриваемому моменту времени деформации ползучести получили настолько значительное развитие, что по сравнению с ними можно пренебречь мгновенными упругими и пластическими деформациями [3, 8].

Так как при решении пространственных задач установившейся ползучести целесообразно использовать итерационный процесс, позволяющий линеаризовать определяющие соотношения (6) (или, что то же самое, (4)) и являющийся, по сути, обобщением метода секущего модуля, широко используемого в случае изотропной ползучести [8], в силу допущения 6 все дальнейшие рассуждения относятся к реализации этого метода. В случае изотропных фазовых материалов достаточные условия сходимости такого итерационного процесса известны (см. стр. 199 в [9]); в случае же анизотропной ползучести эти условия сходимости автору неизвестны, но на практике проверку сходимости такого метода можно контролировать в процессе решения конкретной задачи об установившейся ползучести пространственно-армированного металлокомпозита.

Согласно допущению 6 будем предполагать, что на некоторой  $n$ -ной итерации приближения для напряжений  $\sigma_{ij}^{(0)}$ ,  $\bar{\sigma}_{ij}^{(k)}$  и температуры  $\Theta_0$ ,  $\Theta_k$  во всех

компонентах композиции уже известны, т. е. в силу соотношений типа (2) известны приближения квадратичных форм  $S_0^n, S_k^n, 1 \leq k \leq K$ , а значит, следующие  $(n+1)$ -е приближения неизвестных векторных функций  $\xi_0^{n+1}, \xi_k^{n+1}$  и  $\sigma_0^{n+1}, \bar{\sigma}_k^{n+1}$  удовлетворяют линейным уравнениям (см. (6)):

$$\xi_0^{n+1} = 2\Phi'_0(S_0, \Theta_0)A_0 \sigma_0^{n+1}, \quad \xi_k^{n+1} = 2\Phi'_k(S_k, \Theta_k)\bar{A}_k \bar{\sigma}_k^{n+1}, \quad 1 \leq k \leq K. \quad (11)$$

В силу соотношений (11) и допущений 1, 6 определяющие уравнения установившейся ползучести для рассматриваемого металлокомпозиита на  $(n+1)$ -й итерации также можно записать в матричной форме:

$$\xi^{n+1} = A \sigma^{n+1}, \quad (12)$$

где  $\sigma, \xi$  — шестикомпонентные вектор-столбцы усредненных напряжений и скоростей деформаций установившейся ползучести в композиции, аналогичные  $\sigma_0, \xi_0$  в (7), где нужно отбросить индекс «0»;  $A = (a_{ij})$  —  $6 \times 6$ -матрица, компоненты которой подлежат определению на основе известных компонентов матриц  $2\Phi'_0(S_0, \Theta_0)A_0, 2\Phi'_k(S_k, \Theta_k)\bar{A}_k, 1 \leq k \leq K$ .

Далее в промежуточных формулах для сокращения записи будем опускать верхние индексы  $n$  и  $n+1$ , обозначающие номер итерации, памятуя о том, что в (11) значения квадратичных форм  $S_0, S_k$ , а значит и функций  $\Phi'_0, \Phi'_k, 1 \leq k \leq K$ , известны из решения на предыдущей  $n$ -ной итерации.

При переходе от глобальной системы координат  $x_l$  к локальной системе  $x_l^{(k)}$  имеют место преобразования тензоров второго ранга [7]

$$\bar{\sigma}_{ij}^{(k)} = \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 l_{il}^{(k)} l_{jm}^{(k)} \sigma_{lm}^{(k)}, \quad \bar{\xi}_{ij}^{(k)} = \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 l_{il}^{(k)} l_{jm}^{(k)} \xi_{lm}^{(k)}, \quad (13)$$

$$i, j = 1, 2, 3, \quad 1 \leq k \leq K,$$

которые с учётом (7) можно записать в матричной форме:

$$\bar{\sigma}_k = G_k \sigma_k, \quad \left( \bar{\sigma}_i^{(k)} = \sum_{j=1}^6 g_{ij}^{(k)} \sigma_j^{(k)} \right),$$

$$\bar{\xi}_k = G_k \xi_k, \quad \left( \bar{\xi}_i^{(k)} = \sum_{j=1}^6 g_{ij}^{(k)} \xi_j^{(k)} \right), \quad (14)$$

$$i = 1, 2, \dots, 6.$$

Обратные к (14) преобразования имеют вид

$$\sigma_k = G_k^{-1} \bar{\sigma}_k, \quad \xi_k = G_k^{-1} \bar{\xi}_k, \quad 1 \leq k \leq K, \quad (15)$$

где  $G_k^{-1}$  — матрица, обратная невырожденной  $(6 \times 6)$ -матрице  $G_k = (g_{ij}^{(k)})$  с компонентами

$$\begin{aligned} g_{11}^{(k)} &= l_{11}^{(k)} l_{11}^{(k)}, \\ g_{12}^{(k)} &= l_{12}^{(k)} l_{12}^{(k)}, \quad \dots, \\ g_{66}^{(k)} &= l_{11}^{(k)} l_{22}^{(k)} + l_{12}^{(k)} l_{21}^{(k)}, \\ &1 \leq k \leq K; \end{aligned} \quad (16)$$

остальные элементы  $g_{ij}^{(k)}$  матрицы  $G_k$  согласно (13) определяются табл. (21.40) в [7], в которой всем величинам нужно приписать верхний индекс  $k$  в скобках, как это сделано в (16);  $l_{ij}^{(k)}$  — направляющие косинусы (см. (10)); матрица  $G_k^{-1}$  совпадает с транспонированной матрицей (21.44) в [7].

В силу допущений 2, 7 и условий сопряжения полей напряжений, скоростей установившейся ползучести и температур на границах контакта арматуры со связующим имеем

$$\sum_{j=1}^3 \bar{\sigma}_{ji}^{(k)} \bar{n}_j^{(k)} = \sum_{j=1}^3 \bar{\sigma}_{ji}^{(0,k)} \bar{n}_j^{(k)}, \quad i = 1, 2, 3, \quad 1 \leq k \leq K; \quad (17)$$

$$\bar{\xi}_{11}^{(k)} = \bar{\xi}_{11}^{(0,k)} \Rightarrow \bar{\xi}_{11}^{(k)} = \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 l_{1l}^{(k)} l_{1m}^{(k)} \xi_{lm}^{(0)}, \quad 1 \leq k \leq K; \quad (18)$$

$$\Theta_0 = \Theta_k, \quad 1 \leq k \leq K, \quad (19)$$

где  $\bar{n}_j^{(k)}$  — компоненты единичного вектора  $\mathbf{n}_k$ , нормального к поверхности контакта волокна  $k$ -того семейства со связующим, заданные в локальной системе координат  $x_j^{(k)}$ ;  $\bar{\sigma}_{ij}^{(0,k)}$ ,  $\bar{\xi}_{11}^{(0,k)}$  — компоненты тензоров напряжений и скоростей деформаций ползучести в связующем, определенные в локальной системе координат  $x_l^{(k)}$ .

Так как волокна предполагаются постоянного поперечного сечения (что, как правило, и имеет место на практике), то в (17)  $\bar{n}_1^{(k)} = 0$ , поэтому, согласно допущению 3, соотношения (17) будут тождественно выполняться при произвольных  $\bar{n}_2^{(k)}$ ,  $\bar{n}_3^{(k)}$  (таких, что  $\bar{n}_2^{(k)2} + \bar{n}_3^{(k)2} = 1$ ), если выполняются следующие пять независимых равенств:

$$\bar{\sigma}_{ij}^{(k)} = \bar{\sigma}_{ij}^{(0,k)} \Rightarrow \bar{\sigma}_{ij}^{(k)} = \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 l_{il}^{(k)} l_{jm}^{(k)} \sigma_{lm}^{(0)}, \quad (20)$$

$$1 \leq k \leq K; \quad i, j = 1, 2, 3, \quad \text{кроме } i = j = 1.$$

Соотношения (17), (20) определяют статические условия контакта арматуры со связующим, а равенство (18) — кинематическое условие контакта, которое означает, что на поверхности контакта линейные скорости деформаций установившейся ползучести в направлении траектории армирования в волокне и в связующем совпадают, что справедливо в силу допущения 7.

Равенства (18), (20) перепишем с учётом соотношений (14) и соответ-



ствий (7):

$$\bar{\xi}_1^{(k)} = \sum_{j=1}^6 g_{1j}^{(k)} \xi_j^{(0)}, \quad 1 \leq k \leq K; \quad (21)$$

$$\bar{\sigma}_i^{(k)} = \sum_{j=1}^6 g_{ij}^{(k)} \sigma_j^{(0)}, \quad i = 2, 3, \dots, 6, \quad 1 \leq k \leq K. \quad (22)$$

В силу допущения 3 соотношения (21), (22) справедливы во всех точках представительного элемента.

Согласно допущениям 3, 4 усреднённые поля температуры  $\Theta$ , напряжений  $\sigma$  и скоростей деформаций ползучести  $\xi$  в композиции определяются так:

$$\Theta = \omega_0 \Theta_0 + \sum_k \omega_k \Theta_k; \quad (23)$$

$$\sigma = \omega_0 \sigma_0 + \sum_k \omega_k \sigma_k; \quad (24)$$

$$\xi = \omega_0 \xi_0 + \sum_k \omega_k \xi_k. \quad (25)$$

Соотношения (24), (25) записаны в глобальной системе координат  $x_l$ .

Из равенства (23) с учётом соотношений (19), (1) и допущения 3 следует

$$\Theta = \Theta_k = \Theta_0, \quad 1 \leq k \leq K, \quad (26)$$

т. е. средняя температура композита в пределах представительного элемента равна температуре каждого компонента композиции.

Из равенства (21) с учётом (6), (26) и допущения 5 вытекает

$$\Phi'_k(S_k, \Theta) \sum_{j=1}^6 \bar{a}_{1j}^{(k)} \bar{\sigma}_j^{(k)} = \Phi'_0(S_0, \Theta) \sum_{j=1}^6 g_{1j}^{(k)} \sum_{m=1}^6 a_{jm}^{(0)} \sigma_m^{(0)}, \quad 1 \leq k \leq K. \quad (27)$$

Систему шести равенств (22), (27) запишем в матричной форме:

$$B_k \bar{\sigma}_k = C_k \sigma_0, \quad 1 \leq k \leq K, \quad (28)$$

где ненулевые компоненты  $(6 \times 6)$ -матриц  $B_k = (b_{ij}^{(k)})$ ,  $C_k = (c_{ij}^{(k)})$  согласно (22), (27) определяются так:

$$\begin{aligned} b_{1j}^{(k)} &= \Phi'_k(S_k, \Theta) \bar{a}_{1j}^{(k)}, & c_{1j}^{(k)} &= \Phi'_0(S_0, \Theta) \sum_{m=1}^6 g_{1m}^{(k)} a_{mj}^{(0)}, \\ b_{ii}^{(k)} &= 1, & c_{ij}^{(k)} &= g_{ij}^{(k)}, \quad i = 2, 3, \dots, 6, \quad j = 1, 2, \dots, 6, \quad 1 \leq k \leq K. \end{aligned} \quad (29)$$

Значения функций  $\Phi'_0(S_0, \Theta)$ ,  $\Phi'_k(S_k, \Theta)$  согласно (11) предполагаются уже известными из решения на предыдущей  $n$ -ной итерации.

В силу соотношений (29) при ненулевом напряжённом состоянии в арматуре  $\det B_k \neq 0$ , поэтому из (28) получаем

$$\bar{\sigma}_k = E_k \sigma_0, \quad 1 \leq k \leq K, \quad (30)$$

где  $E_k$  —  $(6 \times 6)$ -матрица:

$$E_k = B_k^{-1} C_k; \quad (31)$$

$B_k^{-1}$  —  $(6 \times 6)$ -матрица, обратная  $B_k$ .

Соотношение (30) определяет на  $(n + 1)$ -й итерации напряжения в  $k$ -том семействе арматуры  $\bar{\sigma}_k$  через напряжения в связующем  $\sigma_0$ .

Подставим равенства (15) в (24), (25) и учтём (11), (30), (26), тогда будем иметь

$$\sigma = \left( \omega_0 I + \sum_k \omega_k G_k^{-1} E_k \right) \sigma_0; \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \xi &= 2\omega_0 \Phi'_0(S_0, \Theta) A_0 \sigma_0 + 2 \sum_k \omega_k \Phi'_k(S_k, \Theta) G_k^{-1} \bar{A}_k \bar{\sigma}_k = \\ &= 2 \left[ \omega_0 \Phi'_0(S_0, \Theta) A_0 + \sum_k \omega_k \Phi'_k(S_k, \Theta) G_k^{-1} \bar{A}_k E_k \right] \sigma_0, \end{aligned} \quad (33)$$

где  $I$  — единичная  $(6 \times 6)$ -матрица.

Из равенства (32) следует

$$\sigma_0 = H \sigma, \quad (34)$$

где  $H$  —  $(6 \times 6)$ -матрица:

$$H = \left( \omega_0 I + \sum_k \omega_k G_k^{-1} E_k \right)^{-1}. \quad (35)$$

Согласно (29), (31), (35) матрица  $H$  известна из решения на предыдущей  $n$ -ной итерации, поэтому равенство (34) определяет на  $(n + 1)$ -й итерации напряжения в связующем  $\sigma_0$  через усреднённые напряжения в композиции  $\sigma$ .

Подставим выражение (34) в соотношение (33) и восстановим верхние индексы  $n$  и  $n + 1$ , тогда окончательно получим матричное равенство

$$\xi^{n+1} = 2 \left[ \omega_0 \Phi'_0(\overset{n}{S}_0, \Theta) A_0 + \sum_k \omega_k \Phi'_k(\overset{n}{S}_k, \Theta) G_k^{-1} \bar{A}_k \overset{n}{E}_k \right] \overset{n}{H} \overset{n+1}{\sigma}. \quad (36)$$

Из сравнения равенств (12) и (36) получаем выражение для искомой матрицы:

$$\overset{n}{A} = 2 \left[ \omega_0 \Phi'_0(\overset{n}{S}_0, \Theta) A_0 + \sum_k \omega_k \Phi'_k(\overset{n}{S}_k, \Theta) G_k^{-1} \bar{A}_k \overset{n}{E}_k \right] \overset{n}{H}, \quad (37)$$

где нужно учесть выражения для  $(6 \times 6)$ -матриц (35), (31), (29), (16), (8), (9) и для направляющих косинусов (10).

Покажем, как метод последовательных приближений может быть реализован в рамках предложенной модели механического поведения пространственно-армированного металлокомпозиата, работающего в условиях установившейся анизотропной ползучести. Пусть на некоторой  $n$ -ной итерации известны приближения напряжений  $\sigma_0^n, \sigma_k^n, 1 \leq k \leq K$ , во всех компонентах композиции, тогда согласно (37), (35), (31), (29), (8), (9), (26) известны компоненты матрицы  $A$  на этой итерации. Пусть, кроме того, из решения соответствующей граничной задачи с учётом линейных определяющих соотношений (12), где матрица  $A$  уже известна, найдены  $(n + 1)$ -е приближения средних напряжений в композиции  $\sigma^{n+1}$ . Тогда из равенств (34), (30) с учётом (35), (31) последовательно можем определить следующие приближения напряжений  $\sigma_0^{n+1}, \sigma_k^{n+1}, 1 \leq k \leq K$ , во всех компонентах композиции, после чего на  $(n + 1)$ -й итерации во всех фазовых материалах можем определить значения квадратичных форм  $S_0^{n+1}, S_k^{n+1}$  (см. (2) с учётом (7), (8)). Зная на  $(n + 1)$ -й итерации  $S_0^{n+1}, S_k^{n+1}, 1 \leq k \leq K$ , можем определить новые приближения для компонентов матриц  $B_k^{n+1}, C_k^{n+1}, E_k^{n+1}$  (см. (29), (31)) и повторить весь алгоритм для получения следующего  $(n + 2)$ -ого приближения решения и т. д., пока итерационный процесс не сойдётся с требуемой точностью.

Таким образом, соотношения (12) с учётом равенств (37), (35), (31), (29) характеризуют в матричной форме определяющие уравнения установившейся анизотропной ползучести пространственно-армированного металлокомпозиата при реализации метода последовательных приближений.

В общем случае, если деформации ползучести сопровождаются неупругой дилатацией, т. е.  $\xi_{11}^{(k)} + \xi_{22}^{(k)} + \xi_{33}^{(k)} = \xi_1^{(k)} + \xi_2^{(k)} + \xi_3^{(k)} \neq 0, 0 \leq k \leq K$  (не выполняются равенства (5)), определяющие соотношения (12) на каждой итерации можно однозначно разрешить относительно напряжений  $\sigma^{n+1} = A^{-1} \xi^{n+1}$ . Используя при этом соответствия типа (7) и дифференциальные соотношения Коши [3, 8]

$$\xi_{ij}^{n+1} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i^{n+1}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^{n+1}}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3,$$

где  $v_i^{n+1}$  —  $(n + 1)$ -е приближение скорости установившейся ползучести произвольной точки эквивалентной среды в направлении  $x_i$ , можно ставить краевые задачи для металлокомпозиатного тела в кинематических переменных — скоростях ползучести  $v_i, i = 1, 2, 3$ .

Однако из экспериментов известно, что дилатация неупругих деформаций, как правило, пренебрежимо мала [3, 8, 9], поэтому при изучении установившейся ползучести металлов обычно принимают условие несжимаемости [3, 8]

$$\xi_{11}^{(k)} + \xi_{22}^{(k)} + \xi_{33}^{(k)} = \xi_1^{(k)} + \xi_2^{(k)} + \xi_3^{(k)} = 0, \quad 0 \leq k \leq K. \quad (38)$$

Согласно (1), (25), (38) и допущениям 3, 4, несжимаемостью обладает

и материал композиции:

$$\xi_{11}^{n+1} + \xi_{22}^{n+1} + \xi_{33}^{n+1} = \xi_1^{n+1} + \xi_2^{n+1} + \xi_3^{n+1} = 0,$$

откуда с учётом соответствий типа (7) вытекает линейная зависимость первых трёх уравнений в системе (12). Следовательно, в случае (38) (при выполнении равенств (5), (9)) систему (12) нельзя на каждой итерации однозначно разрешить относительно  $(n + 1)$ -х приближений напряжений в композиции  $\sigma^{n+1}$ , а значит, при выполнении равенств (38), (5), (9) предложенная модель механического поведения пространственно-армированного металлокомпозиата, работающего в условиях установившейся ползучести, при выполнении допущения 7 может быть использована на практике лишь в тех задачах, которые допускают решение в напряжениях  $\sigma_{ij}$ , а не в кинематических переменных — скоростях ползучести  $v_i$ . Однако в реальности большинство конструкций имеют такие типы закрепления и нагружения, что соответствующие граничные задачи для них нужно решать в кинематических переменных, и предложенная модель в этих случаях малоприменима, когда имеют место равенства (38), (5), (9).

Если отказаться от выполнения допущения 7 и учитывать упругие (или упругопластические) деформации в компонентах композиции, то придётся рассматривать, по сути, неустановившуюся ползучесть этих материалов [3] и композиции в целом. При этом вместо равенства (18) нужно использовать соотношение

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_{11}^{(k)} + \dot{\bar{e}}_{11}^{(k)} &= \bar{\xi}_{11}^{(0,k)} + \dot{\bar{e}}_{11}^{(0,k)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \bar{\xi}_{11}^{(k)} + \dot{\bar{e}}_{11}^{(k)} = \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 l_{1l}^{(k)} l_{1m}^{(k)} \left( \xi_{lm}^{(0)} + \dot{e}_{lm}^{(0)} \right), \quad 1 \leq k \leq K, \end{aligned} \quad (39)$$

где  $\dot{e}_{lm}^{(0)}$ ,  $\dot{\bar{e}}_{11}^{(k)}$  — скорости упругих деформаций в компонентах композиции;  $\dot{\bar{e}}_{11}^{(0,k)}$  — скорость упругих деформаций в связующем в направлении  $x_1^{(k)}$  — в направлении траектории армирования волокнами  $k$ -того семейства.

Используя закон Гука, в (39) следует выразить  $\dot{\bar{e}}_{11}^{(k)}$ ,  $\dot{e}_{lm}^{(0)}$  через скорости напряжений  $\dot{\bar{\sigma}}_{ij}^{(k)}$ ,  $\dot{\sigma}_{ij}^{(0)}$  соответственно, после чего получим зависимость, содержащую в явном виде производные по времени от  $\bar{\sigma}_{ij}^{(k)}$ ,  $\sigma_{ij}^{(0)}$ , поэтому предложенный выше подход к моделированию механического поведения пространственно-армированного металлокомпозиата в условиях неустановившейся анизотропной ползучести становится не приемлемым. Моделирование же неустановившейся ползучести металлокомпозиатов выходит за рамки настоящего исследования.

**2. Сравнительный анализ моделей установившейся ползучести перекрестно армированных металлокомпозиатов.** Автору неизвестны экспериментальные данные по установившейся ползучести металлокомпозиатов перекрестной структуры, поэтому верификацию предложенной модели можно провести лишь косвенно. Известно, что в изотропном случае определяющие квазилинейные уравнения теории установившейся ползучести, использованные

в п. 1, и деформационной теории пластичности формально полностью совпадают [3, 8, 9] (если вместо скоростей деформаций ползучести понимать просто деформации). Частным же случаем определяющих уравнений деформационной теории является закон Гука. Поэтому если при моделировании упругого поведения перекрестно армированного композита на основе допущений, аналогичных использованным в настоящем исследовании, удастся получить расчётные значения эффективных упругих характеристик композиции, удовлетворительно согласующиеся с экспериментом, то тем самым получим косвенное подтверждение приемлемости исходных гипотез данного исследования и модели, построенной на их основе. В работах [10–12] автором были предложены модели упругого поведения однонаправленно и перекрестно армированных гибридных 2D- и 3D-композитов, основанные на исходных предположениях, аналогичных использованным в настоящем исследовании. В работах же [11, 13, 14] продемонстрировано, что расчётные значения эффективных упругих характеристик, определенные по этим моделям, удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными. Это обстоятельство позволяет доверительно относиться к исходным допущениям, использованным в данном исследовании, и к модели, построенной на их основе. Окончательный же вывод о приемлемости этой модели может быть сделан лишь после проведения серии соответствующих экспериментальных испытаний об установившейся ползучести перекрестно армированных металлокомпозитов.

В настоящем же пункте проведём сравнение механического поведения перекрестно армированных в плоскости (2D) и в пространстве (3D) металлокомпозитов в условиях установившейся ползучести, рассчитанного (поведения) на основе разных структурных моделей: 1) модели, предложенной в п. 1; 2) модели Ю. В. Немировского с одномерным напряжённым состоянием в волокнах [6].

С этой целью рассмотрим два образца. Первый образец-полоска выполнен из меди (Cu) и ортогонально армирован в плоскости  $(x_1, x_2)$  двумя семействами стальной проволоки У8А ( $K = 2$ ) под углами  $\varphi_1 = \text{const}$ ,  $\varphi_2 = \varphi_1 - \pi/2 = \text{const}$  ( $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$ , см. (10)) с плотностями  $\omega_1 = \omega_2 = 0,128$ . Образец нагружен растягивающим напряжением  $\sigma_{11} = 1$  ГПа, остальные напряжения равны нулю (рис. 2). Образцы-полоски такого типа, как правило, используются при испытаниях армированных композитов на растяжение [15].

Второй 3D-образец также выполнен из меди и пространственно армирован в трёх ( $K = 3$ ) ортогональных направлениях проволокой У8А с плотностями  $\omega_1 = \omega_2 = 0,128$ ,  $\omega_3 = 0,333$  (при этом суммарная плотность армирования  $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0,589$  соответствует структуре с плотной упаковкой,

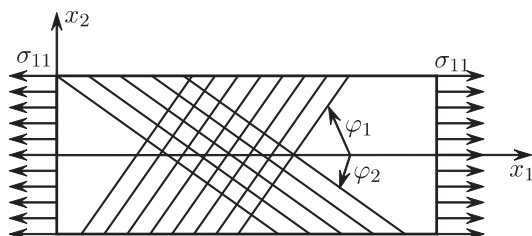


Рис. 2. Расчётная схема армированного образца

см. табл. 1.2 в [1]). Направления армирования определяются углами сферической системы координат (см. (10)):  $\theta_1 = \pi/2$ ,  $\varphi_1 = \text{const}$ ,  $\theta_2 = \pi/2$ ,  $\varphi_2 = \varphi_1 - \pi/2 = \text{const}$ ,  $\theta_3 = \varphi_3 = 0$ , т.е. два первых семейства проволок У8А уложены так, как изображено на рис. 2, а третье семейство армирования перпендикулярно плоскости этого рисунка. Второй образец нагружен так же, как и первый.

Образцы рассчитываются при температуре  $\Theta \approx 200$  °С, при которой характеристики степенного закона установившейся ползучести  $\xi_k = b_k \sigma^{m_k}$  ( $0 \leq k \leq K$ ) для материалов компонентов композиции, которые предполагаются изотропными, имеют значения:

$$\begin{array}{l} \text{Cu} \quad [16]: \quad m_0 = 2,16, \quad b_0 = 5,63 \cdot 10^{-9} \text{ (МПа)}^{-m_0} \cdot \text{ч}^{-1}, \\ \text{У8А} \quad [15]: \quad m_1 = 24,98, \quad b_1 = 1,054 \cdot 10^{-84} \text{ (МПа)}^{-m_1} \cdot \text{ч}^{-1}. \end{array} \quad (40)$$

(В изотропном случае квадратичные формы (2) с учётом (3), (8), (9) при  $\alpha_k = \beta_k = 0$  пропорциональны второму инварианту тензора напряжений в  $k$ -том компоненте композиции, а потенциалы ползучести  $\Phi_k(S_k, \Theta_k)$ ,  $0 \leq k \leq K$ , определяются соотношениями (68.1) в [3] с учётом (26), (40).)

На рис. 3, 4 изображены зависимости усредненных скоростей деформаций установившейся ползучести  $\xi_{ij}$  рассматриваемых металлокомпозитных 2D- (рис. 3) и 3D-образцов (рис. 4) от угла армирования первым семейством волокон  $\varphi_1$  (см. рис. 2). На этих рисунках кривые 1 характеризуют зависимости  $\xi_{11}(\varphi_1)$ , линии 2 —  $\xi_{22}(\varphi_1)$ , кривые 3 —  $\xi_{33}(\varphi_1)$ , линии 4 —  $\xi_{12}(\varphi_1)$  ( $\xi_{13} \equiv \xi_{23} \equiv 0$ ). Кривые 5 определяют зависимость интенсивности скоростей деформаций сдвига  $H$  (см. (12.11) в [8]) в композиции от угла армирования  $\varphi_1$ . На рис. 3, а и 4, а представлены результаты расчётов по структурной модели, предложенной в п. 1, а на рис. 3, б и 4, б — по модели Ю. В. Немировского [6].

Структурные соотношения установившейся ползучести перекрестно армированного слоя 2D-металлокомпозита, соответствующие модели Ю. В. Немировского при плоском напряжённом состоянии, приведены в [17] (см. там формулы (3), (4), (7)). Эти структурные соотношения элементарно обобщаются на случай пространственного армирования 3D-композита [18]. Следует лишь использовать определяющие соотношения для трехмерного напряжённого состояния в связующем, а под направляющими косинусами  $l_{ik}$  в формуле (3) из [17] понимать  $l_{1i}^{(k)}$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $1 \leq k \leq K$ , принятые в настоящем исследовании (см. (10)).

Из шести условий сопряжения полей перемещений и напряжений на границах контакта волокон со связующим (21), (22) (тождественных (18), (20)) в модели из [6, 17, 18] используется только кинематическое соотношение (21) (или, что то же самое, (18)). Статические же условия контакта (22) вообще не используются, поэтому в рамках этой модели получаются достаточно простые структурные соотношения, но, как уже отмечалось во введении, напряжённое состояние в волокнах в поперечном направлении при этом не учитывается, а значит невозможно учесть и анизотропию ползучести в арматуре, так как при этом в (2) все напряжения кроме  $\sigma_{11}^{(k)}$ ,  $1 \leq k \leq K$ , принимаются тождественно равными нулю. В силу указанных обстоятельств при некоторых углах рассогласования направлений армирования и нагружения усиливающие волокна как бы не участвуют в работе композита при его деформировании, и в этих

случаях большую часть нагрузки принимает на себя связующее, которое при этом как бы ослаблено наличием неработающей (или частично работающей) арматуры. Результатом этого явился тот факт, что максимальные по модулю значения ординат точек кривых на рис. 3, б почти вдвое больше, чем на рис. 3, а; на рис. 4, б — почти в шесть раз больше, чем на рис. 4, а. (Качественное поведение кривых с одинаковыми номерами на рис. 3, 4 подобно, различие заключается лишь в значениях ординат точек на этих кривых.)

В рамках же модели, предложенной в п. 1 настоящего исследования, учитываются все условия сопряжения (21), (22) на поверхностях контакта арматуры со связующим, что соответствует идеальной адгезии и приводит к меньшей расчётной податливости металлокомпозита в условиях установившейся ползучести по сравнению с расчётом по модели Ю. В. Немировского [6, 17, 18].

Расчёт изотропного образца из меди согласно (40) приводит к значению  $\xi_{11} = b_0 \sigma_{11}^{m_0} = 17 \cdot 10^{-3} \text{ ч}^{-1}$ , что на несколько порядков больше значений ординат точек на кривых 1 рис. 3, 4. Следовательно, в рассматриваемом случае обе структурные модели предсказывают, что армирование образца проволокой У8А приводит к существенному снижению его податливости в

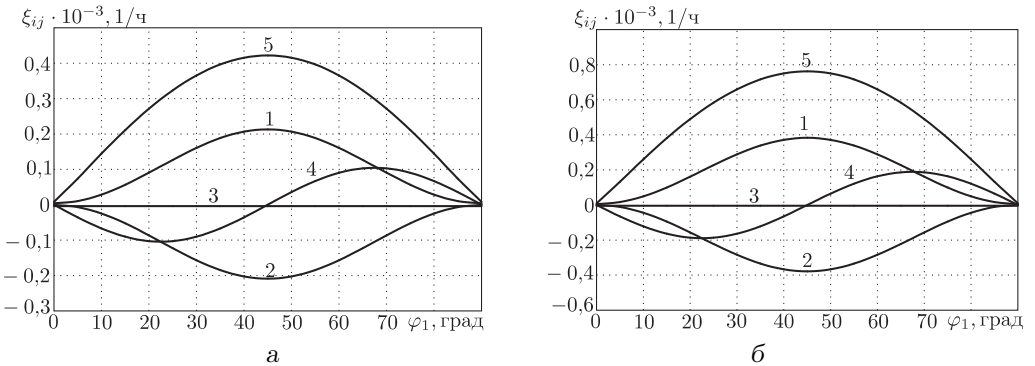


Рис. 3. Зависимости скоростей деформаций установившейся ползучести 2D-металлокомпозитного образца от угла армирования первым семейством: а — расчёт по структурной модели из п. 1; б — расчёт по структурной модели Ю. В. Немировского [6, 17]

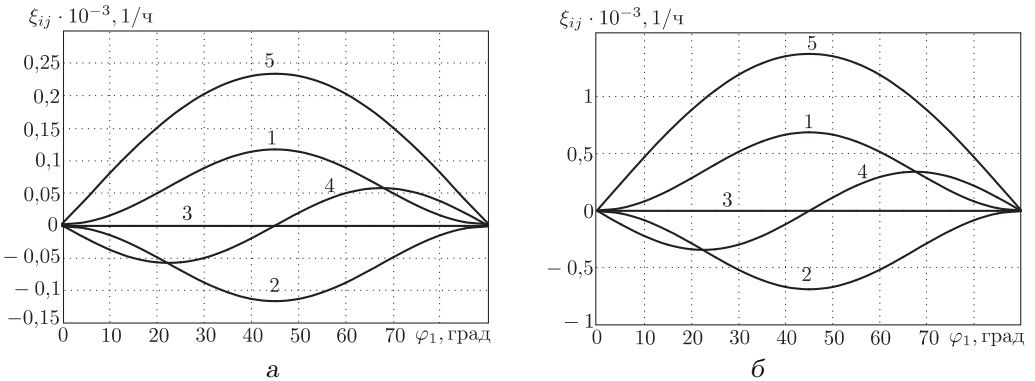


Рис. 4. Зависимости скоростей деформаций установившейся ползучести 3D-металлокомпозитного образца от угла армирования первым семейством: а — расчёт по структурной модели из п. 1; б — расчёт по структурной модели Ю. В. Немировского [6, 18]

условиях установившейся ползучести, что оправдывает целесообразность армирования.

Поведение всех кривых на рис. 3, 4 показывает, что изменение структуры армирования существенно влияет на механическое поведение металлокомпози́та в условиях установившейся ползучести. В частности, скорости деформаций ползучести  $\xi_{ij}$  металлокомпозитного образца при разных углах армирования  $\varphi_1$  могут различаться на несколько порядков. Поэтому имеет смысл осуществлять целевую оптимизацию армированных конструкций, работающих в условиях установившейся ползучести.

В силу указанных выше особенностей сравниваемых структурных моделей оптимальные проекты армирования, полученные на их основе, могут и не совпадать. Так, сопоставление ординат точек на кривых рис. 3, а и 4, а показывает, что дополнительное армирование третьим семейством волокон в направлении  $x_3$  приводит к уменьшению податливости металлокомпозита почти вдвое в рамках расчёта по модели, предложенной в п. 1; аналогичное же сравнение кривых на рис. 3, б и 4, б демонстрирует, что в рамках модели Ю.В. Немировского [6, 18] дополнительное армирование в направлении  $x_3$ , наоборот, вызывает увеличение податливости металлокомпозитного образца тоже почти вдвое. Последнее обстоятельство объясняется тем, что, согласно модели из [6, 18], третье семейство арматуры не воспринимает нагружение в плоскости  $(x_1, x_2)$ , а лишь ослабляет связующее.

Следовательно, если в качестве критерия эффективного армирования выступает требование уменьшения скоростей деформаций ползучести, то, согласно модели из п. 1, использование третьего семейства арматуры повышает эффективность работы образца, а согласно модели Ю.В. Немировского, наоборот, — уменьшает.

**Заключение.** Предложенная структурная модель позволяет строить в итерационной форме определяющие уравнения для пространственно-армированных в произвольных направлениях металлокомпозитов при наличии идеальной адгезии между связующим и арматурой, материалы которых работают в условиях установившейся анизотропной ползучести. Зная же начальное механическое состояние металлокомпозита [12] и его состояние в условиях установившейся ползучести и используя экстремальные принципы теории ползучести [8], можно получить приближенное решение о неустановившейся ползучести такого композита на первой её стадии.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 12-01-90405-Укр\_а).

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Тарнопольский Ю. М., Жигун И. Г., Поляков В. А.* Пространственно-армированные композиционные материалы: Справочник. М.: Машиностроение, 1987. 224 с. [*Tarnopolsky Yu. M., Zhigun I. G., Polyakov V. A.* Spatial-Reinforced Composite Materials: Handbook. Moscow: Mashinostroenie, 1987. 224 pp.]
2. *Mohamed M. H., Bogdanovich A. E., Dickinson L. C., Singletary J. N., Lienhart R. R.* A New Generation of 3D Woven Fabric Preforms and Composites // *SAMPE J.*, 2001. Vol. 37, no. 3. Pp. 8–17.
3. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с. [*Rabotnov Yu. N.* Creep of Structural Elements. Moscow: Nauka, 1966. 752 pp.]
4. *Резников Б. С., Нижитенко А. Ф., Кучеренко И. В.* Установившаяся ползучесть микронеоднородных сред / В сб.: *Труды четвертой Всероссийской научной конференции*



- с международным участием (29–31 мая 2007 г.). Часть 1: Математические модели механики, прочности и надёжности элементов конструкций / Матем. моделирование и краев. задачи. Самара: СамГТУ, 2007. С. 219–223. [Reznikov B. S., Nikitenko A. F., Kucherenko I. V. Steady creep of micrononuniform media / In: *Proceedings of the Fourth All-Russian Scientific Conference with international participation* (29–31 May 2007). Part 1 / Matem. Mod. Kraev. Zadachi. Samara: SamGTU, 2007. Pp. 219–223].
5. Каримбаев Т. Д., Мыктыбеков Б. М., Панова И. М. Математические модели нелинейного деформирования однонаправленно-армированных композиционных материалов / Труды ЦИАМ. Т. 1334. М.: ЦИАМ, 2005. 160 с. [Karimbaev T. D., Myktybekov B. M., Panova I. M. Mathematical models of nonlinear deformation of unidirectionally reinforced composite materials / Trudy CIAM. Vol. 1334. Moscow: CIAM, 2005. 160 pp.]
  6. Немировский Ю. В. Ползучесть однородных и композитных оболочек / В сб.: *Актуальные проблемы механики оболочек*: Тр. междунар. конф., посвящённой 100-летию проф. Х. М. Муштари, 90-летию проф. К. З. Галимова и 80-летию проф. М. С. Корнишина (Казань, 26–30 июня 2000 г.). Казань: Новое знание, 2000. С. 42–49. [Nemirovskii Yu. V. Creep of homogeneous and composite shells / In: *Topical Problems of the Mechanics of Shells*: Trans. Int. Conf. Dedicated to the 100th Birthday of Prof. Kh. M. Mushtari, 90th Birthday of Prof. K. Z. Galimov, and 80th Birthday of Prof. M. S. Kornishin (Kazan', 26–30 June, 2000). Kazan': Nvoe Znanie, 2000. Pp. 42–49].
  7. Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетерс Г. А. Сопrotивление жестких полимерных материалов. Рига: Зинатне, 1972. 500 с. [Malmeister A. K., Tamuzh V. P., Teters G. A. Strength of Polymer and Composite Materials. Riga: Zinatne, 1972. 500 pp.]
  8. Качанов Л. М. Теория ползучести. М.: Физматгиз, 1960. 456 с. [Kachanov L. M. Creep Theory. Moscow: Fizmatgiz, 1960. 456 pp.]
  9. Ильюшин А. А. Труды. Т. 3: Теория термовязкоупругости / ред. Е. А. Ильюшина, В. Г. Тунгускова. М.: Физматлит, 2007. 288 с. [Il'yushin A. A. Works. Vol. 3: Theory of Thermoviscoelasticity / eds. E. A. Il'yushina, V. G. Tunguskova. Moscow: Fizmatlit, 2007. 288 pp.]
  10. Немировский Ю. В., Янковский А. П. Эффективные физико-механические характеристики композитов, однонаправленно армированных моноотропными волокнами. Сообщение 1. Модель армированной среды // *Изв. вузов. Строительство*, 2006. № 5. С. 16–24. [Nemirovsky Yu. N., Yankovsky A. P. Effective physico-mechanical characteristics of composites unidirectionally reinforced with transversely isotropic fibers. Report 1: Model of a reinforced medium // *Izv. vuzov. Stroitel'stvo*, 2006. no. 5. Pp. 16–24].
  11. Немировский Ю. В., Янковский А. П. Определение эффективных физико-механических характеристик гибридных композитов, перекрестно армированных трансверсально-изотропными волокнами, и сопоставление расчётных характеристик с экспериментальными данными // *Мех. композ. матер. и констр.*, 2007. Т. 43, № 1. С. 3–32. [Nemirovsky Yu. N., Yankovsky A. P. Determination of the effective physico-mechanical characteristics of hybrid composites cross-reinforced with transversely isotropic fibers and a comparison of calculated characteristics with experimental data // *Mekh. Kompozits. Mater. Konstr.*, 2007. Vol. 43, no. 1. Pp. 3–32].
  12. Янковский А. П. Определение термоупругих характеристик пространственно армированных волокнистых сред при общей анизотропии материалов компонент композиции. 1. Структурная модель // *Мех. композ. матер.*, 2010. Т. 46, № 5. С. 663–678; англ. пер.: Yankovskii A. P. Determination of the thermoelastic characteristics of spatially reinforced fibrous media in the case of general anisotropy of their components. 1. Structural model // *Mech. Compos. Mater.*, 2010. Vol. 46, no. 5. Pp. 451–460.
  13. Немировский Ю. В., Янковский А. П. Эффективные физико-механические характеристики композитов, однонаправленно армированных моноотропными волокнами. Сообщение 2. Сопоставление расчётных характеристик с экспериментальными данными // *Изв. вузов. Строительство*, 2006. № 6. С. 10–19. [Nemirovsky Yu. N., Yankovsky A. P. Effective physico-mechanical characteristics of composites unidirectionally reinforced with

- transversely isotropic fibers. Report 2: Comparison between calculated characteristics and experimental data // *Izv. vuzov. Stroitel'stvo*, 2006. no. 6. Pp. 10–19].
14. Янковский А. П. Определение термоупругих характеристик пространственно армированных волокнистых сред при общей анизотропии материалов компонент композиции. 2. Сравнение с экспериментом // *Мех. композ. матер.*, 2010. Т. 46, № 6. С. 955–964; англ. пер.: *Yankovskii A. P. Determination of the thermoelastic characteristics of spatially reinforced fibrous media in the case of general anisotropy of their components. 2. Comparison with experiment // Mech. Compos. Mater.*. Vol. 46, no. 6. Pp. 659–666.
  15. Композиционные материалы: Справочник / ред. Д. М. Карпинос. Киев: Наукова думка, 1985. 592 с. [Composite Materials: Handbook / ed. D. M. Karpinos. Kiev: Naukova Dumka, 1985. 592 pp.]
  16. Писаренко Г. С., Можаровский Н. С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести: Справочное пособие. Киев: Наукова думка, 1981. 496 с. [*Pisarenko G. S., Mozharovskii N. S. Equations and Boundary-Value Problems of the Theory of Plasticity and Creep: Handbook. Kiev: Naukova Dumka, 1981. 496 pp.*]
  17. Янковский А. П. Установившаяся ползучесть сложно армированных металлокомпозитных пластин, нагруженных в своей плоскости // *Мат. модел.*, 2010. Т. 22, № 8. С. 55–66. [*Yankovskii A. P. The steady creeping difficulty reinforced the metal-composite plates loaded in the plane // Mat. Model.*, 2010. Vol. 22, no. 8. Pp. 55–66].
  18. Немировский Ю. В., Янковский А. П. Численное моделирование нелинейно-наследственного поведения пространственно-армированных композитных сред / В сб.: *Численные методы решения задач теории упругости и пластичности*: Тез. докл. XXII Всерос. конф. (Барнаул, 4–7 июля 2011 г.). Новосибирск: Параллель, 2011. С. 53. [*Nemirovskiy Yu. N., Yankovsky A. P. Numerical simulation of behaviour of the three-dimensional reinforcement composit materials with nonlinear memory / In: Numerical methods for solving problems of elasticity and plasticity theory. Novosibirsk: Parallel', 2011. Pp. 53].*

Поступила в редакцию 25/X/2011;  
в окончательном варианте — 27/II/2012.

MSC: 74K20, 74R20

## MODELING OF STEADY CREEP OF 3D REINFORCED METAL-COMPOSITS WITH ANISOTROPY OF PHASE MATERIALS

*A. P. Yankovskii*

Khristianovich Institute of theoretical and applied mechanics  
the Siberian Branch of the Russian Academy of Science,  
4/1, Institutskaya st., Novosibirsk, 630090, Russia.

E-mail: lab4nemir@rambler.ru

*The iteration model describing mechanical behavior of cross-reinforced in the space metal-composites with steady-state anisotropic creep is presented. The comparative analysis of the calculations on different structural models of mechanical behavior of cross-reinforced in plane and in space metal-composites with steady-state creep is carried out.*

**Key words:** *metal-composite, 3D reinforcement, steady creep, anisotropy, structural theory.*

Original article submitted 25/X/2011;  
revision submitted 27/II/2012.

*Andrey P. Yankovskii* (Dr. Sci. (Phys. & Math.)), Leading Research Scientist, Lab. of Fast Processes Physic.