

УДК 539.374

## ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНООСНОГО И ДВУОСНОГО НАГРУЖЕНИЯ РАЗУПРОЧНЯЮЩИХСЯ МАТЕРИАЛОВ ПО ЭНДОХРОННОЙ ТЕОРИИ НЕУПРУГОСТИ

*Ю. И. Кадашевич, С. П. Помыткин*

Санкт-Петербургский государственный технологический университет растительных полимеров,  
198095, Россия, Санкт-Петербург, ул. Ивана Черных, 4.

E-mails: yulij.kadashevich@yandex.ru, sprom@yandex.ru

*В рамках теории неупругости эндохронного типа, учитывающей дилатацию, изучены одноосное и двuosное знакопеременное деформирование разупрочняющихся материалов. Предложены определяющие соотношения, обобщенные на область больших деформаций. Приведены примеры, демонстрирующие возможности теории.*

**Ключевые слова:** неупругость, эндохронная теория, определяющие соотношения, двuosное нагружение, разупрочняющиеся материалы.

**Введение.** Разупрочняющиеся материалы, кривые деформирования у которых имеют падающие ветви, были обнаружены достаточно давно и, естественно, все это время привлекали внимание исследователей [1–10]. Отдельно отметим цикл работ В. В. Стружанова [11–16], в которых поведение разупрочняющихся материалов было рассмотрено на основе теории течения. В предлагаемой авторами статье в рамках эндохронной теории неупругости для малых деформаций излагаются некоторые результаты, полученные при одноосном и двuosном знакопеременном жестком нагружении разупрочняющихся материалов. Результаты более ранних исследований авторов по разупрочняющимся материалам можно найти в [3, 6, 17].

**Определяющие соотношения теории.** Исходным для анализа выбран вариант эндохронной теории неупругости, учитывающий дилатацию материалов [18], в форме

$$\frac{1}{2G} \left[ \sigma'_{ij} + \alpha \tau \frac{d\sigma'_{ij}}{dR} \right] = \tau \frac{dR'_{ij}}{dR} + \frac{R'_{ij}}{g + \alpha}, \quad (1)$$

$$R'_{ij} = \varepsilon'_{ij} - \frac{(1 - \alpha)}{2G} \sigma'_{ij}, \quad dR = \sqrt{dR'_{ij} dR'_{ij}},$$

$$\sigma_0 + \gamma \frac{d\sigma_0}{dR} = \frac{1}{\beta} \sigma_0 \frac{dR_0}{dR}, \quad R_0 = \varepsilon_0 - \frac{k_1}{K} \sigma_0, \quad \sigma_0 = \sigma_{ii}, \quad \varepsilon_0 = \varepsilon_{ii}. \quad (2)$$

Здесь  $\sigma'_{ij}$ ,  $\varepsilon'_{ij}$ ,  $R'_{ij}$  — девиаторы тензоров напряжений, деформаций и вспомогательного параметрического тензора  $R_{ij}$ ,  $G$  — модуль сдвига,  $K$  — объемный модуль,  $\tau$  — аналог деформационного предела текучести,  $g$  — аналог коэффициента упрочнения,  $\alpha$  и  $\gamma$  — параметры эндохронности,  $\beta$  и  $k_1$  — константы материала.

*Юлий Исаакович Кадашевич* (д.ф.-м.н.), профессор, каф. высшей математики. *Сергей Павлович Помыткин* (к.ф.-м.н.), доцент, каф. высшей математики.

Важный частный случай соотношений (1), (2) возникает при  $\alpha = 1$  и  $\gamma = 0$ . Тогда получаем, что

$$\frac{1}{2G} \left( \sigma'_{ij} + \tau \frac{d\sigma'_{ij}}{d\varepsilon_i} \right) = \tau \frac{d\varepsilon'_{ij}}{d\varepsilon_i} + \frac{\varepsilon'_{ij}}{g+1}, \quad (3)$$

$$\varepsilon_i = \sqrt{d\varepsilon'_{ij} d\varepsilon'_{ij}}, \quad \beta = \frac{dR_0}{d\varepsilon_i}, \quad R_0 = \varepsilon_0 - \frac{k_1}{K} \sigma_0.$$

В работе [19] был выделен частный случай определяющих соотношений (3), когда  $k_1 = 0$ , и приведены результаты исследования некоторых вариантов трехосного простого нагружения уплотняемых материалов. Под простым нагружением понимается нагружение (деформирование) без разгрузки или без изменения угла вида тензора напряжения (деформаций). Здесь же в [19] был сформулирован и общий закон дилатации в форме

$$\beta(R_0) = \frac{dR_0}{dR}. \quad (4)$$

Основным тормозом уточнения эндохронной теории, по мнению авторов, является отсутствие четких экспериментальных данных при знакопеременных и сложных нагружениях. До сих пор не подтверждены экспериментальные результаты, полученные еще Д. Колумбасом, для ряда материалов при оценке дилатации [20, 21], хотя они, несомненно, должны приниматься во внимание исследователями-теоретиками. В недавно опубликованной работе В. П. Радченко и Е. А. Андреевой [22] отмечен ряд интересных теоретических особенностей поведения разупрочняющихся материалов при знакопеременном нагружении. В частности, была подтверждена гипотеза В. В. Стружанова [13] об «инверсии» эффекта Баушингера.

**Демонстрационные примеры.** В предлагаемой статье на основе теории (1) рассматривается задача жесткого нагружения растяжением-сжатием: при  $d\varepsilon_1 > 0$  происходит растяжение, а при  $d\varepsilon_1 < 0$  — последующее сжатие. В этом случае имеем

$$\varepsilon_1 \neq 0, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3, \quad \sigma_1 \neq 0, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0, \quad \varepsilon_0 = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2, \quad \varepsilon_i = \sqrt{2/3} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|.$$

Параметры теории и константы материала примем в наиболее простом виде:

$$\tau = \sqrt{3/2}, \quad \alpha = 1, \quad 2G = 1, \quad g = -4.$$

Тогда, если дилатация отсутствует и  $\varepsilon_0 = 0$ , то расчётные уравнения теории выглядят как

$$\sigma_1 + \frac{d\sigma_1}{|d\varepsilon_1|} = \frac{3}{2} \cdot \left( \frac{d\varepsilon_1}{|d\varepsilon_1|} - \frac{1}{3} \varepsilon_1 \right), \quad \varepsilon_2 = -\frac{1}{2} \varepsilon_1.$$

На рис. 1, а и рис. 1, б приведены типичные графики зависимости  $\sigma_1 \sim \varepsilon_1$  для разупрочняющегося материала при одноосном знакопеременном жестком нагружении и отсутствии дилатации.

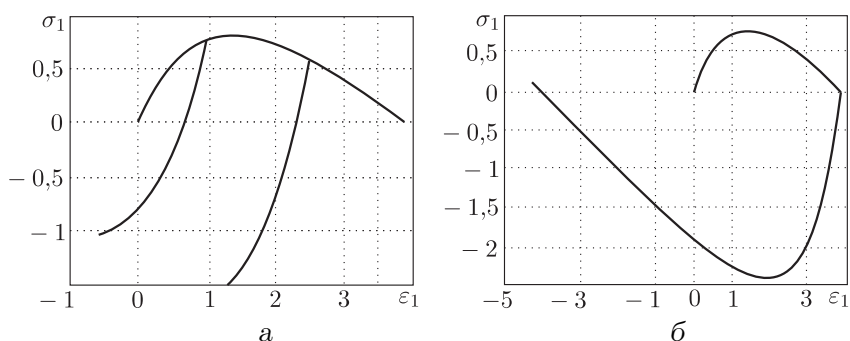


Рис. 1. Одноосное знакопеременное нагружение материала для разных  $\varepsilon_1$

Для случая, когда дилатация материала имеет место и  $\varepsilon_0 \neq 0$ , рассмотрены два варианта связи деформаций  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  при прямом и обратном нагружении (схемы деформирования приведены на рис. 2). В обоих вариантах  $\varepsilon_2 \neq -\varepsilon_1/2$ .

На рис. 3, а и рис. 3, б приведены результаты расчёта напряжений  $\sigma_1$  и деформаций  $\varepsilon_1$  для вариантов деформирования, указанных на рис. 2, а и рис. 2, б, соответственно. Результаты демонстрируют необычное поведение напряжений и деформаций при знакопеременном жестком нагружении уплотняемых разупрочняющихся материалов. Основной вывод — при учёте

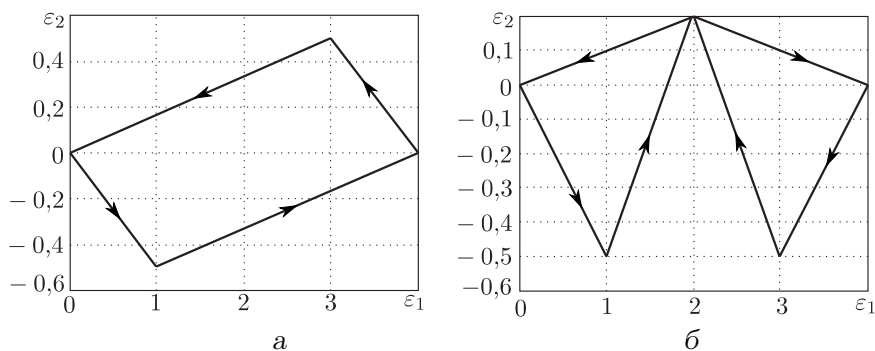


Рис. 2. Траектории двусосного деформирования

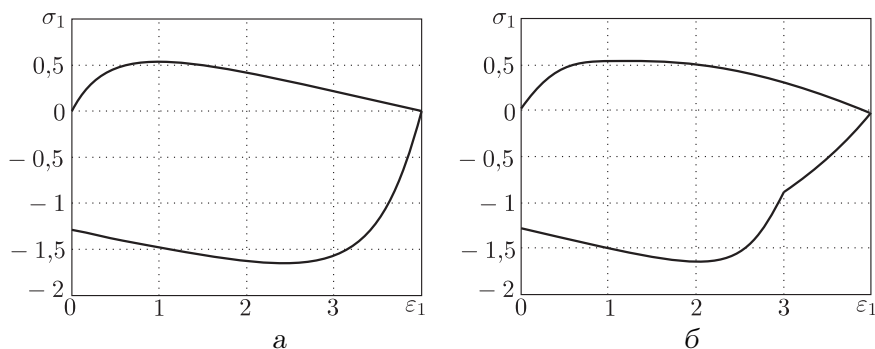


Рис. 3. Осевые напряжения и деформации при двусосном деформировании

дилатации разупрочняющегося материала следует не «угадывать» характер зависимости  $\varepsilon_1 \sim \varepsilon_2$ , а экспериментально установить закон дилатации и включить его в одной из форм, предложенных в определяющих соотношениях (1), (2) или (3), (4).

**Обобщение теории на область больших деформаций.** Укажем для разупрочняющихся материалов один из вариантов расширения эндохронной теории неупругости на область больших деформаций. Согласно [17], в безындексной записи для тензоров соотношения (1), (2) запишутся в виде

$$\frac{1}{2G} \left[ \tau \overset{\circ}{\sigma} + \sigma \frac{g+1}{g+\alpha} |\dot{R}| \right] = \tau \overset{\circ}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{g+\alpha} |\dot{R}|,$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon} = D, \quad \varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{K}, \quad \tau = \tau(|R|, |\dot{R}|), \quad g < -1,$$

$$D = (L + L^T)/2, \quad L = \dot{F}F^{-1}, \quad Q = FU^{-1}, \quad \Omega = \dot{Q}Q^T,$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon} = \dot{\varepsilon} + \varepsilon\Omega - \Omega\varepsilon, \quad \overset{\circ}{\sigma} = \dot{\sigma} + \sigma\Omega - \Omega\sigma,$$

$$R = \varepsilon - (1 - \alpha) \frac{\sigma}{2G}, \quad |\dot{R}| = \sqrt{\frac{dR}{dt} : \frac{dR}{dt}}, \quad |R| = \int |\dot{R}| dt.$$

Здесь  $F$  — градиент деформации,  $Q$  — ортогональный тензор поворота,  $U$  — правый тензор удлинения,  $D$  — тензор скоростей деформации.

Для демонстрации возможностей предлагаемого варианта решена задача жесткого активного (без разгрузки) нагружения материала с  $D_{11} = -1$ ,  $D_{22} = 0,5$ ,  $D_{12} = 0$  при следующих значениях параметров теории:  $\alpha = 1$ ,  $2G = 1$ ,  $g = -4$ ,  $\tau = 1 - \exp(-|\dot{\varepsilon}|)$ . На рис. 4 приведены графики развития деформаций  $\varepsilon_{11}$  и  $\varepsilon_{22}$  в зависимости от осевого напряжения. Кривые качественно отвечают опытным данным, опубликованным в [5] для хрупких горных пород.

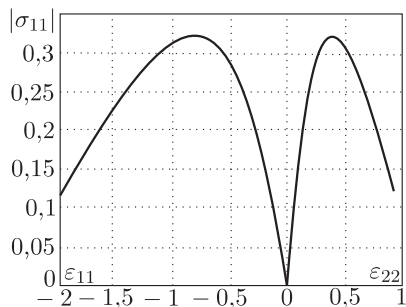


Рис. 4. Активное пропорциональное двuosное деформирование

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 10-01-00705-а).

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Maier G. Incremental plastic analysis in the presence of large displacements and physical instability effects // *Int. J. Solids Struct.*, 1971. Vol. 7, no. 4. Pp. 345–372.
2. Ибрагимов В. А., Ключников В. Д. Некоторые задачи для сред с падающей диаграммой // *Изв. АН СССР. МТТ*, 1971. №4. С. 116–121. [Ibragimov V. A., Klyushnikov V. D. Some problems for media with an incident diagram // *Izv. AN SSSR. MTT*, 1971. no. 4. Pp. 116–121].
3. Кадашевич Ю. И. Теория пластичности и ползучести, учитывающая микроразрушения // *Докл. АН СССР*, 1982. Т. 266, №6. С. 1341–1344. [Kadashevich Yu. I. The theory of plasticity and creep taking into account the microfracture // *Dokl. AN SSSR*, 1982. Vol. 266, no. 6. Pp. 1341–1344].
4. Лебедев А. А., Чаусов Н. Г. Феноменологические основы оценки трещиностойкости материалов по параметрам спадающих участков диаграмм деформаций // *Проблемы*

- прочности, 1983. № 2. С. 6–10; англ. пер.: *Lebedev A. A., Chausov N. G.* Phenomenological fundamentals of the evaluation of crack resistance of materials on the basis of parameters of falling portions of strain diagrams // *Strength of Materials*. Vol. 15, no. 2. Pp. 155–160.
5. *Линьков А. М.* Об устойчивости при разупрочнении пород во времени // *Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых*, 1989. № 1. С. 12–22; англ. пер.: *Lin'kov A. M.* Stability of rock as it softens with time // *J. Min. Sci.* Vol. 25, no. 1. Pp. 9–17.
  6. *Новожилов В. В., Кадашевич Ю. И.* Микронапряжения в конструкционных материалах. Л.: Машиностроение, 1990. 223 с. [*Novozhilov V. V., Kadashevich Yu. I.* Microstresses in Structural Materials. Leningrad: Mashinostroenie, 1990. 223 pp.]
  7. *Васин Р. А., Еникеев Ф. У., Мазурский М. И.* О материалах с падающей диаграммой // *Изв. РАН. МТТ*, 1995. № 2. С. 181–182. [*Vasin R. A., Enikeev F. U., Mazurskii M. I.* Materials with a Falling Diagram // *Izv. RAN. MTT*, 1995. no. 2. Pp. 181–182].
  8. *Никитин Л. В.* Закрытическое поведение разупрочняющихся материалов // *Докл. АН*, 1995. Т. 342, № 4. С. 487–490; англ. пер.: *Nikitin L. V.* The postcritical behavior of a strain-softening material // *Phys.-Dokl.*, 1995. Vol. 40, no. 6. Pp. 300–303.
  9. *Вильдеман В. Э., Соколжин Ю. В., Ташкиев А. А.* Механика неупругого деформирования и разрушения композиционных материалов. М.: Наука, Физматлит, 1997. 288 с. [*Vil'deman V. É., Sokolkin Yu. V., Tashkinov A. A.* Mechanics of inelastic deformation and fracture of composite materials. Moscow: Nauka, Fizmatlit, 1997. 288 pp.]
  10. *Ставрогин А. Н., Тарасов Б. Г., Певзнер Е. Д.* Влияние скорости деформирования на запредельные характеристики горных пород // *Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых*, 1982. № 5. С. 8–15; англ. пер.: *Stavrogin A. N., Tarasov B. G., Fevzner E. D.* Influence of deformation velocity on the limiting characteristics of rocks // *J. Min. Sci.*, 1982. Vol. 18, no. 5. Pp. 360–366.
  11. *Стружанов В. В.* Ассоциированный и инкрементальный закон пластического течения для сред, проявляющих деформационное разупрочнение // *Изв. Урал. гос. ун-та*, 1998. № 10. С. 92–101. [*Struzhanov V. V.* The associated and the incremental laws of plastic yielding for strain-softening media // *Izv. Ural. Gos. Un-ta*, 1998. no. 10. Pp. 92–101].
  12. *Стружанов В. В., Башуров Вяч. В., Каримов П. Ф.* К определению параметров инкрементального закона пластичности для изотропных тел // *Изв. Урал. гос. ун-та*, 1999. № 14. С. 119–134. [*Struzhanov V. V., Bashurov Vyach. V., Karimov P. F.* On the determination of parameters of the incremental plasticity law for isotropic media // *Izv. Ural. Gos. Un-ta*, 1999. no. 14. Pp. 119–134].
  13. *Стружанов В. В.* Упругопластическая среда с разупрочнением. Сообщение 1. Свойства материала и инкрементальный закон пластичности при растяжении // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2006. № 42. С. 49–61. [*Struzhanov V. V.* Elastoplastic medium with a softening. Part 1. Material properties and incremental plasticity law is in tension // *Vestn. Sam. Gos. Tehn. Un-ta. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2006. no. 42. Pp. 49–61].
  14. *Стружанов В. В.* Упругопластическая среда с разупрочнением. Сообщение 2. Определяющие соотношения при сложном напряженном состоянии // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2006. № 43. С. 68–80. [*Struzhanov V. V.* Elastoplastic medium with a softening. Part 2. Defining relations for complex stress state // *Vestn. Sam. Gos. Tehn. Un-ta. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2006. no. 43. Pp. 68–80].
  15. *Стружанов В. В., Башуров Вяч. В.* Модифицированная модель Мазинга // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2007. № 1(14). С. 29–39. [*Struzhanov V. V., Bashurov Vyach. V.* The modified Masing model // *Vestn. Sam. Gos. Tehn. Un-ta. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2007. no. 1(14). Pp. 29–39].
  16. *Стружанов В. В., Просвиряков Е. Ю.* Растяжение с кручением. Сообщение 1: Свойства материала // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2008. № 1(16). С. 36–44. [*Struzhanov V. V., Prosviryakov E. Yu.* Tension with torsion. Part 1. Material properties // *Vestn. Sam. Gos. Tehn. Un-ta. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2008. no. 1(16). Pp. 36–44].

17. *Кадашевич Ю. И., Помыткин С. П.* Эндохронная теория неупругости для разупрочняющихся материалов с учетом больших деформаций / В сб.: *Современные проблемы ресурса материалов и конструкций*. М.: МАМИ, 2009. С. 158–165. [*Kadashevich Yu. I., Pomytkin S. P.* Endochronic theory of inelasticity for softening materials with regard to large deformations / In: *Modern problems of resource materials and structures*. Moscow: МАМИ, 2009. Pp. 158–165].
18. *Кадашевич Ю. И., Помыткин С. П.* Учет дилатации в эндохронной теории пластичности / В сб.: *Машины и аппараты целлюлозно-бумажного производства*. СПб.: СПбГТУРП, 2001. С. 127–129. [*Kadashevich Yu. I., Pomytkin S. P.* Account of dilation in the endochronic theory of plasticity. St. Petersburg: SPbGTURP, 2001. Pp. 127–129].
19. *Кадашевич Ю. И., Помыткин С. П.* Описание трехосного простого нагружения в рамках эндохронной теории неупругости, учитывающей дилатацию материалов / В сб.: *Машины и аппараты целлюлозно-бумажного производства*. СПб.: СПбГТУРП, 2008. С. 68–73. [*Kadashevich Yu. I., Pomytkin S. P.* Description of triaxial simple loading in the endochronic theory of inelasticity, taking into account materials dilatation. St. Petersburg: SPbGTURP, 2008. Pp. 68–73].
20. *Colymbas D.* Generalized hypoelastic constitutive equation: Predictions for hollow-cylinder and cube tests / In: *Proc. of the Int. Workshop on Constitutive Equations for Granular Non-Cohesive Soils*. Rotterdam, 1988. Pp. 349–366.
21. *Kolymbas D., Herle I., Von Wolffersdorff P. A.* Hypoplastic constitutive equation with internal variables // *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.* Vol. 19, no. 6. Pp. 415–436.
22. *Радченко В. П., Андреева Е. А.* Об эффекте Баушингера на стадии пластического разупрочнения материала / В сб.: *Зимняя школа по механике сплошных сред*. Ч. 1. Пермь, 2007. С. 42–45. [*Radchenko V. P., Andreeva E. A.* On the Bauschinger effect at the stage of plastic softening of the material / In: *Winter School on Continuum Mechanics*. Vol. 1. Perm', 2007. Pp. 42–45].

Поступила в редакцию 17/X/2011;  
в окончательном варианте — 22/XI/2011.

MSC: 74C20

## INVESTIGATION OF UNIAXIAL AND BIAXIAL LOADINGS OF SOFTENING MATERIALS IN ENDOCHRONIC THEORY OF INELASTICITY

*Yu. I. Kadashevich, S. P. Pomytkin*

Saint-Petersburg State Technological  
University of Plant Polymers,  
4, Ivan Chernykh st., St. Petersburg, 198095, Russia.

E-mails: yulij.kadashevich@yandex.ru, sppom@yandex.ru

*Uniaxial and biaxial alternating strains of softening materials are explored in the framework of inelastic theory of endochronic type accounting material dilatation. Constitutive relations generalized for large strain domain are proposed. Some simulated examples for demonstration of theory capability are presented.*

**Key words:** *inelasticity, endochronic theory, constitutive equations, biaxial loading, softening materials.*

Original article submitted 17/X/2011;  
revision submitted 22/XI/2011.

*Yulij I. Kadashevich* (Dr. Sci. (Phys. & Math.)), Professor, Dept. of Mathematics.  
*Sergei P. Pomytkin*, Associate Professor (Ph.D. (Phys. & Math.)), Dept. of Mathematics.