Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2012. № 1 (26). С. 116–122

УДК 539.37

АНТИПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИ АНИЗОТРОПНОГО УПРУГОГО СТЕРЖНЯ

Ю. А. Боган

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
630090, Россия, Новосибирск, пр-т Академика Лаврентьева, 15.

E-mail: bogan@hydro.nsc.ru

Построены явные решения краевых задач Дирихле и Неймана при антиплоской деформации цилиндрически анизотропного материала для круговой области. Доказана однозначная разрешимость задачи Дирихле в ограниченной области на плоскости с кусочно-гладкой границей.

Ключевые слова: *цилиндрическая анизотропия, упругость.*

Введение. Краевые задачи кручения упругих анизотропных стержней хорошо изучены в монографии С. Г. Лехницкого [1]. Некоторые результаты в этом направлении были получены Тингом в статье [2]. Одна задача о щели рассматривалась в статье [3]. Необходимо отметить, что в отмеченных работах рассматривался только цилиндрически ортотропный материал. Здесь же изучены краевые задачи Дирихле и Неймана для произвольного цилиндрически анизотропного материала в предположении антиплоской деформации. При произвольной анизотропии в это уравнение входит смешанная производная по r, θ, что существенно усложняет построение явного решения. Аналогичное уравнение возникает в стационарной теплопроводности [4].

1. Основные уравнения и постановка задачи. Введем цилиндрическую систему координат r, θ, z. Тогда в предположении антиплоской деформации перемещения даются формулами

$$u_r = z\Big(-\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} + a_{45}\tau_{\theta z} + a_{55}\tau_{rz}\Big) + c_1\cos\theta + c_2\sin\theta,$$
$$u_\theta = z\Big(-\frac{\partial w}{\partial r} + a_{44}\tau_{\theta z} + a_{45}\tau_{rz}\Big) + c_2\cos\theta - c_1\sin\theta + c_0 r.$$

Здесь c_0, c_1, c_2 — вещественные постоянные. Вторые слагаемые в предыдущих формулах отвечают за жёсткое перемещение тела. Фиксируем их каким-либо способом. В предположении независимости перемещений от z напряжения определяются из соотношений

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} + a_{45}\tau_{\theta z} + a_{55}\tau_{rz} = 0, \quad -\frac{\partial w}{\partial r} + a_{44}\tau_{\theta z} + a_{45}\tau_{rz} = 0. \tag{1}$$

Решив уравнения (1) относительно напряжений, получим

$$\tau_{\theta z} = A_{44}\frac{\partial w}{r\partial \theta} + A_{45}\frac{\partial w}{\partial r}, \quad \tau_{rz} = A_{45}\frac{\partial w}{r\partial \theta} + A_{55}\frac{\partial w}{\partial r},$$

Юрий Александрович Боган (д.ф.-м.н.), старший научный сотрудник, отд. механики деформируемого твёрдого тела.

где $A_{44} = a_{55}/\delta$, $A_{45} = A_{54} = -a_{45}/\delta$, $A_{55} = a_{44}/\delta$, $\delta = a_{44}a_{55} - a_{45}^2 > 0$. Здесь A_{44}, A_{45}, A_{55} — функции координат. При подстановке результата в единственное уравнение равновесия

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{rz}}{r} = f(r, \theta)$$

получим, что $w(r, \theta)$ определяется из уравнения

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(A_{55}\frac{\partial w}{\partial r} + A_{45}\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(A_{45}\frac{\partial w}{\partial r} + A_{44}\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right) + \\ + \frac{1}{r}\left(A_{55}\frac{\partial w}{\partial r} + A_{45}\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right) = f(r, \theta). \quad (2)$$

В частности, для однородного стержня при постоянных модулях сдвига и равной нулю правой части имеем

$$A_{55}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right) + 2A_{45}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} + A_{44}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = 0. \quad (3)$$

С уравнением (2) можно ассоциировать билинейную симметричную форму

$$a(w, \psi) = \int_{\partial Q}\left[\left(A_{45}\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} + A_{55}\frac{\partial w}{\partial r}\right)\frac{\partial \psi}{\partial r} + \\ + \left(A_{44}\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} + A_{45}\frac{\partial w}{\partial r}\right)\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right] r dr d\theta \quad (4)$$

и соответствующую ей квадратичную форму $a(w, w)$. Уравнение (2) можно рассматривать как уравнение Эйлера для функционала $a(w, w)$. Перейдём в (4) к декартовым координатам (x_1, x_2), где $x_1 = r\cos\theta$, $x_2 = r\sin\theta$:

$$a(w, w) = \int_{\partial Q}\left[g_{11}\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2 + 2g_{12}\frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial w}{\partial x_2} + g_{22}\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)^2\right] dx_1 dx_2,$$

где $g_{11} = A_{44}\sin^2\theta - 2A_{45}\cos\theta\sin\theta + A_{55}\cos^2\theta$, $g_{12} = (A_{55} - A_{44})\sin\theta\cos\theta + + 2A_{45}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$, $g_{21} = g_{12}$, $g_{22} = A_{44}\cos^2\theta + 2A_{45}\cos\theta\sin\theta + A_{55}\sin^2\theta$. В декартовых координатах уравнение (2) можно записать так:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(g_{11}(x)\frac{\partial w}{\partial x_1} + g_{12}(x)\frac{\partial w}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(g_{12}(x)\frac{\partial w}{\partial x_1} + g_{22}(x)\frac{\partial w}{\partial x_2}\right) = f(x_1, x_2).$$

Как видно из последних соотношений, коэффициенты уравнения — ограниченные измеримые функции, при этом разрывные в начале координат. Действительно, $\sin\theta\cos\theta = x_1x_2/(x_1^2 + x_2^2)$ — известный пример разрывной функции. Предположим, что правая часть $f(x_1, x_2) \in L^2(Q)$, Q — ограниченная область на плоскости $\mathbb{R}^2$, и существуют постоянные C_1, $C_2 > 0$, такие, что

$$C_1|\xi|^2 \leqslant g_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant C_2|\xi|^2$$

для любых $x \in Q$ и всех $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$. Обобщённое решение краевой задачи определяется стандартным образом как функция $w(x_1, x_2) \in H_0^1(Q)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\int_Q g_{ij} w_{x_i} \varphi_{x_j} dx = \int_Q f(x)\varphi(x) dx$$

для любой $\varphi(x) \in C_0^\infty(Q)$. В [5] доказано существование единственного слабого решения задачи Дирихле для эллиптического дифференциального оператора в дивергентной форме в предположении равномерной эллиптичности и измеримости коэффициентов. Очевидно, что предыдущее уравнение таковым является, так как матрица $g = (g_{ij})$ получается поворотом из матрицы $A = (A_{ij})$ и поэтому имеет те же собственные значения, сохраняя при этом свойство положительной определённости.

Стоит отметить, что подобные уравнения возникают при изучении вопроса о непрерывности по Гёльдеру решений эллиптических уравнений второго порядка [6] и служат примерами эллиптических уравнений с негладкими (в начале координат) решениями. При использовании метода характеристик [2] и введении новых независимых неизвестных

$$\xi = \varrho \cos\Big(\frac{\alpha}{\beta} \ln \varrho - \theta\Big), \quad \eta = \varrho \sin\Big(\frac{\alpha}{\beta} \ln \varrho - \theta\Big), \quad \varrho = r^\beta$$

исходное уравнение обращается в уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 u(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} = f(\xi, \eta).$$

Здесь $u(\xi, \eta) = w(r, \theta)$. При этом семейство характеристик само имеет особую точку; действительно, семейство кривых $\theta - (\alpha/\beta)\ln \varrho = \mathrm{const}$ — семейство логарифмических спиралей с особой точкой (фокусом в начале координат). При $\alpha = 0$ фокус обращается в центр, а семейство логарифмических спиралей обращается в семейство концентрических окружностей. Последнее обстоятельство, в частности, показывает, что начало координат — особая точка и для уравнения Лапласа. Наличие особой точки и приводит, вообще говоря, к сингулярности решения в начале координат. Ниже даны явные решения задач Неймана и Дирихле для круговой области с центром в начале координат.

2. Задача Неймана для круга. Построим в круге радиуса $R > 0$ с центром в начале координат формальное решение уравнения (3) при граничном условии

$$\tau_{rz}(R, \theta) = A_{45} \frac{\partial w}{r \partial \theta} + A_{55} \frac{\partial w}{\partial r} = g(\theta),$$

где $g(\theta)$ — непрерывная суммируемая периодическая функция окружной координаты. Потребуем ограниченности решения в начале координат. Применим метод разделения переменных. Представим $g(\theta)$ в виде ряда Фурье

$$g(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta),$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\varphi)\cos n\varphi d\varphi, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\varphi)\cos n\varphi d\varphi, \quad n = 0,\, 1, \ldots .$$

Ищем решение уравнения (3) в виде

$$w(r,\,\theta) = f_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty}(f_n(r)\cos n\theta + g_n(r)\sin n\theta),$$

где $f_n(r)$, $g_n(r)$ определяются из системы

$$\begin{aligned} A_{55}\Big(\frac{d^2 f_n}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{df_n}{dr}\Big) - \frac{n^2 A_{44}}{r^2} f_n + \frac{2nA_{45}}{r}\frac{dg_n}{dr} = 0, \\ -\frac{2nA_{45}}{r}\frac{df_n}{dr} + A_{55}\Big(\frac{d^2 g_n}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dg_n}{dr}\Big) - \frac{n^2 A_{44}}{r^2} g_n = 0. \end{aligned}$$

Положим $f_n(r) = Br^{\lambda n}$, $g_n(r) = Cr^{\lambda n}$. Тогда B и C определяются из

$$\big(A_{55}\lambda^2 - A_{44}\big)\, B + 2A_{45}\lambda C = 0, \quad -2A_{45}\lambda B + \big(A_{55}\lambda^2 - A_{44}\big)\, C = 0,$$

а λ — из уравнения

$$\big(A_{55}\lambda^2 - 2A_{44}\big)^2 + 4A_{45}^2\lambda^2 = 0,$$

которое допускает представление

$$\big(A_{55}\lambda^2 - A_{44} - 2A_{45}i\lambda\big)\,(A_{55}\lambda^2 - A_{44} + 2A_{45}i\lambda) = 0$$

и позволяет найти комплексно сопряженные корни $\lambda_1 = i\alpha + \beta$, $\lambda_3 = -i\alpha + \beta$, $\lambda_2 = -i\alpha - \beta$, $\lambda_4 = i\alpha - \beta$. Здесь $\alpha = -A_{45}/A_{55}$, $\beta = \sqrt{A_{44}A_{55} - A_{45}^2}/A_{55}$. Очевидно, $\beta > 0$, так как предполагается, что $A_{44}A_{55} - A_{45}^2 > 0$. Корни λ_2, λ_4 следует отбросить, как приводящие к неограниченному росту решения в начале координат. При $n = 0$ имеем $f_0(r) = \mathrm{const}$, а для функций $f_n(r)$, $g_n(r)$ получим

$$f_n(r) = B_{n1} r^{(i\alpha+\beta)n} + B_{n3} r^{(-i\alpha+\beta)n}, \quad g_n(r) = -iB_{n1} r^{(i\alpha+\beta)n} + iB_{n3} r^{(-i\alpha+\beta)n}.$$

Тогда

$$\tau_{rz} = \sum_{n=0}^{\infty}\Big[\Big(A_{55}\frac{df_n}{dr} + A_{45}n\frac{g_n}{r}\Big)\cos n\theta + \Big(A_{55}\frac{dg_n}{dr} - A_{45}n\frac{f_n}{r}\Big)\sin n\theta\Big].$$

При этом

$$\begin{aligned} A_{55}\frac{df_n}{dr} + A_{45}n\frac{g_n}{r} = \beta A_{55} n\left(B_{n1} r^{n\lambda_1 - 1} + B_{n3} r^{n\lambda_3 - 1}\right), \\ A_{55}\frac{dg_n}{dr} - A_{45}n\frac{f_n}{r} = \beta A_{55} n\left(-iB_{n1} r^{n\lambda_1 - 1} + B_{n3} r^{n\lambda_3 - 1}\right), \end{aligned}$$

и, определив B_{n1}, B_{n3} из

$$\beta A_{55} n\left(B_{n1} R^{(i\alpha+\beta)n-1} B_{n3} R^{(-i\alpha+\beta)n-1}\right)=a_n,$$
$$\beta A_{55} n\left(-iB_{n1} R^{(i\alpha+\beta)n-1}+iB_{n3} R^{(-i\alpha+\beta)n-1}\right)=b_n,$$

получим, что

$$f_n(r)=\frac{R}{2\beta A_{55} n}\left(\frac{r}{R}\right)^{\beta n}\left[a_n\cos\left(n\alpha\ln\frac{r}{R}\right)-b_n\sin\left(n\alpha\ln\frac{r}{R}\right)\right],$$
$$g_n(r)=\frac{R}{2\beta A_{55} n}\left(\frac{r}{R}\right)^{\beta n}\left[a_n\sin\left(n\alpha\ln\frac{r}{R}\right)+b_n\cos\left(n\alpha\ln\frac{r}{R}\right)\right].$$

Положим $w(r,\theta)=u(\rho,\theta)$, $\rho=(r/R)^\beta$. В результате решение представляется в виде ряда

$$w(r,\,\theta)=f_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R}{\beta A_{55} n}\left[a_n\cos n\Big(\theta-\frac{\alpha}{\beta}\ln\rho\Big)+b_n\sin n\Big(\theta-\frac{\alpha}{\beta}\ln\rho\Big)\right],$$

который можно просуммировать. Действительно, положим $\delta=\beta A_{55}$ и внесём в предыдущую формулу представление a_n, b_n, $n=0,\,1,\,\ldots$, в виде коэффициентов Фурье:

$$w(r,\,\theta)=\frac{R}{\pi\delta}\int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}g(\varphi)\rho^n\cos n\Big(\varphi-\theta+\frac{\alpha}{\beta}\ln\rho\Big)d\varphi.$$

Положим $z=r^\beta e^{i\varphi}$, $t=R^\beta e^{i\psi}$, $\psi=\theta-\alpha\ln(r/R)$. Имеет место равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{z}{t}\right)^n=-\ln\left(1-\frac{z}{t}\right).$$

Оно позволяет представить $w(r,\,\theta)$ как действительную часть выражения

$$w(r,\,\theta)=\frac{R}{\pi\delta}\int_0^{2\pi}g(\varphi)\ln\left(1-\frac{z}{t}\right)d\varphi,$$

то есть записать в виде, аналогичному решению задачи Неймана для уравнения Лапласа:

$$w(r,\,\theta)=-\frac{R}{\pi\delta}\int_0^{2\pi}g(\varphi)\ln\left(1+\rho^2-2\rho\cos\Big(\varphi-\theta+\frac{\alpha}{\beta}\ln\rho\Big)\right)d\varphi+a_0,$$

где a_0 — произвольная постоянная. Очевидно, что $g(\varphi)$ должна удовлетворять необходимому (и достаточному) условию разрешимости

$$\int_0^{2\pi}g(\varphi)d\varphi=0.$$

3. Задача Дирихле. Совершенно аналогично можно построить решение задачи Дирихле для уравнения (3) при равной нулю правой части и граничном условии $w(R,\,\theta)=f(\theta)$.

Используя выражения для коэффициентов Фурье, $w(\rho,\,\theta)$ можно записать в виде интеграла:

$$w(\rho,\,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\varphi)\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n \cos n(\varphi - \alpha\ln\rho + \theta)\right)d\theta.$$

Положим $\varphi + \theta - (\alpha/\beta)\ln\rho = \omega$ и учтём, что

$$1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n \cos n\omega = \frac{1-\rho^2}{1+\rho^2 - 2\rho\cos\omega}.$$

Тогда $w(\rho,\,\theta)$ можно записать в виде аналога интеграла Пуассона для гармонической функции:

$$w(\rho,\,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\psi)\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\psi-\varphi)+\rho^2}d\psi.$$

Здесь $\varphi = \theta - \alpha\ln\rho$. В действительности это настоящий интеграл Пуассона для функции $u(\xi,\,\eta) = w(r,\,\theta)$, имеющий смысл для любой непрерывной функции, так как функция $u(\xi,\,\eta)$ — гармоническая в этих переменных. Поскольку $|\rho\cos(\psi-\varphi)| \leqslant \rho$, можно перейти к пределу под знаком интеграла и получить теорему о среднем:

$$u(0,\,\theta) = w(0,\,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta.$$

Рассмотрим пример. Пусть $w(R,\,\theta) = k\cos\theta$. Легко вычислить интеграл Пуассона и увидеть, что $w(r,\,\theta) = k\rho\cos(\theta - \gamma\ln\rho)$. Однако при этом функция $w(r,\,\theta)$ имеет ограниченную гладкость по r при любом $\beta > 0$. Гладкость решения существенно зависит от величины β. Действительно, $w(r,\,\theta)$ непрерывна в начале координат, но ее первая производная по r неограниченна, если $\beta < 1$ и потому напряжения в начале координат неограниченны. Если $\beta \geqslant 2$, то вторые производные решения растут в начале координат, но напряжения уже ограниченны.

В качестве еще одного примера рассмотрим задачу Дирихле для сектора кругового кольца:

$$w(r,\,\alpha\pi) = 0, \quad w(r,\,0) = 0, \quad w(R,\,\theta) = g(\theta),$$
$$0 < \alpha < 2, \quad g(0) = g(\alpha\pi) = 0$$

в предположении, что $\alpha = 0$. Её решение можно представить в виде

$$w(r,\,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\rho^{n/\alpha}\sin n\theta/\alpha,$$

где a_n — коэффициенты в разложении в ряд Фурье функции $g(\theta)$ по ортогональной системе функций $\sin n\theta/\alpha$:

$$a_n = \frac{2}{\alpha\pi}\int_0^{\alpha\pi} g(\theta)\sin\frac{n\theta}{\alpha}d\theta.$$

Гладкость решения зависит от отношения β, θ и функции $g(\theta)$. Очевидно, решение непрерывно в замкнутой области. Оно даже аналитично, если $\beta/\alpha \in \mathbb{Z}$. Имеем

$$\frac{\partial w}{\partial r}(r,\,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\beta}{\alpha} \frac{r^{n\beta/\alpha-1}}{R^{n\beta/\alpha}} a_n \sin\frac{n\theta}{\alpha}.$$

Ясно, что гладкость радиальной производной зависит от свойств отношения β/α. Например, если $\alpha = 2$, диск имеет разрез от начала координат до окружности, слагаемое с $n = 1$ имеет порядок $r^{\beta/2-1}$ и если $\beta \geqslant 2$, особенности нет.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Лехницкий С. Г.* Кручение анизотропных и неоднородных стержней. М.: Наука, 1971. 240 с. [*Lekhnitskii S. G.* Torsion of Anisotropic and Inhomogeneous Rods. Moscow: Nauka, 1971. 240 pp.]
2. *Ting T. C.* The remarkable nature of cylindrically anisotropic elastic materials exemplified by an anti-plane deformation // *J. Elasticity*, 1998. Vol. 49, no. 3. Pp. 269–284.
3. *Li B., Liu Y. W., Fang Q. H.* Interaction of an anti-plane singularity with interfacial anticracks in cylindrically anisotropic composites // *Arch. Appl. Mech.*, 2008. Vol. 78, no. 4. Pp. 295–309.
4. *Прусов И. А.* Некоторые задачи термоупругости. Минск: БГУ, 1972. 200 с. [*Prusov I. A.* Some Problems of Thermoelasticity. Minsk: BGU, 1972. 200 pp.]
5. *Ландис Е. М.* Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. М.: Наука, 1971. 288 с. [*Landis E. M.* Second order equations of elliptic and parabolic type. Moscow: Nauka, 1971. 288 pp.]
6. *Piccinini L. C, Spagnolo S.* On the Hölder continuity of solutions of second order elliptic equations in two variables // *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Sci. Fis. Mat., III. Ser.*, 1972. Vol. 26, no. 2. Pp. 391–402.

Поступила в редакцию 27/I/2012;
в окончательном варианте — 27/II/2012.

MSC: 74K10; 74E10, 74B05, 35J15

ANTIPLANE DEFORMATION OF A CYLINDRICALLY ANISOTROPIC ELASTIC ROD

Yu. A. Bogan

M. A. Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, Siberian Branch of RAS,
15, Lavrentyeva pr., Novosibirsk, 630090, Russia.

E-mail: bogan@hydro.nsc.ru

The problem of antiplane deformation of general cylindrical anisotropic material is studied in this paper. Explicit solutions of Dirichlet and Neumann problems are given for a circular domain. The existence of unique weak solution of the Dirichlet problem in a bounded region with a piece-wise smooth boundary is proved.

Key words: *cylindrical anisotropy, elasticity.*

Original article submitted 27/I/2012;
revision submitted 27/II/2012.

Yurii A. Bogan (Dr. Sci. (Phys. & Math.)), Senior Research Scientist, Dept. of Deformable Solid Body.