Математическое моделирование

УДК 519.642.2:517.968.72

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА С ПРОИЗВОДНЫМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

В. Д. Бейбалаев

Дагестанский государственный университет,
367025, Россия, Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43 а.

E-mail: kaspij_03@mail.ru

Получена разностная аппроксимация для дробной производной по Капуто порядка $(4-\beta)$, где $1<\beta\leqslant 2$. Разработаны разностные схемы для решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона с производными дробного порядка. Доказаны устойчивость разностной задачи по правой части и по начальным данным и её сходимость.

Ключевые слова: *уравнение Пуассона, задача Дирихле, производная дробного порядка, численный метод, аппроксимация, разностная задача.*

Рассмотрим краевую задачу для уравнения Пуассона с производными дробного порядка в области $D=\{0<x<a, 0<y<b\}$.

Задача. *Найти решение $u(x,\,y)$ уравнения*

$$ {}^cD^\beta_{x+}u(x,\,y)+{}^cD^\beta_{y+}u(x,\,y)=-f(x,\,y),\quad 1<\beta\leqslant 2, \tag{1}$$

удовлетворяющее граничному условию

$$u\big|_{\partial D}=\psi(x,\,y), \tag{2}$$

где

$$ {}^cD^\beta_{x+}u(x,\,y)=\frac{1}{\Gamma(2-\beta)}\int_0^x\frac{u''(s,\,y)}{(x-s)^{\beta-1}}ds,\quad {}^cD^\beta_{y+}u(x,\,y)=\frac{1}{\Gamma(2-\beta)}\int_0^y\frac{u''(x,\,s)}{(y-s)^{\beta-1}}ds$$

— частные дробные производные по Капуто [1] *по соответствующим переменным.*

Краевую задачу (1), (2) будем решать численным методом. Численным методам решения краевых задач для дифференциальных уравнений с производными дробного порядка посвящены работы [2–9 и др.].

Пользуясь определением производной по Капуто [1] на отрезке $[x_n,\,x_{n+1}]$, получим

$$\left({}^cD^\beta_{x+}u\right)_n=\frac{1}{\Gamma(2-\beta)}\int_{x_n}^{x_{n+1}}\frac{u''(s)}{(x-s)^{\beta-1}}ds.$$

Представляя производную $u''(x)$ на отрезке $[x_n,x_{n+1}]$ в виде конечной разности

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_{x=x_n}\approx\frac{u(x_{n+1})-2u(x_n)+u(x_{n-1})}{h^2},$$

Ветлугин Джабраилович Бейбалаев (к.ф.-м.н.), доцент, каф. прикладной математики.

разностную аппроксимацию производной дробного порядка β на отрезке $[x_n,\, x_{n+1}]$ можно записать в виде

$$\left({}^cD_x^\beta u\right)_n \approx \frac{u(x_{n+1}) - 2u(x_n) + u(x_{n-1})}{\Gamma(3-\beta)h^\beta}. \tag{3}$$

Аналогично имеем

$$\left({}^cD_y^\beta u\right)_m \approx \frac{u(y_{m+1}) - 2u(y_m) + u(y_{m-1})}{\Gamma(3-\beta)l^\beta}. \tag{4}$$

Разлагая функции $u(x_n+h)$ и $u(x_n-h)$ в ряд Тейлора по степеням h и подставляя в (3), получим

$$\frac{u(x_n+h) - 2u(x_n) + u(x_n-h)}{\Gamma(3-\beta)h^\beta} \approx \frac{h^2u''(x_n) + \frac{h^4}{12}u^{\mathtt{IV}}(x_n)}{\Gamma(3-\beta)h^\beta} \leqslant ({}^cD_x^\beta u)_n + \frac{M}{12\Gamma(3-\beta)}h^{4-\beta},$$

где $M = \max\limits_n |u^{\mathtt{IV}}(x_n)|$.

Для нахождения решения краевой задачи (1), (2) в области $\overline{D} = \{0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b\}$ введём сетку $\Omega = \{z_{n,m} = (x_n, y_m),\ n = 0, 1, \ldots, N,\ m = 0, 1, \ldots, M\}$, где $x_n = nh$, $y_m = ml$, $h = a/N$, $l = b/M$. Воспользовавшись равенствами (3) и (4), запишем разностную схему для краевой задачи (1), (2):

$$\frac{u(x_{n+1},\, y_m) - 2u(x_n,\, y_m) + u(x_{n-1},\, y_m)}{\Gamma(3-\beta)h^\beta} + \\ + \frac{u(x_n,\, y_{m+1}) - 2u(x_n,\, y_m) + u(x_n,\, y_{m-1})}{\Gamma(3-\beta)l^\beta} = -f(x_n,\, y_m), \quad (x_n,\, y_m) \in \omega, \tag{5}$$

$$u(x_n,\, y_m) = \psi(x_n,\, y_m), \quad (x_n, y_m) \in \gamma, \tag{6}$$

где ω, γ — множества внутренних и граничных узлов сетки Ω соответственно. Для дальнейшего исследования удобно записать уравнение (5) в виде, разрешённом относительно $u_{n,m} \approx u(x_n,\, y_m)$:

$$\frac{2}{\Gamma(3-\beta)}\Big(\frac{1}{h^\beta} + \frac{1}{l^\beta}\Big)u_{n,m} = \\ = \frac{1}{\Gamma(3-\beta)}\Big(\frac{u_{n+1,m} + u_{n-1,m}}{h^\beta} + \frac{u_{n,m+1} + u_{n,m-1}}{l^\beta}\Big) + f_{n,m}. \tag{7}$$

Обозначим через z точку $z_{n,m} = (x_n,\, y_m)$ — центральную точку шаблона, на котором аппроксимируется уравнение (1), а через Ш(x) — весь этот шаблон, т. е. совокупность точек $z_{n,m}$, $z_{n\pm1,m}$, $z_{n,m\pm1}$. Обозначим через Ш$'(x)$ все точки шаблона Ш(x) за исключением точки z, т. е. точки $z_{n\pm1,m}$, $z_{n,m\pm1}$. Тогда уравнение (7) можно записать в виде

$$L^\beta(z)u(z) \equiv A(z)u(z) - \sum_{\xi\in \text{Ш}'(x)} B(z,\xi)u(\xi) = F(z),$$

где

$$A(z) = \frac{2}{\Gamma(3-\beta)}\Big(\frac{1}{h^\beta} + \frac{1}{l^\beta}\Big) > 0, \quad B(z,\, z_{n\pm1,m}) = \frac{1}{\Gamma(3-\beta)h^\beta} > 0,$$

$$B(z,\, z_{n,m\pm1}) = \frac{1}{\Gamma(3-\beta)l^\beta} > 0, \quad F(z) = f(x_n, y_m),$$

а краевую задачу (1), (2) в виде

$$L^{\beta}(z)u(z) = F(z), \quad z \in \omega; \qquad u(z) = \psi(z), \quad z \in \gamma. \tag{8}$$

Представим решение $u(z)$ краевой задачи (8) в виде суммы $u(z) = \widetilde{u}(z) + \overline{u}(z)$, где $\widetilde{u}(z)$ — решение однородного уравнения с неоднородным граничным условием:

$$L^{\beta}\widetilde{u}(z) = 0, \quad z \in \omega; \qquad \widetilde{u}(z) = \psi(z), \quad z \in \gamma, \tag{9}$$

а $\overline{u}(z)$ — решение неоднородного уравнения с однородным граничным условием:

$$L^{\beta}\overline{u}(z) = F(z), \quad z \in \omega; \qquad \overline{u}(z) = 0, \quad z \in \gamma. \tag{10}$$

Для задачи (8) выполняются все условия принципа максимума, следовательно,

$$\|\widetilde{u}\|_{C(\Omega)} \leqslant \|\psi\|_{C(\gamma)}, \tag{11}$$

где $\|\widetilde{u}\|_{C(\Omega)} = \max\limits_{z\in\Omega} |u(z)|$, $\|\psi\|_{C(\gamma)} = \max\limits_{z\in\gamma} |\psi(z)|$. После элементарных преобразований получим

$$u_{n,m} = \frac{1}{2(h^{\beta} + l^{\beta})}\big(l^{\beta}(u_{n+1,m} + u_{n-1,m}) + h^{\beta}(u_{n,m+1} + u_{n,m-1}) + \Gamma(3-\beta)h^{\beta}l^{\beta}f_{n,m}\big).$$

Докажем устойчивость разностной задачи (8) по правой части и по начальным данным. Для этого построим мажорантную функцию для решения задачи (10) и применим теорему сравнения [10]. В качестве мажорантной функции рассмотрим функцию

$$Y(z) = K(a^2 + b^2 - x^{\beta} - y^{\beta}), \tag{12}$$

где K — произвольная пока константа. Ясно, что $Y(z) \geqslant 0$ при всех $z \in \Omega$. Обозначим

$$D(z) = A(z) - \sum_{\xi \in Ш'(x)} B(z,\xi)$$

и вычислим

$$LY(z) \equiv D(z)Y(z) + \sum_{\xi \in Ш'(x)} B(z,\xi)\big(Y(z) - Y(\xi)\big)$$

при всех $z \in \omega$. По построению функция $LY(z)$ имеет вид

$$LY(z) = {}^{c}D_x^{\beta}Y + {}^{c}D_y^{\beta}Y.$$

Согласно определению дробной производной по Капуто при $1 < \beta \leqslant 2$ нетрудно показать, что

$${}^{c}D_x^{\beta}Y = K\Gamma(\beta+1), \quad {}^{c}D_y^{\beta}Y = K\Gamma(\beta+1).$$

Таким образом, можно считать, что $Y(z)$ является решением краевой задачи

$$LY(z) = 2K\Gamma(\beta+1), \quad z \in \omega; \qquad Y(z) = \overline{\psi}(z), \quad z \in \gamma,$$

где $\overline{\psi}(z) \geqslant 0$ — значение функции (12) при $z \in \gamma$.

Если принять

$$K = \frac{\|F\|_{C(\omega)}}{2\Gamma(\beta+1)},$$

то по отношению к задачам (9), (10) будут выполнены все условия теоремы сравнения [10], из которой следует оценка

$$\|\overline{u}\|_{C(\Omega)} \leqslant \max_{z\in\Omega} Y(z) \leqslant K(a^2+b^2). \tag{13}$$

Из оценки (13), учитывая выбор константы K, получим

$$\|\overline{u}\|_{C(\Omega)} \leqslant \frac{(a^2+b^2)}{2\Gamma(\beta+1)}\|F\|_{C(\omega)}.$$

Согласно неравенству треугольников и оценок (11) следует оценка для решения задачи (5), (6):

$$\|z\|_{C(\Omega)} \leqslant \frac{a^2+b^2}{2\Gamma(\beta+1)}\|f\|_{C(\omega)} + \|\psi\|_{C(\gamma)}. \tag{14}$$

Константы, входящие в оценку (14), не зависят от шагов сетки h и l. Данная оценка выражает собой устойчивость разностной схемы по правой части f и по граничным условиям ψ. Следовательно, разностная схема (5) однозначно разрешима и устойчива.

Докажем теперь сходимость разностной схемы и оценим её погрешность. Обозначим $\eta_{n,m} = z_{n,m} - u(x_n,\, y_m)$, где $z_{n,m}$ — решение разностной задачи (6), а $u(x,\, y)$ — решение дифференциальной задачи (1), (2). Подставляя $z_{n,m} = \eta_{n,m} + u(x_n,\, y_m)$ в уравнение (5), получим, что погрешность удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{\Gamma(3-\beta)}\Big(\frac{\eta_{n+1,m}-2\eta_{n,m}+\eta_{n-1,m}}{h^\beta} + \frac{\eta_{n,m+1}-2\eta_{n,m}+\eta_{n,m-1}}{l^\beta}\Big) = -\varphi_{n,m}, \tag{15}$$

где

$$-\varphi_{n,m} = \frac{u_{n+1,m}-2u_{n,m}+u_{n-1,m}}{\Gamma(3-\beta)h^\beta} + \frac{u_{n,m+1}-2u_{n,m}+u_{n,m-1}}{\Gamma(3-\beta)l^\beta} + f_{n,m}, \quad (x_n,y_m)\in\omega;$$

$$\eta_{n,m} = 0, \quad (x_n,y_m)\in\gamma.$$

Наложим некоторые ограничения на функцию $u(x,\, y)$. Пусть четвёртые производные решения $u(x,\, y)$ ограничены. Тогда погрешность аппроксимации, как показано выше, является величиной порядка $(4-\beta)$, т. е. существует постоянная M_1, не зависящая от h и l и такая, что $\|\varphi\|_{C(\Omega)} \leqslant M_1(h^{4-\beta}+l^{4-\beta})$. Заметим, что задача (15) отличается от разностной схемы (5) только правыми частями. Следовательно, справедлива оценка

$$\|\eta\|_{C(\Omega)} \leqslant \frac{a^2+b^2}{2\Gamma(\beta+1)}\|\varphi\|_{C(\omega)}. \tag{16}$$

Из (16) получаем неравенство $\|\eta\|_{C(\Omega)} \leqslant M_2(h^{4-\beta}+l^{4-\beta})$, где $M_2 = M_1(a^2 + {} + b^2)/\Gamma(\beta+1)$ — постоянная, не зависящая от h и l. Из этой оценки следует, что разностная схема (6) сходится и имеет порядок аппроксимации $(h^{4-\beta}+l^{4-\beta})$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 271 с. [*Nakhushev A. M.* Fractional calculus and its applications. Moscow: Fizmatlit, 2003. 271 pp.]
2. *Кольцова Э. М., Василенко В. А., Тарасов В. В.* Численные методы решения уравнений переноса во фрактальных средах // *Ж. физ. химии*, 2000. Т. 74, № 5. С. 954–956; англ. пер.: *Kol'tsova E. M., Vasilenko V. A., Tarasov V. V.* Numerical methods for solving transport equations in fractal media // *Rus. J. Phys. Chem. A*, 2000. Vol. 74, no. 5. Pp. 848–850.

3. *Головизнин В. М., Короткин И. А.* Методы численных решений некоторых одномерных уравнений с дробными производными // *Дифференц. уравнения*, 2006. Т. 42, № 7. С. 121–130; англ. пер.: *Goloviznin V. M., Korotkin I. A.* Methods for the numerical solution of some one-dimensional equations with fractional derivatives // *Differ. Equ.*, 2006. Vol. 42, no. 7. Pp. 967–973.
4. *Tadjeran C., Meerschaert M. M., Scheffler H.-P.* A second-order accurate numerical approximation for the fractional diffusion equation // *J. Comput. Phys.*, 2006. Vol. 213, no. 1. Pp. 205–213.
5. *Lynch V. E., Carreras B. A., del-Castillo-Negrete D., Ferreira-Mejias K. M., Hicks H. R.* Numerical methods for the solution of partial differential equations of fractional order // *J. Comput. Phys.*, 2003. Vol. 192, no. 2. Pp. 406–421.
6. *Liu Q., Liu F., Turner I., Anh V.* Approximation of the Lévy-Feller advection-dispersion process by random walk and finite difference method // *J. Comput. Phys.*, 2007. Vol. 222, no. 1. Pp. 57–70.
7. *Meerschaert M. M., Tadjeran C.* Finite difference approximations for two-sided space-fractional partial differential equations // *Appl. Numer. Math.*, 2006. Vol. 56, no. 1. Pp. 80–90.
8. *Бейбалаев В. Д.* Численный метод решения задачи переноса с двусторонней производной дробного порядка // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2009. № 1(18). С. 267–270. [*Beybalaev V. D.* Numerical Method of Solution of the Problem on Transposition of Two-sided Derivative of the Fractional Order // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2009. no. 1(18). Pp. 267–270].
9. *Бейбалаев В. Д.* Математическая модель теплопереноса в средах с фрактальной структурой // *Матем. моделирование*, 2009. Т. 21, № 5. С. 55–62; англ. пер.: *Beybalayev V. D.* Mathematical model of heat transfer in fractal structure mediums // *Math. Models Comput. Simul.*, 2010. Vol. 2, no. 1. Pp. 91–97.
10. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Численные методы. М.: Наука, 1989. 432 с. [*Samarskiy A. A., Gulin A. V.* Numerical methods. Moscow: Nauka, 1989. 432 pp.]

Поступила в редакцию 22/IV/2011;
в окончательном варианте — 12/XII/2011.

MSC: 39A14; 35R11, 26A33, 45K05

ON THE NUMERICAL SOLUTION OF THE DIRIHLET'S PROBLEM FOR THE POISSON'S EQUATION WITH FRACTIONAL ORDER DERIVATIVES

V. D. Beybalaev

Daghestan State University,
43 a, M. Gadzhieva st., Makhachkala, 367025, Russia.

E-mail: `kaspij_03@mail.ru`

Difference approximation for the Caputo fractional derivative of the $4-\beta$, $1<\beta\leqslant 2$, order is obtained in the work. The difference schemes for solving the Dirichlet's problem for the Poisson's equation with fractional derivatives are developed. The right part and initial data stability of difference problem and its convergence are proved.

Key words: *Poisson's equation, Dirichlet's problem, fractional order derivative, numerical method, approximation, difference problem.*

Original article submitted 22/IV/2011;
revision submitted 12/XII/2011.

Vetlugin D. Beybalaev (Ph. D. (Phys. & Math.)), Associate Professor, Dept. of Applied Mathematics.