

УДК 517.958:539.3(4)

ПОЛУЧЕНИЕ ТОЧНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ МНОГОСЛОЙНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ

В. А. Кудинов, А. В. Еремин, Е. В. Котова

Самарский государственный технический университет,
443100, Россия, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mail: totig@yandex.ru

Рассмотрен алгоритм получения точных аналитических решений задач термоупругости для многослойных конструкций в случае, когда упругие характеристики материала в пределах каждого слоя постоянны. Приведены решения конкретных задач термоупругости для двухслойного полого цилиндра со свободными от нагрузки поверхностями и неравномерным в пределах слоев температурным полем, а также задачи термоупругости для двухслойного полого цилиндра с нагрузкой на поверхности внутреннего слоя и закреплённой поверхностью наружного. Температурное состояние каждого из слоев задано в виде аналитической зависимости от пространственной переменной.

Ключевые слова: задача термоупругости, точное аналитическое решение, многослойный полый цилиндр, плоская деформация, термонапряжённое состояние.

При проектировании многослойных композиционных материалов необходимо обеспечивать прочность и работоспособность конструкции в заданных температурных интервалах. Для получения аналитического решения задачи термоупругости необходимо иметь соответствующее аналитическое решение задачи теплопроводности. В работах [1, 2] на основе использования ортогональных методов взвешенных невязок рассмотрены методы, позволяющие получать достаточно простого вида приближенные аналитические решения краевых задачи для многослойных конструкций, удобные применительно к решению задач термоупругости. С использованием этих методов, в работе [1] дана последовательность получения приближенных аналитических решений задач термоупругости для многослойных конструкций с переменными в пределах каждого слоя физическими свойствами среды.

В случае, когда упругие характеристики материала в пределах каждого слоя являются постоянными величинами, можно получить не только приближенные, но и точные аналитические решения задач термоупругости для многослойных конструкций. В качестве конкретного примера рассмотрим задачу термоупругости для двухслойного длинного полого цилиндра (рис. 1) в случае его плоской деформации, обусловленной плоским осесимметричным температурным полем. При этом будем считать, что на внутренней и наружных поверхностях цилиндра

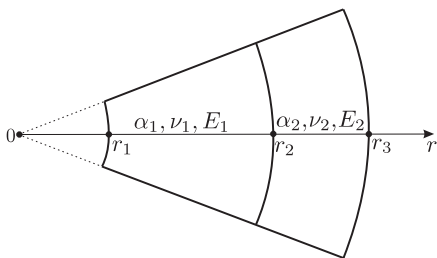


Рис. 1. Схема двухслойного полого цилиндра

нагрузка отсутствует и, следовательно, напряжения возникают лишь от действия неравномерного по пространственной переменной температурного поля.

Василий Александрович Кудинов (д.ф.-м.н., проф.), зав. кафедрой, каф. теоретических основ теплотехники и гидромеханики. *Антон Владимирович Еремин*, аспирант, каф. теоретических основ теплотехники и гидромеханики. *Евгения Валериевна Котова*, аспирант, каф. теоретических основ теплотехники и гидромеханики.

Математическая постановка в данном случае имеет вид

$$\frac{d^2 U_i}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU_i}{dr} - \frac{U_i}{r^2} - \frac{1 + \nu_i}{1 - \nu_i} \alpha_i \frac{dT_i}{dr} = 0 \quad (r_i \leq r \leq r_{i+1}; i = 1, 2); \quad (1)$$

$$\sigma_{r1}(r_1) = 0, \quad \sigma_{r2}(r_3) = 0; \quad (2)$$

$$\sigma_{r1}(r_2) = \sigma_{r2}(r_2), \quad U_1(r_2) = U_2(r_2), \quad (3)$$

где U_i — перемещение i -того слоя; r — радиальная координата; ν_i — коэффициент Пуассона i -того слоя; α_i — коэффициент линейного расширения i -того слоя; $T_i(r)$ — температура в i -том слое; $\sigma_{r,i}$ ($i = 1, 2$) — радиальная компонента тензора напряжений в i -том слое.

Общий интеграл уравнения (1) записывается в виде [3, 4]

$$U_i = C_{1i}r + \frac{C_{2i}}{r} + \frac{(1 + \nu_i)\alpha_i}{(1 - \nu_i)r} \int_{r_i}^r T_i(r)rdr \quad (r_i \leq r \leq r_{i+1}; i = 1, 2), \quad (4)$$

где C_{1i}, C_{2i} — постоянные интегрирования.

Формулы для определения радиальных $\sigma_{ri}(r)$ и окружных $\sigma_{\theta i}(r)$ компонент тензора напряжений в i -том слое имеют вид

$$\sigma_{ri}(r) = \frac{C_{1i}E_i}{(1 + \nu_i)(1 - 2\nu_i)} - \frac{C_{2i}E_i}{(1 + \nu_i)r^2} - \frac{\alpha_i E_i}{(1 - \nu_i)r^2} \int_{r_i}^r T_i(r)rdr; \quad (5)$$

$$\sigma_{\theta i}(r) = \frac{C_{1i}E_i}{(1 + \nu_i)(1 - 2\nu_i)} + \frac{C_{2i}E_i}{(1 + \nu_i)r^2} - \frac{\alpha_i E_i}{1 - \nu_i} T_i(r) + \frac{\alpha_i E_i}{(1 - \nu_i)r^2} \int_{r_i}^r T_i(r)rdr. \quad (6)$$

Для определения постоянных интегрирования C_{1i}, C_{2i} используются граничные условия (2), и условия сопряжения (3). В итоге получаем систему алгебраических линейных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} C_{11}D_1 + C_{12}D_2/r_1^2 &= 0; \\ C_{11}D_1 + C_{12}(D_2/r_2^2 + B_2) + C_{22}B_3 + B_1 &= 0; \\ C_{11}r_2 + C_{12}/r_2 + D_3 - C_{21}r_2 - C_{22}/r_2 &= 0; \\ C_{21}B_3 + C_{22}D_4 - D_5 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где

$$B_1 = \frac{\alpha_i E_i}{(1 - \nu_i)r_2^2} \int_{r_i}^{r_2} T_i(r)rdr, \quad B_2 = \frac{E_2}{(1 + \nu_2)(1 - 2\nu_2)}, \quad B_3 = \frac{E_2}{(1 + \nu_2)r_2^2};$$

$$D_1 = \frac{E_1}{(1 + \nu_1)(1 - 2\nu_1)}, \quad D_2 = \frac{E_1}{(1 + \nu_1)}, \quad D_3 = \frac{(1 + \nu_1)\alpha_1}{(1 - \nu_1)r_2} \int_{r_1}^{r_2} T_1(r)rdr,$$

$$D_4 = \frac{E_2}{(1 + \nu_2)r_3^2}, \quad D_5 = \frac{E_2\alpha_2}{(1 - \nu_2)r_3} \int_{r_2}^{r_3} T_2(r)rdr.$$

После определения постоянных интегрирования из решения системы уравнений (7) перемещения и напряжения находятся по формулам (4)–(6).

В качестве конкретного примера рассмотрим решение задачи термоупругости при следующих исходных данных: $\alpha = 15 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$; $\alpha_2 = 11 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$; $E_1 = 19,5 \cdot 10^9 \text{ кг/м}^2$; $E_2 = 13 \cdot 10^9 \text{ кг/м}^2$; $\nu_1 = \nu_2 = 0,2$; $r_1 = 14 \text{ мм}$; $r_2 = 39 \text{ мм}$; $r_3 = 55 \text{ мм}$.

Распределение температуры в двухслойном цилиндре дано на рис. 2. Температурные кривые для каждого слоя аппроксимировались функцией вида

$$T_i(r) = a_i + b_i r \quad (i = 1, 2),$$

где $a_1 = 63,69$; $b_1 = -812,5$; $a_2 = 138,08$; $b_2 = -2720$.

Графики распределения радиальных σ_r и окружных σ_θ компонент тензора напряжений приведены на рис. 3. Их анализ позволяет заключить, что на внутренней поверхности цилиндра радиальные напряжения отсутствуют. Окружные напряжения σ_θ в точке контакта слоев ($r = r_2$) имеют разрыв, причём в первом слое напряжения сжатия при $r = r_1$ переходят в напряжения растяжения при $r = r_2$. По всей толщине второго слоя имеют место напряжения растяжения.

Рассмотрим решение уравнения (1) с граничными условиями

$$\sigma_{r1}(r_1) = -P, \quad U_2(r_3) = 0 \tag{8}$$

и условиями сопряжения (3). Система алгебраических уравнений (7) для определения констант интегрирования запишется так:

$$\left. \begin{aligned} C_{11}D_1 + C_{12}D_2/r_1^2 + P &= 0; \\ C_{11}D_1 + C_{12}(D_2/r_2^2 + B_2) + C_{22}B_3 + B_1 &= 0; \\ C_{11}r_2 + C_{12}/r_2 + D_3 - C_{21}r_2 - C_{22}/r_2 &= 0; \\ C_{21}r_3 + C_{22}r_3 + D_6 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Здесь

$$D_6 = \frac{(1 + \nu_2)\alpha_2}{(1 - \nu_2)r_3} \int_{r_2}^{r_3} T_2(r)rdr.$$

Результаты расчётов компонент σ_r , σ_θ в этом случае приведены на рис. 4. Анализ позволяет заключить, что при граничных условиях (8) компоненты σ_r , σ_θ имеют отрицательный знак, то есть являются сжимающими.

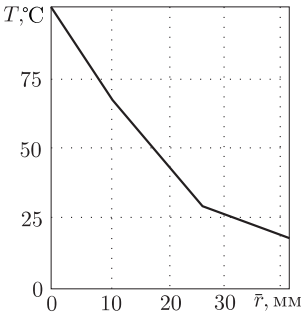


Рис. 2. Распределение температуры в двухслойном полом цилиндре ($\bar{r} = r - r_1$)

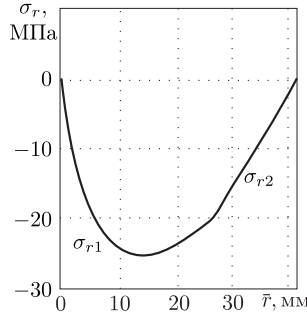


Рис. 3. Распределение радиальной и окружной компонент тензора напряжений в двухслойном полом цилиндре при свободных от нагрузки поверхностях ($\bar{r} = r - r_1$)

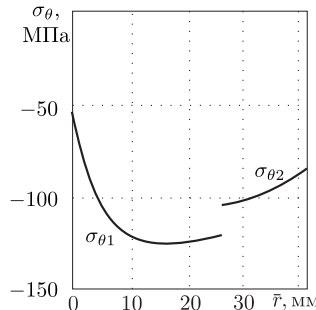
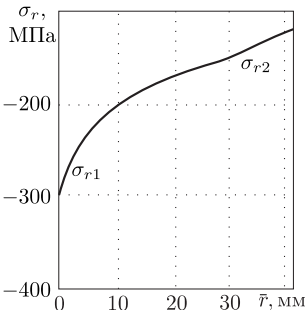
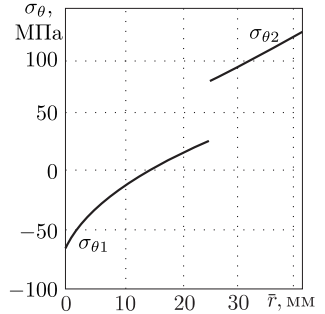


Рис. 4. Распределение радиальной и окружной компонент тензора напряжений в двухслойном полом цилиндре при нагрузке на внутренней поверхности цилиндра $P = -300$ МПа ($\bar{r} = r - r_1$)

Выводы. Разработана методика получения точных аналитических решений задач термоупругости для многослойных конструкций (плоское напряженное состояние, плоская деформация). Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы: 1) значительные температурные напряжения возникают в стационарном тепловом режиме за счет различия числовых значений модулей упругости и коэффициентов линейного температурного расширения материалов тел, находящихся в контакте; 2) на поверхности контакта слоев цилиндрической конструкции имеет место скачок окружных напряжений вследствие непрерывности перемещений.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Кудинов В. А., Карташов Э. М., Калашников В. В.* Аналитические решения задач теплопереноса и термоупругости для многослойных конструкций. М.: Высш. шк., 2005. 430 с. [*Kudinov V. A., Kartashov É. M., Kalashnikov V. V.* Analytical solutions of problem of heat and mass transfer and thermoelasticity for multilayered structures. Moscow: Vyssh. shk., 2005. 430 pp.]
2. *Кудинов В. А., Карташов Э. М., Стефанюк Е. В.* Техническая термодинамика и теплопередача. М.: Юрайт, 2011. 550 с. [*Kudinov V. A., Kartashov É. M., Stefanyuk E. V.* Technical Thermodynamics and Heat Transfer. Moscow: Yurayt, 2011. 550 pp.]
3. *Карташов Э. М., Кудинов В. А.* Аналитическая теория теплопроводности и прикладной термоупругости. М.: Librokom, 2012. 652 с. [*Kartashov É. M., Kudinov V. A.* Analytical Theory of Heat Conduction and Applied Thermoelasticity. Moscow: Librokom, 2012. 652 pp.]
4. *Timoshenko S. P., Goodier J. N.* Theory of elasticity. New York: McGraw-Hill, 1969. 567 pp.; русск. пер.: *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. М.: Наука, 1979. 569 с.

Поступила в редакцию 12/IV/2012;
в окончательном варианте — 18/V/2012.

MSC: 74F05; 74C05, 80A20

OBTAINING EXACT ANALYTICAL SOLUTIONS OF THE THERMOELASTICITY PROBLEM FOR MULTILAYER CYLINDRICAL STRUCTURES

V. A. Kudinov, A. V. Eremin, E. V. Kotova

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia.

E-mail: totig@yandex.ru

This article is told about obtaining exact analytical solutions of the thermoelasticity problem for multilayer construction and also contains its algorithm when elastic properties of each layers were constant. As an example was solver specific problem for double layer hollow cylinder with set load at the inner surface and rigidly fixed at the external surface. Thermal state of each layer was set as a function of spatial variable.

Key words: *thermoelasticity problem, exact analytical solution, multilayer hollow cylinder, thermostressed state.*

Original article submitted 12/IV/2012;
revision submitted 18/V/2012.

Vasily A. Kudinov (Dr. Sci. (Phys. & Math.)), Head of Dept., Dept. of Theoretical Basis of Heat Engineering & Flow Mechanics. *Anton V. Eremin*, Postgraduate Student, Dept. of Theoretical Basis of Heat Engineering & Flow Mechanics. *Evgeniya V. Kotova*, Postgraduate Student, Dept. of Theoretical Basis of Heat Engineering & Flow Mechanics.