Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2011. № 4 (25). С. 18–24

Дифференциальные уравнения

УДК 517.977.57

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ФУНКЦИОНАЛОМ КАЧЕСТВА ОБЩЕГО ВИДА

***Н. А. Манакова*[1], *А. Г. Дыльков*[2]**

[1] Южно-Уральский государственный университет,
454080, Челябинск, пр. Ленина, 76.
[2] Магнитогорский государственный университет,
455038, Магнитогорск, пр. Ленина, 114.

E-mails: manakova@hotbox.ru, dylkov@yandex.ru

Найдены достаточные условия существования оптимального управления решениями начально-конечной задачи для линейного уравнения соболевского типа с функционалом качества общего вида.

Ключевые слова: *уравнения соболевского типа, оптимальное управление, начально-конечная задача.*

Введение. Пусть $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{U}$ — гильбертовы пространства, операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{X};\mathfrak{Y})$, а оператор $B \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{Y})$, функции $u : [0,\tau) \subset \mathbb{R}_+ \to \mathfrak{U}$, $y : [0,\tau) \subset \mathbb{R}_+ \to \mathfrak{Y}\,(\tau < \infty)$ подлежат дальнейшему определению. Введём в рассмотрение L-резольвентное множество $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y};\mathfrak{X})\}$ и L-спектр $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$ оператора M (см. [1, гл. 4]).

Пусть оператор M (L,p)-ограничен, тогда существуют аналитические группы операторов

$$X^t = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R^L_\mu(M)e^{\mu t}d\mu \quad \text{и} \quad Y^t = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma L^L_\mu(M)e^{\mu t}d\mu,$$

где $t \in \mathbb{R}$, $\Gamma \subset \mathbb{C}$ — замкнутый контур, ограничивающий область, содержащую $\sigma^L(M)$, $R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1}L$, $L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ — соответственно правая и левая L-резольвенты оператора M. Положим $\mathfrak{X}^0(\mathfrak{Y}^0) = \ker X^\bullet(\ker Y^\bullet)$, $\mathfrak{X}^1(\mathfrak{Y}^1) = \operatorname{im} X^\bullet(\operatorname{im} Y^\bullet)$ и обозначим через $L_k(M_k)$ сужение оператора $L(M)$ на $\mathfrak{X}^k$, $k = 0, 1$.

Пусть далее, L-спектр оператора M представим в виде

$$\sigma^L(M) = \sigma^L_{\rm in}(M) \cup \sigma^L_{\rm fin}(M),\ \ \sigma^L_{\rm in}(M) \cap \sigma^L_{\rm fin}(M) = \emptyset.$$

Операторы $P = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma R^L_\mu(M)d\mu$, $Q = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma L^L_\mu(M)d\mu$ — проекторы, $P \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$, $Q \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y})$.

Наталья Александровна Манакова (к.ф.-м.н., доц.), доцент, каф. уравнений математической физики. *Андрей Геннадьевич Дыльков*, аспирант, каф. математического анализа.

Аналогично построим проекторы P_{fin} и P_{in}:

$$P_{\text{fin}} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} R^L_\mu(M)d\mu, \quad P_{\text{in}} = P - P_{\text{fin}}.$$

Здесь контур $\gamma \in \mathbb{C}$ ограничивает область, содержащую $\sigma^L_{\text{fin}}(M)$.

Теорема. *Пусть $\sigma^L(M) = \sigma^L_{\text{fin}}(M) \cup \sigma^L_{\text{in}}(M)$, причём $\sigma^L_{\text{fin}}(M)$ содержится в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{C}$ с кусочно гладкой границей $\partial\Omega$ и $\partial\Omega \cap \sigma^L(M) = \emptyset$. Тогда существуют проекторы $P_{\text{fin}} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ и $Q_{\text{fin}} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$ такие, что операторы $L \in \mathcal{L}(\ker P_{\text{fin}}; \ker Q_{\text{fin}}) \cup \mathcal{L}(\operatorname{im} P_{\text{fin}}; \operatorname{im} Q_{\text{fin}})$ и $M \in \mathcal{L}(\ker P_{\text{fin}}; \ker Q_{\text{fin}}) \cup \mathcal{L}(\operatorname{im} P_{\text{fin}}; \operatorname{im} Q_{\text{fin}})$.*

Для линейного уравнения соболевского типа

$$L\dot{x} = Mx + y + Bu \tag{1}$$

рассмотрим начально-конечную задачу

$$P_{\text{in}}(x(0) - x_0) = 0, \quad P_{\text{fin}}(x(\tau) - x_\tau) = 0, \tag{2}$$

где $\tau \in \mathbb{R}_+$ (для определённости можно считать $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$), x_0, $x_\tau \in \mathfrak{X}$.

Задача (2) для линейных уравнений соболевского типа впервые появилась в работах Г. А. Свиридюка и С. А. Загребиной [2]. В дальнейшем данная задача была названа «начально-конечной», и в настоящее время уже есть результаты о начально-конечных задачах для уравнений соболевского типа высокого порядка [3].

Нас будет интересовать задача оптимального управления, которая заключается в отыскании такой пары $(x_0, u_0) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{U}_{\text{ad}}$, где x_0 является решением задачи (1), (2) и выполняется соотношение

$$J(x_0, u_0) = \inf_{(x,u)\in\mathfrak{X}\times\mathfrak{U}_{\text{ad}}} J(x, u). \tag{3}$$

Здесь $J(x, u)$ — некоторый функционал качества; управление $u \in \mathfrak{U}_{\text{ad}}$, где $\mathfrak{U}_{\text{ad}}$ — некоторое замкнутое и выпуклое множество в пространстве управлений $\mathfrak{U}$. Таким образом, оптимальное управление решениями задачи (1)–(3) даёт возможность минимизировать штрафные санкции.

Впервые задача оптимального управления для линейных уравнений соболевского типа (1) появилась в работах Г. А. Свиридюка и А. А. Ефремова [1, гл. 7]. В данных работах рассматривается специальным образом построенный функционал стоимости

$$J(x, u) = \sum_{q=0}^{1}\int_0^\tau ||z^{(q)} - z_0^{(q)}||^2_{\mathfrak{Z}} dt + \sum_{q=0}^{p+1}\int_0^\tau \left\langle N_q u^{(q)}, u^{(q)}\right\rangle_{\mathfrak{U}} dt, \tag{4}$$

где p является высотой M-присоединённых векторов оператора L [1, гл. 3]. В дальнейшем Г. А. Свиридюком была выдвинута гипотеза о том, что можно рассматривать функционал стоимости более общего вида

$$J(x, u) = \alpha\sum_{q=0}^{1}\int_0^\tau ||z^{(q)} - z_0^{(q)}||^2_{\mathfrak{Z}} dt + \beta\sum_{q=0}^{k}\int_0^\tau \left\langle N_q u^{(q)}, u^{(q)}\right\rangle_{\mathfrak{U}} dt,$$

где $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta = 1$, $0 \leqslant k \leqslant p+1$. В прикладных задачах функционал стоимости (4) накладывает дополнительные условия на отыскание оптимального управления. При данной постановке минимизируется не только само управление, но и $p+1$ производная функции u, что в прикладных задачах не всегда имеет смысл.

Уравнения соболевского типа составляют обширную область неклассических уравнений математической физики (см. обстоятельные обзоры в [4, 5]). Оптимальное управление линейными уравнениями с условиями Коши, как уже было сказано, впервые изучалось в [1, гл. 7]. Задача (2) является обобщением задачи Шоуолтера—Сидорова [2]. В работе [6] предложен численный алгоритм нахождения решения задачи оптимального управления для линейных уравнений соболевского типа. Оптимальное управление решениями задачи Шоуолтера—Сидорова для полулинейных уравнений соболевского типа рассматривалось в [7]. Наш подход основан на идеях и методах [1, 8, 9].

1. Сильные решения. Для линейного неоднородного уравнения соболевского типа

$$L\dot{x} = Mx + y \tag{5}$$

рассмотрим начально-конечную задачу (2).

Теорема [2]. *Пусть оператор M (L,p)-ограничен, причём выполнены условия теоремы из введения. Тогда для любых $x_0, x_\tau \in \mathfrak{X}$ и вектор-функции $y \in C^p([0,T];\mathfrak{Y}) \cap C^{p+1}((0,T);\mathfrak{Y})$ существует единственное решение задачи* (5), (2), *которое имеет вид*

$$x(t) = -\sum_{q=0}^{p}(M_0^{-1}L_0)^q M_0^{-1}\frac{d^q}{dt^q}y^0(t) + U_{\text{in}}^t x_0 + \int_0^t R_{\text{in}}^{t-s}y^{\text{in}}(s)ds+$$
$$+ U_{\text{fin}}^{t-\tau}x_\tau - \int_t^\tau R_{\text{fin}}^{t-s}y^{\text{fin}}(s)ds, \tag{6}$$

где

$$U_{\text{in}}^t = (2\pi i)^{-1}\left(\int_\Gamma R_\mu^L(M)e^{\mu t}d\mu - \int_\gamma R_\mu^L(M)e^{\mu t}d\mu\right),$$
$$R_{\text{in}}^t = (2\pi i)^{-1}\left(\int_\Gamma (\mu L - M)^{-1}e^{\mu t}d\mu - \int_\gamma (\mu L - M)^{-1}e^{\mu t}d\mu\right),$$
$$U_{\text{fin}}^t = (2\pi i)^{-1}\int_\gamma R_\mu^L(M)e^{\mu t}d\mu, \quad R_{\text{fin}}^t = (2\pi i)^{-1}\int_\gamma (\mu L - M)^{-1}e^{\mu t}d\mu,$$
$$y^0 = (\mathbb{I} - Q)y, \qquad y^{\text{fin(in)}} = Q_{\text{fin(in)}}y.$$

Определение. Вектор-функцию $x \in H^1(\mathfrak{X}) = \{x \in L_2(0,\tau;\mathfrak{X}) : \dot{x} \in L_2(0,\tau;\mathfrak{X})\}$ назовём *сильным решением уравнения* (5), если она п. в. на $(0,\tau)$ обращает его в тождество. Сильное решение $x = x(t)$ уравнения (5) назовём *сильным решением начально-конечной задачи*, если оно удовлетворяет (2).

В силу непрерывности вложения $H^1(\mathfrak{X}) \hookrightarrow C([0,\tau];\mathfrak{X})$ наше определение корректно. Термин «сильное решение» введён для того, чтобы отличать решение уравнения (5) в данном смысле от решения (6), которое теперь уместно называть «классическим». Заметим, что классическое решение (6) является также и сильным решением задачи (5), (2).

Построим пространство

$$H^{p+1}(\mathfrak{Y}) = \{v \in L_2(0,\tau;\mathfrak{Y}) : v^{(p+1)} \in L_2(0,\tau;\mathfrak{Y}), p \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}.$$

Пространство $H^{p+1}(\mathfrak{Y})$ — гильбертово со скалярным произведением

$$[v,w] = \sum_{q=0}^{p+1} \int_0^\tau \left\langle v^{(q)}, w^{(q)} \right\rangle_{\mathfrak{Y}} dt.$$

Пусть $y \in H^{p+1}(\mathfrak{Y})$. Введём в рассмотрение операторы

$$A_1 y(t) = -\sum_{q=0}^{p} (M_0^{-1}L_0)^q M_0^{-1} \frac{d^q}{dt^q} y^0(t), \quad k_1(t) = U_{\text{in}}^t x_0,$$

$$A_2 y(t) = \int_0^t R_{\text{in}}^{t-s} y^{\text{in}}(s) ds, \quad k_2(t) = U_{\text{fin}}^{t-\tau} x_\tau, \quad A_3 y(t) = \int_t^\tau R_{\text{fin}}^{t-s} y^{\text{fin}}(s) ds.$$

Лемма. *Пусть оператор M (L,p)-ограничен. Тогда*

(i) $A_1 \in \mathcal{L}(H^{p+1}(\mathfrak{Y}), H^1(\mathfrak{X}))$;
(ii) *при любом $x_0 \in \mathfrak{X}$ вектор-функция $k_1 \in C^1([0,\tau);\mathfrak{X})$*;
(iii) $A_2 \in \mathcal{L}(H^{p+1}(\mathfrak{Y}), H^1(\mathfrak{X}))$;
(iv) *при любом $x_\tau \in \mathfrak{X}$ вектор-функция $k_2 \in C^1([0,\tau);\mathfrak{X})$*;
(v) $A_3 \in \mathcal{L}(H^{p+1}(\mathfrak{Y}), H^1(\mathfrak{X}))$.

Теорема. *Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Тогда для любых $x_0, x_\tau \in \mathfrak{X}$ и $y \in H^{p+1}(\mathfrak{Y})$ существует единственное сильное решение задачи* (2) *для уравнения* (5).

Доказательство. Поскольку мы уже имеем классическое решение (которое является сильным), покажем его единственность. Действуя на уравнение (5) последовательно проекторами $\mathbb{I} - Q$ и $Q_{\text{fin(in)}}$ и пользуясь теоремой из введения, сведём его к эквивалентной системе из трёх независимых уравнений:

$$H\dot{x}^0 = x^0, x^0(0) = 0, \tag{7}$$

$$\dot{x}^{\text{fin}} = S_{\text{fin}} x^{\text{fin}}, x^{\text{fin}}(\tau) = 0, \tag{8}$$

$$\dot{x}^{\text{in}} = S_{\text{in}} x^{\text{in}}, x^{\text{in}}(0) = 0, \tag{9}$$

где $H = M_0^{-1} L_0$, $S_{\text{in(fin)}} = L_{1\text{in(fin)}}^{-1} M_{1\text{in(fin)}} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}_{\text{in(fin)}}^1)$. Здесь $x(t) = x_1(t) - x_2(t)$, где $x_1(t)$, $x_2(t)$ — два решения задачи (5), (2).

В силу нильпотентности оператора H из уравнения (7) получаем $H^{p+1}\dot{x}^0 = H^p x^0 = 0$. Продолжая этот процесс, убеждаемся, что $x^0 = 0$. Равенство нулю решений задач (8), (9) следует из ограниченности операторов S_{in}, S_{fin}. $\square$

2. Оптимальное управление. Для линейного неоднородного уравнения соболевского типа

$$L\dot{x} = Mx + y + Bu \tag{10}$$

рассмотрим начально-конечную задачу (2). Операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$, оператор $B \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{Y})$, оператор M (L, p)-ограничен.

Введём в рассмотрение пространство управлений

$$H^{p+1}(\mathfrak{U}) = \{u \in L_2(0, \tau; \mathfrak{U}) : u^{(p+1)} \in L_2(0, \tau; \mathfrak{U}), p \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}.$$

Пространство $H^{p+1}(\mathfrak{U})$ — гильбертово в силу гильбертовости $\mathfrak{U}$. Выделим в пространстве $H^{p+1}(\mathfrak{U})$ замкнутое и выпуклое подмножество $H^{p+1}_{\partial}(\mathfrak{U})$ — *множество допустимых управлений.*

Введём в рассмотрение $\mathfrak{Z}$ — некоторое гильбертово пространство наблюдений и оператор $C \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Z})$, задающий наблюдение $z(t) = Cx(t)$. Заметим, что если $x \in H^1(\mathfrak{X})$, то $z \in H^1(\mathfrak{Z})$.

Определение. Вектор-функцию $u_0 \in H^{p+1}_{\partial}(\mathfrak{U})$ назовём оптимальным управлением решениями задачи (10), (2), если

$$J(x_0, u_0) = \min_{(x,u) \in \mathfrak{X} \times H^{p+1}_{\partial}(\mathfrak{U})} J(x, u),$$

где пары $(x, u) \in \mathfrak{X} \times H^{p+1}_{\partial}(\mathfrak{U})$ удовлетворяют соотношениям (10), (2).

Нашей целью является доказательство существования единственного управления $u_0 \in H^{p+1}_{\partial}(\mathfrak{U})$, минимизирующего функционал стоимости

$$J(x, u) = \alpha \sum_{q=0}^{1} \int_0^{\tau} ||z^{(q)} - z_0^{(q)}||^2_{\mathfrak{Z}} dt + \beta \sum_{q=0}^{k} \int_0^{\tau} \left\langle N_q u^{(q)}, u^{(q)} \right\rangle_{\mathfrak{U}} dt, \tag{11}$$

где $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta = 1$, $0 \leqslant k \leqslant p + 1$, $N_q \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$, $q = 0, 1, \ldots, k$ — самосопряженные и положительно определенные операторы, $z_0 = z_0(t)$ — желаемое наблюдение. Справедлива

Теорема. *Пусть оператор M (L, p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Тогда для любых $y \in H^{p+1}(\mathfrak{Y})$, $x_0, x_\tau \in \mathfrak{X}$ существует единственное оптимальное управление решениями задачи* (10), (2).

Доказательство. По теореме из предыдущего пункта при любых $y \in H^{p+1}(\mathfrak{Y})$, $x_0, x_\tau \in \mathfrak{X}$ и $u \in H^{p+1}(\mathfrak{U})$ существует единственное сильное решение $x \in H^1(\mathfrak{X})$ задачи (10), (2), имеющее вид

$$x(t) = (A_1 + A_2 + A_3)(y + Bu)(t) + k_1(t) + k_2(t), \tag{12}$$

где операторы A_1, A_2, A_3 и вектор-функции k_1, k_2 заданы в лемме из предыдущего пункта.

Зафиксируем $y \in H^{p+1}(\mathfrak{Y})$, $x_0, x_\tau \in \mathfrak{X}$ и рассмотрим (12) как отображение $D : u \to x(u)$. Тогда отображение $D : H^{p+1}(\mathfrak{U}) \to H^1(\mathfrak{X})$ непрерывно. Поэтому функционал стоимости зависит только от u, т. е. $J(u) = J(x, u)$. Так как решение (6) уравнения (10) зависит не только от u, но и от $p+1$ производной функции u, то можно рассматривать функционал качества вида (11), что не ограничивает общности рассмотрения задачи.

Перепишем функционал стоимости (11) в виде

$$J(u) = \alpha \left\| Cx(t;u) - z_0 \right\|^2_{H^1(\mathfrak{Z})} + \beta[v,u],$$

где

$$[v,u] = \sum_{q=0}^{k} \int_0^\tau \left\langle v^{(q)}(t), u^{(q)} \right\rangle_{\mathfrak{U}} dt,$$

$v^{(q)}(t) = N_q u^{(q)}(t)$, $q = 0, \ldots, k$. Отсюда

$$J(u) = \pi(u,u) - 2\lambda(u) + \left\| z_0 - Cx(t;0) \right\|^2_{H^1(\mathfrak{Z})},$$

где

$$\pi(u,u) = \alpha \left\| C(x(t;u) - x(t;0)) \right\|^2_{H^1(\mathfrak{Z})} + \beta[v,u]$$

— билинейная непрерывная коэрцитивная форма на $H^{p+1}(\mathfrak{U})$,

$$\lambda(u) = \alpha \left\langle z_0 - Cx(t;0), C(x(t;u) - x(t;0)) \right\rangle_{H^1(\mathfrak{Z})}$$

— линейная непрерывная на $H^{p+1}(\mathfrak{U})$ форма. Значит, условия теоремы [10, гл. 1] выполнены. □

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Sviridyuk G. A., Fedorov V. E.* Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators. Utrecht, Boston: VSP, 2003. 216 pp.
2. *Свиридюк Г. А., Загребина С. А.* Задача Шоуолтера—Сидорова как феномен уравнений соболевского типа // *Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика*, 2010. Т. 3, № 1. С. 51–72. [*Sviridyuk G. A., Zagrebina S. A.* The Showalter–Sidorov problem as a phenomena of the Sobolev type equations // *Izv. Irkut. Gos. Un-ta. Ser. Matematika*, 2010. Vol. 3, no. 1. Pp. 51–72].
3. *Замышляева А. А., Юзеева А. В.* Начально-конечная задача для уравнения Буссинеска – Лява на графе // *Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика*, 2010. Т. 3, № 2. С. 18–29. [*Zamyshlyaeva A. A., Yuzeeva A. V.* The initial-finish value problem for the Boussinesque–Love equation defined on graph // *Izv. Irkut. Gos. Un-ta. Ser. Matematika*, 2010. Vol. 3, no. 2. Pp. 18–29].
4. *Demidenko G. V., Uspenskii S. V.* Partial differential equations and systems not solvable with respect to the highest-order derivative. New York, Basel, Hong Kong: CRC Press, 2003. 511 pp.
5. *Свешников А. Г., Альшанский А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д.* Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2007. 736 с. [*Sveshnikov A. G., Al'shanskiy A. B., Korpusov M. O., Pletner Yu. D.* Linear and nonlinear equations of Sobolev type. Moscow: 2007. 736 pp.]
6. *Келлер А. В.* Численное решение задачи стартового управления для системы уравнений леонтьевского типа // *Обозрение приклад. и пром. математики*, 2009. Т. 16, № 2. С. 345–346. [*Keller A. V.* Numerical solution of start control problem for a Leontief type system of equations // *Obozrenie Priklad. Prom. Matematiki*, 2009. Vol. 16, no. 2. Pp. 345–346].
7. *Манакова Н. А.* Задача оптимального управления для уравнения Осколкова нелинейной фильтрации // *Дифференц. уравнения*, 2007. Т. 43, № 9. С. 1185–1192; англ. пер.: *Manakova N. A.* Optimal control problem for the Oskolkov nonlinear filtration equation // *Differ. Equations.* Vol. 43, no. 9. Pp. 1213–1221.

8. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 414 с. [*Lions J.-L.* Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations. Moscow: Mir, 1972. 414 pp.]
9. *Фурсиков А. В.* Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск: Научная книга, 1999. 350 с. [*Fursikov A. V.* Optimal Control of Distributed Systems. Theory and Applications. Novosibirsk: Nauchnaya Kniga, 1999. 350 pp.]

Поступила в редакцию 01/VII/2011;
в окончательном варианте — 24/VIII/2011.

MSC: 49J20; 47N20, 46E35

ON ONE OPTIMAL CONTROL PROBLEM WITH A PENALTY FUNCTIONAL IN GENERAL FORM

***N. A. Manakova*[1], *A. G. Dylkov*[2]**

[1] South Ural State University,
76, Lenin prospekt, Chelyabinsk, 454080, Russia.
[2] Magnitogorsk State University,
114, Lenin prospekt, Magnitogorsk, 455038, Russia.

E-mails: manakova@hotbox.ru, dylkov@yandex.ru

The sufficient conditions for the existence of optimal control over solutions of the initial-finish value problem for the linear equation with a penalty functional in general form are found.

Key words: *Sobolev type equation, optimal control, initial-finish value problem.*

Original article submitted 01/VII/2011;
revision submitted 24/VIII/2011.

Natal'ya A. Manakova (Ph. D. (Phys. & Math.)), Associate Professor, Dept. of Equations of Mathematical Physics. *Andrey G. Dylkov*, Postgraduate Student, Dept. of Mathematical Analysis.