Математическое моделирование

УДК 519.248: 681.5.001.3

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ ЗАДАЧИ ТИПА КОШИ ДЛЯ ОДНОГО ДРОБНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

А. С. Овсиенко

Самарский государственный технический университет,
443100, Россия, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mail: sanabella@yandex.ru

Предложен метод параметрической идентификации задачи типа Коши для дифференциальных уравнений, содержащих дробный дифференциальный оператор Римана—Лиувилля порядка $\alpha \in (0,1)$ по мгновенным значениям результатов наблюдений. В основе метода лежит вычисление среднеквадратичных оценок коэффициентов линейно-параметрической дискретной модели функции, аппроксимирующей аналитическое решение. Проведены численно-аналитические исследования, результаты которых позволяют сделать вывод о высокой эффективности предложенного метода.

Ключевые слова: *дробные дифференциальные операторы, параметрическая идентификация, линейно-параметрическая дискретная модель, разностное уравнение.*

В последние годы усиливается интерес к динамическим системам, описываемым дифференциальными уравнениями, содержащими дробные дифференциальные операторы. Этот факт легко объяснить многочисленными приложениями дробного исчисления в задачах реологии, вязкоупругости, аномальной диффузии в пористых (фрактальных) структурах, теории автоматического управления, физической химии, биологии и т. д. [1]. В связи с этим встаёт вопрос о параметрической идентификации систем, описываемых дифференциальными уравнениями с дробными производными. Отсутствие известных методов параметрической идентификации таких систем приводит к необходимости разработки эффективных методов, позволяющих определять параметры исходной системы.

Рассмотрим дифференциальное уравнение следующего вида:

$$D_{0t}^{\alpha} y - \mu y = 0, \tag{1}$$

где

$$D_{0t}^{\alpha} y = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^{\top} \frac{y(x)dx}{(t-x)^{\alpha}}$$

Анна Сергеевна Овсиенко, аспирант, каф. прикладной математики и информатики.

— дифференциальный оператор Римана—Лиувилля порядка $\alpha \in (0,1)$, $t > 0$. Для уравнения (1) рассмотрим задачу типа Коши:

$$\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-1} y = a_1. \tag{2}$$

Решение задачи (1), (2) можно представить [2] в виде

$$\tilde{y}(t) = a_1 \operatorname{Exp}(\alpha, \alpha; \mu; t), \tag{3}$$

где $\operatorname{Exp}(\sigma, \alpha; \mu; t) = t^{\alpha-1} \mathrm{E}_\sigma(\mu t^\sigma, \alpha)$ — двухпараметрическая дробная экспоненциальная функция [3],

$$\mathrm{E}_\alpha(\mu t^\alpha; \nu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu t^\alpha)^n}{\Gamma(n\alpha + \nu)}$$

— функция типа Миттаг—Леффлера [4]. Таким образом,

$$\tilde{y}(t) = a_1 t^{\alpha-1} \mathrm{E}_\alpha(\mu t^\alpha; \alpha). \tag{4}$$

Известно [4], что функция типа Миттаг—Леффлера, входящая в (4), при помощи асимптотических формул может быть представлена в виде

$$\mathrm{E}_\alpha(z; \alpha) = \frac{1}{\alpha} z^{(1-\alpha)/\alpha} \exp\left(z^{1/\alpha}\right) + H(z), \quad |z| \to \infty, \tag{5}$$

причём $|\arg z| \leqslant \gamma$, $\pi\alpha/2 < \gamma < \min\{\pi, \pi\alpha\}$,

$$H(z) = -\sum_{k=1}^{M} \frac{z^{-k}}{\Gamma(\alpha - k\alpha)} + \mathsf{O}\big(|z|^{-1-M}\big).$$

С учётом (5) выражение (4) принимает вид

$$\tilde{y}(t) = \frac{a_1}{\mu t \alpha} (\mu t^\alpha)^{1/\alpha} \exp\left((\mu t^\alpha)^{1/\alpha}\right) + a_1 t^{\alpha-1} \sum_{k=1}^{M} \frac{(\mu t^\alpha)^{-k-1} \Gamma(k\alpha + 1) \sin(\pi k \alpha)}{\pi} + \\ + \mathsf{O}\big(|\mu|^{-2-M} |t|^{-\alpha-\alpha M-1}\big). \tag{6}$$

Выражение (6) содержит параметры μ, a_1, α, которые входят в дробное дифференциальное уравнение (1) и его решение (3), и параметр M, определяющий порядок аппроксимирующей функции (6) и погрешность аппроксимации.

Поставим следующую задачу идентификации: при фиксированном значении M и известном значении α вычислить оценки параметров μ и a_1. Обозначим через $y^m(t)$ — функцию, являющуюся аппроксимацией (3) и имеющую вид

$$y^m(t) = \frac{a_1}{\mu t} \left(\frac{1}{\alpha} (\mu t^\alpha)^{1/\alpha} \exp\left((\mu t^\alpha)^{1/\alpha}\right) + \sum_{k=1}^{M} \frac{(\mu t^\alpha)^{-k} \Gamma(k\alpha + 1) \sin(\pi k \alpha)}{\pi} \right).$$

Отсюда при $M = 1$ получаем

$$y^m(t) = \frac{a_1}{\mu t}\left(1/\alpha(\mu t^\alpha)^{1/\alpha}\exp\left((\mu t^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right) + \frac{(\mu t^\alpha)^{-1}\Gamma(\alpha+1)\sin(\pi\alpha)}{\pi}\right). \qquad (7)$$

Аппроксимация (7) построена на основе асимптотического приближения (6) и является аппроксимацией функции (3), описывающей решение дробного дифференциального уравнения (1) с абсолютной погрешностью порядка $\mathsf{O}\left(|\mu^{-3}t^{-2\alpha-1}|\right)$.

Аппроксимация вида (7) может быть использована при решении задачи параметрической идентификации уравнения (1) в случае, если функция (6) является равномерным асимптотическим разложением решения дифференциального уравнения (1), т. е. отношение двух последовательных слагаемых, входящих в сумму в формуле (6), должно составлять менее одного порядка, что имеет место при выполнении соотношения

$$\left|\frac{(\mu t^\alpha)^{-2}\Gamma(\alpha+1)\sin(\pi\alpha)}{(\mu t^\alpha)^{-3}\Gamma(2\alpha+1)\sin(2\pi\alpha)}\right| \leqslant 0{,}1, \quad \text{т. е.} \quad t \geqslant \left(\frac{10\Gamma(2\alpha+1)\sin 2\pi\alpha}{\mu\Gamma(\alpha+1)\sin\pi\alpha}\right)^{1/\alpha}.$$

Очевидно, что погрешность аппроксимации функции (6) не превышает некоторой величины δ при $t > \mu^{-3/(2\alpha+1)}/\delta$. Численно-аналитические исследования предложенной аппроксимации позволяют сделать вывод о том, что выражение (5) является эффективной аппроксимацией функции типа Миттаг—Леффлера начиная с некоторого конечного значения параметра z. На рис. 1 представлены графики точного решения (4) и его аппроксимации, построенной при помощи асимптотической формулы, при значении параметра $\mu = 1$. В этом случае погрешность аппроксимации при $t > t_0 = 1$ не превышает 2,5 %.

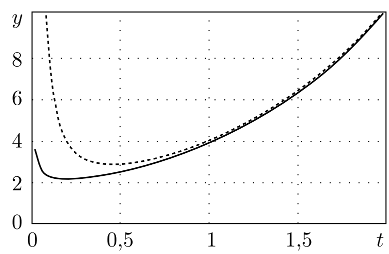

Рис. 1. График точного решения (сплошная линия) и его аппроксимации (штриховая линия)

Переобозначая коэффициенты, входящие в выражение (7), получаем

$$y^m(t) = c_0 e^{pt} + c_1 t^s, \qquad (8)$$

где

$$c_0 = \frac{a_1}{\alpha}\mu^{1/\alpha-1}, \quad p = \mu^{1/\alpha}, \quad c_1 = \frac{a_1\Gamma(\alpha+1)\sin(\pi\alpha)}{\pi\mu^2}, \quad s = -1-\alpha. \qquad (9)$$

Решим задачу параметрической идентификации процесса, описываемого уравнением (8), при помощи построения линейно-параметрических дискретных моделей (ЛПДМ). Для этого воспользуемся методом, аналогичным описанному в [5]. Полагая в выражении (8) $t = \tau(k+l)$, $k = 1, 2, \ldots, N$, где N — объём выборки; $l : t_0 = \tau l$, $t > t_0 \neq 0$; τ — период равномерной дискретизации функции $\tilde{y}^m(t)$, являющейся аппроксимацией точного решения (4) задачи (1), (2). В результате получим дискретный аналог функции $\tilde{y}^m(t)$. Рассматривая два последовательных отсчёта дискретной функции $\tilde{y}_k^m = \tilde{y}^m(\tau(k+l))$, после преобразований получаем рекуррентную формулу

$$\tilde{y}_k^m = \lambda_1 \tilde{y}_{k-1}^m + \lambda_2 (k+l)^s + \lambda_3 (k+l-1)^s, \quad k = 2, 3, \ldots, N.$$

В виде ЛПДМ и с учётом начальных значений эта формула принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \tilde{y}_1^m = \lambda_4, \\ \tilde{y}_k^m = \lambda_1 \tilde{y}_{k-1}^m + \lambda_2 (k+l)^s + \lambda_3 (k+l-1)^s, \quad k = 2, 3, \ldots, N; \end{cases} \tag{10}$$

где $\lambda_1 = \exp(p\tau)$, $\lambda_2 = c_1 \tau^s$, $\lambda_3 = -\lambda_1 \lambda_2$, $\lambda_4 = \lambda_1^{1+l} c_0 + \lambda_2 (1+l)^s$. При использовании среднеквадратичного критерия аппроксимации [6] функции (8) моделью (10) на конечном множестве точек $t_k = (k+l)\tau$, $k = 1, 2, \ldots, N$, минимизируется функционал $\|e\|^2 = \|y - \hat{y}\|^2 \to \min$, или в развернутой форме:

$$\sum_{k=1}^{N} (y_k - \hat{y}_k)^2 = \sum_{k=1}^{N} (e_k)^2 \to \min,$$

где $\hat{y}_k$ — значения функции (3), вычисленные при помощи полученных оценок коэффициентов, y_k — значения, полученные в результате эксперимента.

Вводя в систему (10) случайную аддитивную помеху ε в результатах наблюдений, получаем ЛПДМ в виде стохастических разностных уравнений. Будем считать без потери общности, что случайная помеха ε имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и некоррелированными значениями в различные моменты времени. С учётом этого ЛПДМ в форме стохастических разностных уравнений можно представить в виде

$$\begin{cases} y_1^m = \lambda_4 + \varepsilon_1; & \\ y_k^m = \lambda_1 y_{k-1}^m + \lambda_2 (k+l)^s + \lambda_3 (k+l-1)^s + \eta_k, & k = 2, 3, \ldots, N; \\ \eta_k = \varepsilon_k - \lambda_1 \varepsilon_{k-1}, & k = 2, 3, \ldots, N. \end{cases} \tag{11}$$

В матричной форме ЛПДМ будет иметь вид

$$\begin{cases} b = F\lambda + \eta, \\ \eta = P_\lambda \varepsilon; \end{cases}$$

где $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_N)^\top$ — вектор эквивалентного возмущения в стохастическом разностном уравнении, $b = (y_1, y_2, \ldots, y_N)^\top$ — вектор правой части, $\varepsilon_k = y_k^m - \tilde{y}_k^m$ — случайная помеха в результатах наблюдений, F — матрица регрессоров:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ y_1 & (2+l)^s & (1+l)^s & 0 \\ y_2 & (3+l)^s & (2+l)^s & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{N-1} & (N+l)^s & (N+l-1)^s & 0 \end{bmatrix},$$

а матрица P_λ имеет следующий вид:

$$P_\lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ -\lambda_1 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & -\lambda_1 & 1 & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & -\lambda_1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Оценки коэффициентов λ_j (11) могут быть вычислены при помощи итерационной процедуры

$$\hat{\lambda}^{(0)} = (F^\top F)^{-1} F^\top b,$$
$$\hat{\lambda}^{(i)} = (F^\top \Omega^{-1}_{\hat{\lambda}^{(i-1)}} F) F^\top \Omega^{-1}_{\hat{\lambda}^{(i-1)}} b, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

сходящейся к решению λ матричного уравнения

$$F^\top (P_{\hat{\lambda}} P_{\hat{\lambda}}^\top)^{-1} F\lambda = F^\top (P_{\hat{\lambda}} P_{\hat{\lambda}}^\top)^{-1} b.$$

Здесь $\Omega^{-1}_{\hat{\lambda}^{(i-1)}} = (P_{\hat{\lambda}^{(i-1)}} P^\top_{\hat{\lambda}^{(i-1)}})^{-1}$ — квадратная симметричная матрица размера $N \times N$,

Так как параметры ЛПДМ являются линейно-зависимыми, для корректного решения задачи идентификации необходимо применение вложенной итерационной процедуры, позволяющей сократить число параметров дискретной модели до двух. При этом целесообразно использовать последовательно две процедуры, для которых ЛПДМ имеют вид

$$\begin{cases} y_1^m = \lambda_1 \hat{c}_0 + \lambda_2, \\ y_k^m = \lambda_1 y_{k-1}^m + \lambda_2 (k+l)^s + \lambda_3 (k+l-1)^s, \quad k = 2, 3 \ldots, N; \end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{cases} y_1^m = \lambda_3, \\ y_k^m = \lambda_1 y_{k-1}^m + \lambda_2 (k+l)^s - \lambda_1 \lambda_2 (k+l-1)^s, \quad k = 2, 3 \ldots N, \end{cases} \tag{13}$$

а матрицы регрессоров F, соответственно, будут иметь вид

$$F = \begin{bmatrix} \hat{c}_0 \hat{\lambda}_1^l & (1+l)^s & 0 \\ y_1 & (2+l)^s & (1+l)^s \\ y_2 & (3+l)^s & (2+l)^s \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{N-1} & (N+l)^s & (N+l-1)^s \end{bmatrix}$$

и

$$F \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ y_1 - \hat{\lambda}_2 (1+l)^s & (2+l)^s & 0 \\ y_2 - \hat{\lambda}_2 (2+l)^s & (3+l)^s & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{N-1} - \hat{\lambda}_2 (N+l-1)^s & (N+l)^s & 0 \end{bmatrix},$$

где $\hat{c}_0 = -\hat{c}_1 \pi \big(\hat{p}^s (1+s)^2 \Gamma(-1-s) \sin \pi (1+s)\big)^{-1}$ и $\hat{\lambda}_2$ — оценки, вычисленные на предыдущем шаге по описанной методике.

С помощью итерационной процедуры (13) и с учётом (9) могут быть вычислены оценки параметров модели (8), которые известным образом связаны с коэффициентами λ_1, λ_2, λ_3:

$$\hat{p} = \frac{1}{\tau}\ln\hat{\lambda_1}, \quad \hat{c_1} = \hat{\lambda_2}\tau^s, \quad \hat{c_0} = \frac{\hat{\lambda_3} - \hat{\lambda_2}(1+l)^s}{\hat{\lambda_1}^{1+l}}. \tag{14}$$

Используя соотношения (9) и (14), вычисляем оценки коэффициентов дробного уравнения (1):

$$\hat{\mu} = \hat{p}^{\alpha}, \quad \hat{a}_1 = \alpha\hat{c}_0\hat{p}^{\alpha-1}. \tag{15}$$

В связи с тем, что количество параметров модели больше, чем число оцениваемых параметров задачи типа Коши (1), (2), проведены дополнительные исследования предложенной процедуры оценивания на основе метода простых итераций. Суть метода заключается в следующем: после вычисления оценок параметров модели при помощи описанного выше метода и пересчёта параметров по формулам (15) вычисляется новое значение параметра c_1 на основании выражения (9) и формируется новая итерационная процедура, в которой параметр c_1 фиксируется и считается известным, а в процедуре оценивания участвуют только параметры c_0 и p. В этом случае ЛПДМ принимает вид

$$\begin{cases} \tilde{y}_1^m = \lambda_2, \\ \tilde{y}_k^m = \lambda_1\tilde{y}_{k-1}^m, \quad k = 2, 3, \ldots, N, \end{cases} \tag{16}$$

где $\lambda_1 = \exp(p\tau)$, $\lambda_2 = c_0\exp\big(p\tau(1+l)\big)$. Исследования сходимости данной процедуры показали, что быстрая сходимость позволяет остановить итерационный процесс уже после первого шага. Результаты согласуются с полученными при помощи применения итерационных процедур (12) и (13). Таким образом, использование процедуры (16) позволяет сделать вывод о достоверности полученных результатов.

Проведены численно-аналитические исследования зависимости погрешности оценивания параметров модели (4), а также степени достоверности ЛПДМ-решения (4) от дробного порядка α дифференциального уравнения (1) и периода дискретизации τ.

Компьютерное моделирование динамического процесса (4) проводилось при $\alpha = 0{,}5$, $\mu = 1$, $a_1 = 0{,}7$, $N = 100$, $\tau = 0{,}02$, $t \in [1, 3]$ и его результаты представлены на рис. 2–7, на которых приведены результаты оценивания параметров при помощи первой (■) и второй (▲) итерационных процедур. Отклонение модели от точного решения на исследуемом отрезке не превосходит 2,8 %.

На рис. 2, 3 представлены результаты численно-аналитических исследований зависимости погрешности оценивания параметра a_1 и среднеквадратичного отклонения s модели от величины случайной аддитивной помехи ε. Смещение оценки параметра μ при $0 < \varepsilon < 5\,\%$ не превосходит 0,1%. На рис. 4, 5 представлены результаты численно-аналитических исследований зависимости дисперсий $\mathtt{D}$ оценок коэффициентов μ и a_1 при наличии случайной аддитивной помехи ε в результатах наблюдений. На рис. 6, 7 иллюстрируются результаты численных экспериментов исследования дисперсий $\mathtt{D}$ оценок коэффициентов μ и a_1 при наличии случайной аддитивной помехи ε в результатах наблюдений.

Полученные результаты позволяют сделать вывод о возможности применения разработанного метода для решения задач параметрической идентификации систем, описываемых при помощи дифференциальных уравнений с дробными производными при наличии небольшой аддитивной помехи в результатах наблюдений.

Таким образом, предложен эффективный способ параметрической идентификации дробных дифференциальных операторов порядка $\alpha \in (0, 1)$, осно-

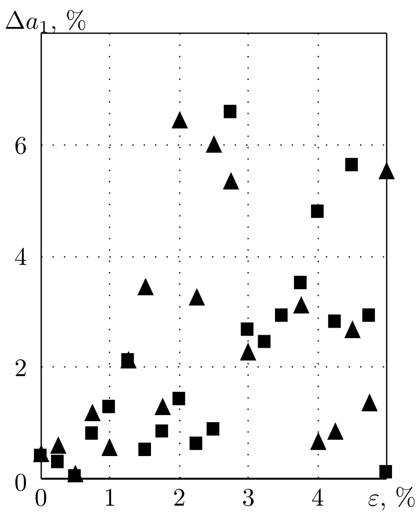

Рис. 2. Зависимость смещения оценки коэффициента a_1 от величины случайной помехи ε

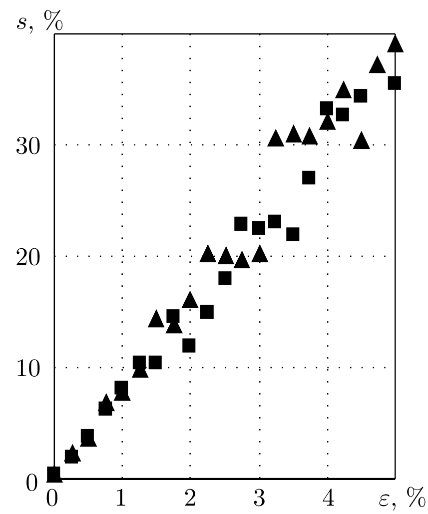

Рис. 3. Зависимость среднеквадратичного отклонения модели от величины случайной помехи ε

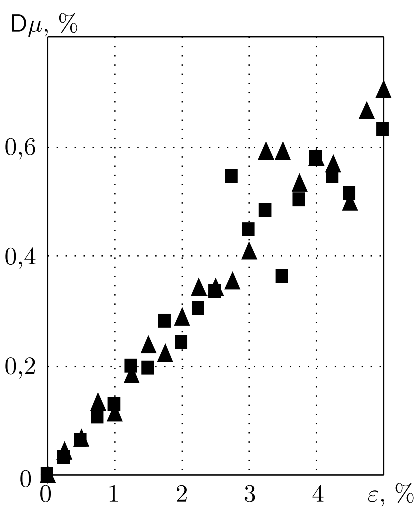

Рис. 4. Зависимость дисперсии оценки коэффициента μ от величины случайной помехи ε

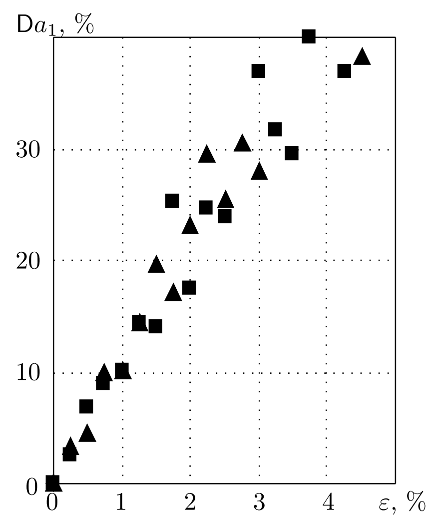

Рис. 5. Зависимость дисперсии оценки коэффициента a_1 от величины случайной помехи ε

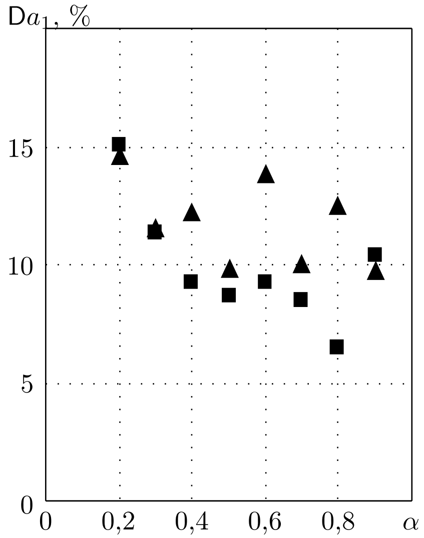

Рис. 6. Зависимость дисперсии оценки коэффициента a_1 от порядка дробного дифференциального оператора α

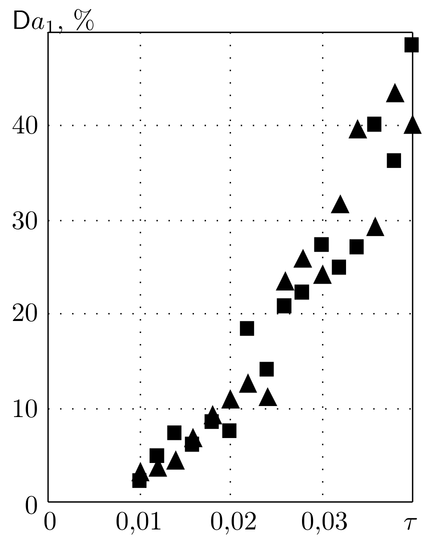

Рис. 7. Зависимость дисперсии оценки коэффициента a_1 от периода дискретизации τ

ванный на использовании аппроксимации функции типа Миттаг—Леффлера и сведении исходной задачи к вычислению оценок коэффициентов ЛПДМ. Полученные соотношения между параметрами ЛПДМ и коэффициентами дробного дифференциального уравнения позволяют свести задачу параметрической идентификации систем, описываемых дифференциальным уравнением с дробными производными, к среднеквадратичному оцениванию коэффициентов ЛПДМ. Проведены численно-аналитические исследования, которые позволяют судить о высокой эффективности предложенного метода.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations / North-Holland Mathematics Studies. Vol. 204 / ed. J. van Mill. Amsterdam: Elsevier, 2006. 523 pp.
2. *Огородников Е. Н.* Некоторые аспекты теории начальных задач для дифференциальных уравнений с производными Римана–Лиувилля // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2010. № 5(21). С. 10–23. [*Ogorodnikov E. N.* Some Aspects of Initial Value Problems Theory for Differential Equations with Riemann–Liouville Derivatives // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2010. no. 5(21). Pp. 10–23].
3. *Огородников Е. Н., Яшагин Н. С.* Некоторые специальные функции в решении задачи Коши для одного дробного осцилляционного уравнения // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2009. № 1(18). С. 276–279. [*Ogorodnikov E. N., Yashagin N. S.* Some Special Functions in the Solution To Cauchy Problem for a Fractional Oscillating Equation // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2009. no. 1(18). Pp. 276–279].
4. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. 672 с. [*Dzhrbashyan M. M.* Integral transforms and representation of functions in the complex domain. Moscow: Nauka, 1966. 672 pp.]
5. *Овсиенко А. С., Зотеев В. Е.* Параметрическая идентификация дробных осцилляторов на основе разностных уравнений / В сб.: *Труды шестой Всероссийской научной конференции с международным участием* (1–4 июня 2009 г.). Часть 4: Информационные

технологии в математическом моделировании / Матем. моделирование и краев. задачи. Самара: СамГТУ, 2009. С. 61–69. [*Zoteev V. E., Ovsienko A. S.* Parametric identification of the fractional oscillator based on difference equation / In: *Proceedings of the Sixth All-Russian Scientific Conference with international participation* (1–4 June 2009). Part 4 / Matem. Mod. Kraev. Zadachi. Samara: SamGTU, 2009. Pp. 61–69].

6. *Зотеев В. Е.* Параметрическая идентификация диссипативных механических систем на основе разностных уравнений / ред. В. П. Радченко. М.: Машиностроение-1, 2009. 344 с. [*Zoteev V. E.* Parametric identification of dissipative mechanical systems based on difference equations / ed. V. P. Radchenko. Moscow: Mashinostroenie-1, 2009. 344 pp.]

Поступила в редакцию 13/IX/2011;
в окончательном варианте — 20/II/2012.

MSC: 65P40; 37M05, 26A33

PARAMETRIC IDENTIFICATION OF CAUCHY PROBLEM FOR ONE FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATION

A. S. Ovsienko

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia.

E-mail: sanabella@yandex.ru

The method for parametric identification of Cauchy problem for a fractional differential equation with fractional differential operator of $\alpha \in (0,1)$ degree according to instantaneous values of experimental observations is suggested. The method is based on computation of mean-square estimations for coefficients of linear parametric discrete model of approximation function. Numerically-analytical investigations have been done, the results let us conclude about high efficiency of the method.

Key words: *fractional differential operators, parametric identification, linear parametric discrete model, difference equation.*

Original article submitted 13/IX/2011;
revision submitted 20/II/2012.

Anna S. Ovsienko, Postgraduate Student, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science.