

УДК 517.958:536.24

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ТЕПЛООБМЕНА  
В АППАРАТЕ ВОЗДУШНОГО ОХЛАЖДЕНИЯ МАСЛАВ. А. Кузнецов<sup>1</sup>, Л. А. Мигачева<sup>1</sup>, А. В. Стариков<sup>1</sup>, А. Р. Титов<sup>2</sup><sup>1</sup> Самарский государственный технический университет,  
443100, Россия, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.<sup>2</sup> Филиал «Самарский» ДООАО «Центрэнергогаз» ОАО «Газпром»,  
443052, Россия, Самара, Заводское ш., 77.

E-mail: kuznec4747@mail.ru

*Сформулирована и решена краевая задача, описывающая процесс нестационарного теплообмена в аппаратах воздушного охлаждения масла. Моделируются различные режимы работы таких теплообменников. Получены аналитические решения краевой задачи, соответствующие различным режимам работы аппарата воздушного охлаждения масла.*

**Ключевые слова:** уравнение теплопроводности, теплообменный процесс, задача Гретца–Нуссельта, начальные и граничные условия, разделение переменных.

Функционирование аппаратов воздушного охлаждения (АВО) масла происходит по принципу передачи излишнего тепла масла окружающей среде при его движении по трубе. Масло отдаёт теплоту стенке трубы, которая, в свою очередь, охлаждается потоком холодного воздуха, т. е. имеет место конвективный нестационарный теплообмен между маслом и материалом трубы.

Процессы тепломассопереноса, протекающие в теплообменном аппарате, описываются системой нелинейных уравнений Фурье [1]. Кроме этих уравнений задаются также граничные и начальные условия, соответствующие характеру задачи.

Рассмотрим в цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$  полубесконечную трубку внутреннего и внешнего радиусов  $r_1$  и  $r_2$  соответственно. Примем, что заданы температура горячего масла  $T_{\text{вх}}$  на входе в трубу ( $z = 0$ ), температура воздуха  $T_{\text{в}}$  и средняя скорость  $w$  прохождения масла по трубе теплообменника.

Уравнения, описывающие теплообменные процессы, протекающие в системе «масло – труба», имеют вид

$$c_1(T_1)\gamma_1(T_1)\frac{\partial T_1}{\partial \tau} = \operatorname{div}(\lambda_1(T_1)\operatorname{grad}(T_1)) - c_1(T_1)\gamma_1(T_1)\mathbf{v}(\rho)\operatorname{grad}(T_1), \quad (1)$$

$$c_2(T_2)\gamma_2(T_2)\frac{\partial T_2}{\partial \tau} = \operatorname{div}(\lambda_2(T_2)\operatorname{grad}(T_2)), \quad (2)$$

где  $\tau > 0$  – время;  $\rho = (r, \varphi, z)$  – радиус-вектор в цилиндрической системе координат;  $T_1(\rho, \tau)$  – температурное поле масла;  $T_2(\rho, \tau)$  – температурное поле трубки теплообменника;  $\lambda_1, c_1, \gamma_1$  – соответственно теплопроводность,

---

*Валерий Александрович Кузнецов* (к.ф.-м.н., доц.), доцент, каф. прикладной математики и информатики. *Людмила Алексеевна Мигачева* (к.т.н., доц.), доцент, каф. материаловедения и товарной экспертизы. *Александр Владимирович Стариков* (к.т.н., доц.), докторант, каф. электропривода и промышленной автоматизации. *Андрей Римович Титов*, зам. генерального директора.

удельная теплоёмкость и плотность масла;  $\lambda_2, c_2, \gamma_2$  — соответственно теплопроводность, удельная теплоёмкость и плотность материала трубки теплообменника;  $\mathbf{v}(\rho)$  — вектор скорости перемещения потока масла.

Уравнение (1) справедливо при  $0 < r < r_1, z > 0$ , а уравнение (2) — при  $r_1 < r < r_2$  и при тех же  $z$ .

Примем основные рабочие гипотезы, которые вытекают из особенностей протекания процессов теплообмена в АВО масла:

- 1) движение масла считаем ламинарным, так как число Рейнольдса  $Re$  для потока масла по трубе для аппаратов данного типа невелико:  $Re < Re_{кр} = 2200$  [2];
- 2) масло считаем несжимаемым и его теплофизические свойства не зависят от температуры; это же справедливо и для материала трубки теплообменника;
- 3) считается, что в потоке масла отсутствуют внутренние источники тепла, т. е. теплотой, выделяемой за счёт сил вязкого трения, будем пренебрегать;
- 4) задача обладает осевой симметрией, т. е. температура не зависит от полярного угла  $\varphi$ :  $T_{1,2}(r, \varphi, z, \tau) \equiv T_{1,2}(r, z, \tau)$ ;
- 5) тепловой поток вдоль трубы, обусловленный теплопроводностью масла, мал по сравнению с конвективным тепловым потоком при движении самого масла вдоль оси  $z$ .

Ламинарный характер движения позволяет считать, что только по оси  $z$  вектор скорости движения масла имеет ненулевую составляющую:  $\mathbf{v}(r, z) = (0, 0, v(r))$ . С учётом этого перепишем уравнения (1) и (2):

$$\frac{\partial T_1}{\partial \tau} = a_1 \left( \frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} \right) - v(r) \frac{\partial T_1}{\partial z}, \quad a_1 = \frac{\lambda_1}{c_1 \gamma_1}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial \tau} = a_2 \left( \frac{\partial^2 T_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} \right), \quad a_2 = \frac{\lambda_2}{c_2 \gamma_2}, \quad (4)$$

где  $a_1$  и  $a_2$  — температуропроводность масла и материала трубки соответственно.

Предположение 5) позволяет пренебречь в уравнении (3) второй производной по переменной  $z$ :

$$\frac{\partial T_1(r, z, \tau)}{\partial \tau} = a_1 \left( \frac{\partial^2 T_1(r, z, \tau)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_1(r, z, \tau)}{\partial r} \right) - v(r) \frac{\partial T_1(r, z, \tau)}{\partial z}. \quad (5)$$

Уравнения (4) и (5) должны решаться при соответствующих начальных и граничных условиях, отражающих специфику задачи охлаждения.

Взаимодействие температурных полей масла и трубки теплообменника задаётся с помощью граничных условий третьего рода [1, 2]. Считаем, что на поверхности трубки поддерживается температура воздуха  $T_B$ :  $T_2(r_2, z, \tau) = T_B$ .

Так как теплопроводность материала трубки (металл) значительно выше, чем теплопроводность масла, будем считать, что материал трубки играет роль идеального охладителя и всегда имеет температуру, равную температуре окружающего воздуха. Это позволяет исключить из задачи поле  $T_2(r, z, \tau)$  и уравнение (4). Обозначая  $T_1(r, z, \tau) \equiv T(r, z, \tau)$ ,  $a_1 \equiv a$ , получим вместо

(5) уравнение для нахождения теплового поля  $T(r, z, \tau)$ :

$$\frac{\partial T(r, z, \tau)}{\partial \tau} = a \left[ \frac{\partial^2 T(r, z, \tau)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T(r, z, \tau)}{\partial r} \right] - v(r) \frac{\partial T(r, z, \tau)}{\partial z}. \quad (6)$$

Уравнение (6) будем рассматривать при следующих граничных условиях:

$$T(r_1, z, \tau) = T_{\text{в}}, \quad \left. \frac{\partial T(r, z, \tau)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad \text{при } z > 0, \tau > 0, \quad (7)$$

$$T(r, 0, \tau) = T_{\text{вх}}. \quad (8)$$

Условие (7) вытекает из осесимметричного характера задачи. Начальное условие ( $\tau = 0$ ) имеет вид

$$T(r, z, 0) = T_{\text{в}} \neq T_{\text{вх}} \quad \text{при } z > 0, 0 \leq r \leq r_1. \quad (9)$$

Таким образом, для описания температурного поля масла необходимо найти решение уравнения (6) при граничных условиях (7) и (8) и начальном условии (9).

Учитывая ламинарный характер течения масла, примем параболическое распределение скорости движения масла  $v(r)$  [2]:

$$v(r) = 2w(1 - (r/r_1)^2),$$

где  $w$  — среднее интегральное значение скорости течения масла в трубке.

Для дальнейшего анализа краевой задачи (6)–(9) перейдём к безразмерному представлению всех переменных. Пусть

$$\theta(\rho, x, t) = \frac{T(\rho, x, t) - T_{\text{в}}}{T_{\text{вх}} - T_{\text{в}}}, \quad \rho = \frac{r}{r_1}, \quad x = \frac{a}{2wr_1} \frac{z}{r_1} = \frac{1}{\text{Pe}} \frac{z}{r_1}, \quad t = \frac{a}{r_1^2} \tau = \text{Fo}, \quad (10)$$

где  $\text{Pe}$  — число Пекле, которое выражает соотношение между интенсивностью переноса тепла путём конвекции и интенсивностью переноса теплоты теплопроводностью. Для нашего случая  $\text{Pe} \approx 1,5 \cdot 10^5$ ; поэтому можно пренебречь переносом тепла при помощи теплопроводности, что и было сделано ранее. Безразмерное время  $\text{Fo}$  в (10) называется числом Фурье. Оно определяет временной масштаб процесса теплопередачи.

Используя замену (10), вместо (6) получим

$$\frac{\partial \theta(\rho, x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta(\rho, x, t)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \theta(\rho, x, t)}{\partial \rho} - (1 - \rho^2) \frac{\partial \theta(\rho, x, t)}{\partial x},$$

или

$$\frac{\partial \theta(\rho, x, t)}{\partial t} + (1 - \rho^2) \frac{\partial \theta(\rho, x, t)}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \theta(\rho, x, t)}{\partial \rho} \right). \quad (11)$$

Условия (7)–(9) при данной замене перейдут соответственно в следующие:

$$\theta(1, x, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial \theta(\rho, x, t)}{\partial \rho} \right|_{\rho=0} = 0 \quad \text{при } x > 0, t > 0, \quad (12)$$

$$\theta(\rho, 0, t) = 1, \tag{13}$$

$$\theta(\rho, x, 0) = 0 \quad \text{при } x > 0, 0 \leq \rho \leq 1. \tag{14}$$

Заметим, что первое из условий (12) при  $\rho = 1, x = 0$  противоречит условию (13). Это приводит к некорректности краевой задачи. Чтобы обеспечить корректность поставленной задачи, будем считать, что условие (13) имеет вид

$$\theta(\rho, 0, t) = \theta_0(\rho) = \exp\left(-\frac{\rho^k}{1 - \rho^k}\right), \tag{15}$$

где выбор положительного числа  $k$  позволяет как угодно точно приблизить непрерывным образом условие (13) так, чтобы оно не противоречило условию (12). На рис. 1 представлены два графика, соответствующие значениям  $k = 10$  (сплошная линия) и  $k = 2$  (пунктир).

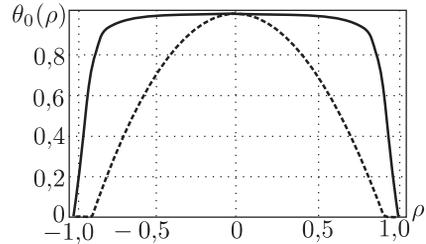


Рис. 1. Графики функции  $\theta_0(\rho)$  для  $k = 10$  (сплошная линия) и  $k = 2$  (пунктирная)

Такой выбор непрерывной (и дифференцируемой) функции  $\theta_0(\rho)$  обеспечивает согласованность условий (12) и (13).

Будем строить решение данной нестационарной задачи (11) исходя из решения аналогичной стационарной задачи, которое во многих работах называют решением Гретца—Нуссельта. При этом мы будем следовать в основном работе [4].

Решение Гретца—Нуссельта ( $\theta_1(\rho, x)$ ) — это решение уравнения (11), когда температура не зависит от времени (соответственно лишними оказываются начальные условия (14)).

Итак, требуется найти решение уравнения

$$(1 - \rho^2) \frac{\partial \theta_1(\rho, x)}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \theta_1(\rho, x)}{\partial \rho} \right), \tag{16}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$\theta_1(1, x) = 0 \quad \text{при } x > 0; \quad \theta_1(\rho, 0) = \theta_0(\rho); \quad \left. \frac{\partial \theta_1(\rho, x)}{\partial \rho} \right|_{\rho=0} = 0. \tag{17}$$

Будем решать уравнение (16) с условиями (17) методом разделения переменных, т. е. ищем решение уравнения (16) в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит только от одной переменной:

$$\theta_1(\rho, x) = R(\rho)X(x). \tag{18}$$

Подставляя (18) в (16) и разделяя переменные, получим

$$\frac{X'(x)}{X(x)} = \frac{R''(\rho) + R'(\rho)/\rho}{(1 - \rho^2)R(\rho)} = -\varepsilon^2. \tag{19}$$

Равенство (19) возможно только в том случае, когда левая и правая ей части будут постоянными величинами. Из (19) получаем

$$X'(x) = -\varepsilon^2 X(x), \quad \text{следовательно } X(x) = Ae^{-\varepsilon^2 x}, \quad (20)$$

где  $A$  — произвольная постоянная. Заметим, что величина  $-\varepsilon^2$  в правой части (19) выбирается с учётом того, что с ростом  $x$  функция  $X(x)$  должна убывать. Из (19) также следует уравнение для нахождения функции  $R(\rho)$ :

$$\rho R''(\rho) + R'(\rho) + \varepsilon^2 \rho(1 - \rho^2)R(\rho) = 0, \quad (21)$$

решение которого имеет вид

$$R(\rho) = \exp\left(-\frac{\rho^2 \varepsilon}{2}\right) \left( C_1 U\left(\frac{2 - \varepsilon}{4}, 1, \varepsilon \rho^2\right) + C_2 L\left(\frac{\varepsilon - 2}{4}, \varepsilon \rho^2\right) \right),$$

где  $U(a, b, z)$  — вырожденная гипергеометрическая функция (вторая функция Куммера);  $L(n, z)$  — ортогональные полиномы Лагерра;  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные.

Учитывая, что функция  $U(a, 1, z)$  обращается в бесконечность при  $z = 0$ , следует положить  $C_1 = 0$ . Тогда решение запишется в виде ( $C_2$  примем равной 1)

$$R(\rho) = \exp\left(-\frac{\rho^2 \varepsilon}{2}\right) L\left(\frac{\varepsilon - 2}{4}, \varepsilon \rho^2\right). \quad (22)$$

Теперь согласно (17), (20) и (22) получим решение уравнения (16):

$$\theta_1(\rho, x) = A \exp\left(-\frac{\rho^2 \varepsilon}{2}\right) L\left(\frac{\varepsilon - 2}{4}, \varepsilon \rho^2\right) e^{-\varepsilon^2 x}. \quad (23)$$

Эта функция является общим решением уравнения (16). Она должна удовлетворять ещё граничным условиям. Заметим, что функция  $\theta_1(\rho, x)$  является чётной (и дифференцируемой) функцией переменного  $\rho$ . Отсюда следует, что производная функции по этой переменной при  $\rho = 0$  обращается в ноль. Таким образом, третье условие в (17) выполняется для (23) автоматически.

Использование первого граничного условия из (17) приводит к уравнению

$$L\left(\frac{\varepsilon - 2}{4}, \varepsilon\right) = 0,$$

которое даёт счётное множество корней:  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k, \dots$  — собственных чисел. Ниже приведены некоторые значения этих чисел:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 = 2,70436, \quad \varepsilon_2 = 6,67903, \quad \varepsilon_3 = 10,6734, \quad \varepsilon_4 = 14,6711, \quad \varepsilon_5 = 18,6699, \\ \varepsilon_6 = 22,6691, \quad \varepsilon_7 = 26,6687, \quad \varepsilon_8 = 30,6683, \quad \varepsilon_9 = 34,6681, \quad \varepsilon_{10} = 38,6679, \dots \end{aligned}$$

Заметим, что приведенные значения  $\varepsilon_i$  полностью совпадают с аналогичными значениями из [2, 4].

Таким образом, все функции вида

$$\theta_{1k}(\rho, x) = A_k \exp\left(-\frac{\rho^2 \varepsilon_k}{2}\right) L\left(\frac{\varepsilon_k - 2}{4}, \varepsilon_k \rho^2\right) e^{-\varepsilon_k^2 x}$$

являются решениями уравнения (16), удовлетворяющими первому и третьему граничным условиям (17).

Учитывая линейность уравнения (15), можно записать его решение в общем случае:

$$\theta_1(\rho, x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \exp\left(-\frac{\rho^2 \varepsilon_k}{2}\right) L\left(\frac{\varepsilon_k - 2}{4}, \varepsilon_k \rho^2\right) e^{-\varepsilon_k^2 x}, \quad (24)$$

и оно будет также удовлетворять первому и третьему граничным условиям (17).

Запишем для удобства (24) в виде

$$\theta_1(\rho, x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k R_k(\rho) e^{-\varepsilon_k^2 x}, \quad (25)$$

где собственные функции  $R_k(\rho)$  имеют вид

$$R_k(\rho) = \exp\left(-\frac{\rho^2 \varepsilon_k}{2}\right) L\left(\frac{\varepsilon_k - 2}{4}, \varepsilon_k \rho^2\right). \quad (26)$$

Легко показать, используя уравнение (21), которому удовлетворяют функции (26), что они образуют ортогональную с весом  $\rho(1 - \rho^2)$  систему функций на отрезке  $[0, 1]$ , т. е. при  $n \neq m$

$$\int_0^1 \rho(1 - \rho^2) \varphi_n(\rho) \varphi_m(\rho) d\rho = 0.$$

Это даёт возможность использовать данную систему для разложения произвольной функции  $f(\rho)$  в ряд по этим функциям.

Рассмотрим теперь второе граничное условие из (17). Используя (25), запишем это условие в развернутом виде:

$$A_1 R_1(\rho) + A_2 R_2(\rho) + \dots + A_k R_k(\rho) + \dots = \theta_0(\rho).$$

Для нахождения коэффициента  $A_n$  умножим обе части этого уравнения на функцию  $\rho(1 - \rho^2) R_n(\rho)$  и проинтегрируем полученные выражения по переменной  $\rho$  от 0 до 1. Учитывая ортогональность собственных функций, легко видеть, что в левой части останется только интеграл от слагаемого с номером  $n$ . В результате, получим соотношение для определения  $A_n$ :

$$A_n \int_0^1 \rho(1 - \rho^2) R_n^2(\rho) d\rho = \int_0^1 \theta_0(\rho) \rho(1 - \rho^2) R_n(\rho) d\rho,$$

откуда

$$A_n = \int_0^1 \theta_0(\rho) \rho(1 - \rho^2) R_n(\rho) d\rho \bigg/ \int_0^1 \rho(1 - \rho^2) R_n^2(\rho) d\rho. \quad (27)$$

Таким образом, решение стационарной задачи Гретца–Нуссельта (16), (17) даётся формулой (24), а коэффициенты  $A_n$  определяются при помощи (27).

Перейдём теперь к нестационарному решению уравнения (11), которое должно удовлетворять граничным условиям (12), (15) и начальному условию (14).

Следуя [4], будем искать решение нестационарной задачи в виде

$$\theta(\rho, x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n R_n(\rho) \psi_n(x, t), \quad (28)$$

где коэффициенты  $A_n$  и собственные функции  $R_n(\rho)$  уже известны, а функции  $\psi_n(x, t)$  подлежат определению. Отметим, что неизвестные функции  $\psi_n(x, t)$  согласно (12), (13) и (14) должны удовлетворять условиям

$$\psi_n(0, t) = 1, \quad \psi_n(x, 0) = 0. \quad (29)$$

Будем предполагать [4], что функция (28) удовлетворяет усреднённому (по площади поперечного сечения теплообменной трубки) уравнению (11), которое получается из (11) путём умножения обеих частей на  $\rho d\rho$  и интегрированием левой и правой частей по переменной  $\rho$  от 0 до 1:

$$\int_0^1 \rho \frac{\partial \theta}{\partial t} d\rho + \int_0^1 \rho(1 - \rho^2) \frac{\partial \theta}{\partial x} d\rho = \left( \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \right)_{\rho=1}.$$

Далее, подставляя в это уравнение функцию (28), после элементарных преобразований придём к дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка для определения неизвестных функций  $\psi_n(x, t)$ :

$$a_n \frac{\partial \psi_n}{\partial t} + b_n \frac{\partial \psi_n}{\partial x} - c_n \psi_n = 0, \quad (30)$$

где

$$a_n = \int_0^1 \rho R_n(\rho) d\rho, \quad b_n = \int_0^1 \rho(1 - \rho^2) R_n(\rho) d\rho, \quad c_n = \left( \frac{\partial R_n(\rho)}{\partial \rho} \right)_{\rho=1}. \quad (31)$$

Согласно (27) и (31) получим

$$\varepsilon_n^2 = - \left( \frac{dR_n(\rho)}{d\rho} \right)_{\rho=1} / \int_0^1 \rho(1 - \rho^2) R_n(\rho) d\rho = -c_n/b_n.$$

Общее решение уравнения (30) имеет вид

$$\psi_n(x, t) = \exp(xc_n/b_n) \Phi(t - xa_n/b_n), \quad (32)$$

где  $\Phi(z)$  — произвольная функция. Используя условия (29), для (32) получим

$$\Phi(t) = 1, \quad \exp(xc_n/b_n) \Phi(-xa_n/b_n) = 0,$$

следовательно,  $\Phi(-xa_n/b_n) = 0$ . Отсюда, учитывая, что  $t > 0$ ,  $xa_n/b_n > 0$ , получим решение

$$\psi_n(x, t) = \exp(xc_n/b_n) \eta(t - xa_n/b_n) = \exp(-\varepsilon_n^2 x) \eta(t - xa_n/b_n), \quad (33)$$

где  $\eta(z)$  — единичная функция Хевисайда. Заметим, что функция Хевисайда совместно с аргументом  $(t - xa_n/b_n)$  имеет ярко выраженный физический смысл: она описывает фронт температурного возмущения (скачок температуры  $\theta_0(\rho)$  в начальный момент времени, переносимый потоком масла), распространяющегося от входного сечения  $x = 0$ . Можно проверить подстановкой, что эта функция удовлетворяет уравнению (30). Структура функции  $\psi_n(x, t)$  отражает процесс переноса тепла в движущемся потоке масла: до тех пор, пока горячее масло не дошло до точки с координатой  $x$ , никаких изменений температурного поля не происходит.

Итак, решение усреднённой нестационарной задачи (11)–(14) имеет вид

$$\theta(\rho, x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp\left(-\frac{\rho^2 \varepsilon_n}{2}\right) L\left(\frac{\varepsilon_n - 2}{4}, \varepsilon_n \rho^2\right) \psi_n(x, t), \quad (34)$$

где функция  $\psi_n(x, t)$  определена формулой (33).

На рис. 2 приведены поверхности безразмерной температуры (34) для различных значений времени  $t$  и различных способов аппроксимации граничного условия (13) (различные значения показателя степени  $k$  в (15)).

Используя (34), можно найти среднюю по поперечному сечению трубки теплообменника температуру масла  $\theta_s(x, t)$ :

$$\theta_s(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho \theta(\rho, x, t) d\rho = 2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n a_n \psi_n(x, t), \quad (35)$$

где величина  $a_n$  определена в (31).

Возвратимся теперь к размерным величинам, используя (10), (34):

$$T(r, z, \tau) = T_B + (T_{\text{вх}} - T_B) \cdot \theta\left(\frac{r}{r_1}, \frac{1}{r_1 \text{Pe}} z, \frac{a}{r_1^2} \tau\right). \quad (36)$$

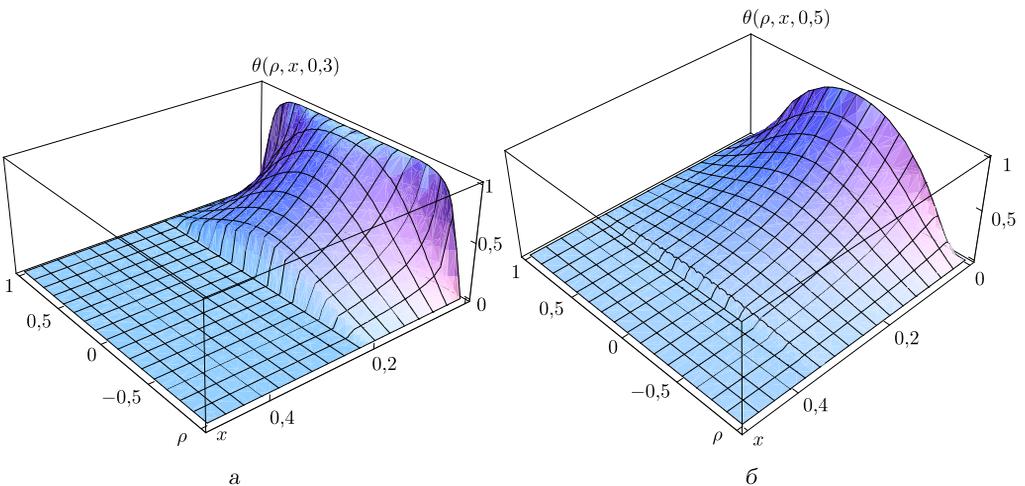


Рис. 2. Температурные поля АВО масла для различных (безразмерных) моментов времени: а)  $k = 10$  при  $t = 0,3$ ; б)  $k = 2$  при  $t = 0,5$

Средняя размерная температура найдётся аналогично с помощью (35):

$$T_s(z, \tau) = T_B + 2(T_{Bx} - T_B) \cdot \theta_s \left( \frac{1}{r_1 \text{Pe}} z, \frac{a}{r_1^2} \tau \right). \quad (37)$$

В произвольный момент времени  $\tau$  из (36) и (37) легко получить температуры масла в сечениях  $z = 0$  и  $z = L$ , а вместе с этим и разность температур, которую потерял цилиндрический объём масла при охлаждении холодным воздухом.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. М.: Высш. шк., 1967. 599 с. [*Lykov A. V.* Theory of Heat Conduction. Moscow: Vyssh. shk., 1967. 599 pp.]
2. Теория тепломассообмена / ред. А. И. Леонтьев. М.: Высш. шк., 1979. 302 с. [Theory of Heat and Mass Transfer / ed. A. I. Leontiev. Moscow: Vyssh. shk., 1979. 302 pp.]
3. *Бутковский А. Г.* Характеристики систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1979. 224 с. [*Butkovsky A. G.* Distributed Parameters Systems Characteristics. Moscow: Nauka, 1979. 224 pp.]
4. *Петухов Б. С.* Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. М.: Энергия, 1967. 412 с. [*Petukhov B. S.* Heat Transfer and Resistance in Laminar Fluid Flow Through Pipe. Moscow: Energy, 1967. 412 pp.]

Поступила в редакцию 03/IX/2011;  
в окончательном варианте — 28/I/2012.

MSC: 80A20

#### A MATHEMATICAL MODEL OF HEAT TRANSFER IN APPARATUS OF AIR COOLING OF OIL

*V. A. Kuznetsov*<sup>1</sup>, *L. A. Migacheva*<sup>1</sup>, *A. B. Starikov*<sup>1</sup>, *A. R. Titov*<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Samara State Technical University,  
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia.

<sup>2</sup> Filial Samarskii of DOAO Tsentrenergogaz OAO Gazprom,  
77, Zavodskoe sh., Samara, 443052, Russia.

E-mail: kuznec4747@mail.ru

*In this paper the boundary value problem describing the process of unsteady heat transfer in apparatus of air cooling of oil is formulated and solved. Different modes of operation of such heat exchangers are modeled. The analytical solutions of the boundary value problem corresponding to different modes of operation of apparatus of air cooling of oil are obtained.*

**Key words:** heat conduction equation, heat exchange process, Graetz–Nusselt problem, initial and boundary conditions, separation of variables.

Original article submitted 03/IX/2011;  
revision submitted 28/I/2012.

---

*Valeriy A. Kuznetsov* (Ph. D. (Phys. & Math.)), Associate Professor, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science. *Ludmila A. Migacheva* (Ph. D. (Techn.)), Associate Professor, Dept. of Materials Science & Commodity Expertise. *Alexander V. Starikov* (Ph. D. (Techn.)), Doctoral Candidate, Dept. of Electrical Drives & Industrial Automation. *Andrey R. Titov*, Deputy General Director.