УДК 517.956.3

ЗАДАЧА О ПОЛНОМ УСПОКОЕНИИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩЕГО СМЕШАННУЮ ПРОИЗВОДНУЮ

Е. А. Козлова

Самарский государственный технический университет,
443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mails: leni2006@mail.ru

В прямоугольной области рассмотрена задача граничного управления для гиперболического уравнения, содержащего смешанную производную. Управляющие функции построены в явном виде. Для различных промежутков времени получены условия для начальных данных, при которых управление возможно.

Ключевые слова: *гиперболическое уравнение, граничное управление, смешанная производная.*

Введение. В последнее время большое внимание уделяется решению разнообразных задач управления. Управлять процессом означает влиять на некоторые его параметры таким образом, чтобы перевести объект управления в нужное состояние. Многие изучаемые процессы могут быть описаны с помощью уравнений с частными производными. Задачи управления для таких уравнений были сформулированы А. Г. Бутковским [1], Ж.-Л. Лионсом [2] и другими авторами.

В работах В. А. Ильина и Е. И. Моисеева (см. [3]) была поставлена и решена следующая задача управления для уравнения колебаний струны: перевести процесс, описываемый волновым уравнением, из заданного начального состояния в заданное финальное состояние с помощью граничных управлений. Задача состоит в том, чтобы для любой пары заданных состояний установить условия, при которых управление возможно, и построить управляющие функции в явном виде. Были исследованы задачи управления для уравнений колебаний радиально-симметричной мембраны [4], неоднородной струны [5], для телеграфного уравнения [6]. Для решения этих задач авторы использовали методы, характерные для исследования процессов, имеющих волновую природу, поскольку метод разделения переменных (применяемый к задачам для уравнений параболического типа) в данном случае малоэффективен [5].

Дальнейшее обобщение задачи, поставленной В. А. Ильиным и Е. И. Моисеевым, сделали А. А. Андреев и С. В. Лексина. В работах [7–9] они сформулировали и решили задачу управления для системы волновых уравнений. При этом граничные управления, построенные авторами в явном виде, представляли собой вектор-функции. Задача была решена как при различных, так и при кратных собственных значениях матрицы системы.

Задача управления, предлагаемая в данной статье, аналогична задаче, поставленной В. А. Ильиным в [3] для уравнения колебаний струны, но сформулирована для уравнения малых колебаний гибкого стержня [10]. Поскольку процесс переводится в состояние покоя, данная задача называется задачей о

Елена Александровна Козлова, аспирант, каф. прикладной математики и информатики.

полном успокоении.

Постановка задачи. Рассмотрим в прямоугольнике $Q = [0,l] \times [0,T]$ уравнение малых колебаний гибкого стержня

$$u_{tt} + 2bu_{xt} + cu_{xx} = 0, \tag{1}$$

где b, c — некоторые постоянные, $b^2 > c$. Уравнение (1) является гиперболическим уравнением второго порядка [11]. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ выполняются условия

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{2}$$

а в момент $t = T$ —

$$u(x,T) = 0, \quad u_t(x,T) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \tag{3}$$

Необходимо за время T перевести функцию $u(x,t)$ из заданного начального состояния в нулевое финальное, то есть найти управления $\mu(t) = u(0,t)$ и $\nu(t) = u(l,t)$ при $0 \leqslant t \leqslant T$.

Решение задачи о полном успокоении. Уравнение (1) имеет два семейства характеристик [11]:

$$x - (b - \sqrt{b^2 - c})t = C_1, \quad x - (b + \sqrt{b^2 - c})t = C_2.$$

Обозначим $k_1 = b - \sqrt{b^2 - c}$, $k_2 = b + \sqrt{b^2 - c}$ и положим $k_2 > -k_1 > 0$.

Начальные условия (2) позволяют решить задачу Коши для (1) и найти $u(x,t)$ в треугольнике $\Delta_1 = \left\{k_2 t \leqslant x \leqslant k_1 t + l, 0 \leqslant t \leqslant \frac{l}{k_2 - k_1}\right\}$:

$$u(x,t) = \frac{k_2}{k_2 - k_1}\varphi(x - k_1 t) - \frac{k_1}{k_2 - k_1}\varphi(x - k_2 t) + \frac{1}{k_2 - k_1}\int_{x-k_2 t}^{x-k_1 t} \psi(z)dz.$$

Аналогично, финальные условия полностью определяют $u(x,t) = 0$ в треугольнике $\Delta_3 = \left\{k_1(t - T) \leqslant x \leqslant k_2(t - T) + l, T - \frac{l}{k_2 - k_1} \leqslant t \leqslant T\right\}$.

Рассмотрим $T < \frac{l}{k_2}$. В этом случае области Δ_1 и Δ_3 имеют общую часть, что накладывает дополнительные ограничения на функции (2). В частности, если $T < \frac{l}{k_2 - k_1}$, то должны выполняться следующие условия:

$$\begin{aligned}
k_2\varphi(-k_1 T) - k_1\varphi(x) + \int_x^{-k_1 T} \psi(z)dz = 0, \qquad & 0 \leqslant x < -k_1 T, \\
\varphi(x) = 0, \quad \psi(x) = 0, \qquad & -k_1 T \leqslant x \leqslant l - k_2 T, \\
k_2\varphi(x) - k_1\varphi(l - k_2 T) + \int_{l-k_2 T}^{x} \psi(z)dz = 0, \qquad & l - k_2 T < x \leqslant l.
\end{aligned}$$

Далее, для $\frac{l}{k_2 - k_1} \leqslant T < \frac{l}{k_2}$ условия, при которых управление возможно, имеют такой вид:

$$k_2\varphi(-k_1T) - k_1\varphi(x) + \int_x^{-k_1T}\psi(z)dz = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l - k_2T,$$
$$k_2\varphi(x) - k_1\varphi(l - k_2T) + \int_{l-k_2T}^{x}\psi(z)dz = 0, \quad -k_1T \leqslant x \leqslant l.$$

Это позволяет решить в треугольных областях $\Delta_2 = \left\{\frac{x}{k_2} \leqslant t \leqslant \frac{x}{k_1} + T,\ 0 \leqslant \leqslant x \leqslant -\frac{k_1k_2}{k_2-k_1}T\right\}$ и $\Delta_4 = \left\{\frac{x-l}{k_1} \leqslant t \leqslant \frac{x-l}{k_2} + T, l + \frac{k_1k_2}{k_2-k_1}T \leqslant x \leqslant l\right\}$ две задачи с данными на характеристиках и найти $u(x,t)$ всюду в Q:

$$u(x,t) = \frac{k_2}{k_2-k_1}\varphi(x-k_1t) - \frac{k_1}{k_2-k_1}\varphi(0) + \frac{1}{k_2-k_1}\int_0^{x-k_1t}\psi(z)dz \tag{4}$$

в Δ_2 и

$$u(x,t) = \frac{k_2}{k_2-k_1}\varphi(l) - \frac{k_1}{k_2-k_1}\varphi(x-k_2t) + \frac{1}{k_2-k_1}\int_{x-k_2t}^{l}\psi(z)dz \tag{5}$$

в Δ_4. Полагая в (4) $x = 0$, а в (5) $x = l$, получим управления

$$\mu(t) = \frac{k_2}{k_2-k_1}\varphi(-k_1t) - \frac{k_1}{k_2-k_1}\varphi(0) + \frac{1}{k_2-k_1}\int_0^{-k_1t}\psi(z)dz, \tag{6}$$

$$\nu(t) = \frac{k_2}{k_2-k_1}\varphi(l) - \frac{k_1}{k_2-k_1}\varphi(l-k_2t) + \frac{1}{k_2-k_1}\int_{l-k_2t}^{l}\psi(z)dz. \tag{7}$$

Предположим, что время успокоения $T = l/k_2$. В этом случае пересечение областей Δ_1 и Δ_3 — отрезок характеристики $x - k_2t = 0$, $-\frac{k_1}{k_2-k_1}l \leqslant x \leqslant \frac{k_2}{k_2-k_1}l$. Тогда условием разрешимости задачи управления будет

$$k_2\varphi(x) - k_1\varphi(0) + \int_0^x\psi(z)dz = 0, \quad -\frac{k_1}{k_2}l \leqslant x \leqslant l,$$

$u(x,t)$ в Δ_2, Δ_4 определяется формулами (4), (5), а управляющие функции $\mu(t)$, $\nu(t)$ — формулами (6), (7) соответственно.

Для времен $T > l/k_2$ условий (2), (3) недостаточно для нахождения $u(x,t)$ во всем рассматриваемом прямоугольнике Q, поэтому управления $\mu(t)$ и $\nu(t)$ определяются неоднозначно. Рассмотрим этот случай подробнее.

Пусть $l/k_2 < T \leqslant -l/k_1$. Доопределим начальные условия на отрезке $[l - k_2T, 0]$:

$$u(x,0) = \begin{cases} \tilde{\varphi}(x), & l - k_2T \leqslant x < 0, \\ \varphi(x), & 0 \leqslant x \leqslant l, \end{cases} \qquad u_t(x,0) = \begin{cases} \tilde{\psi}(x), & l - k_2T \leqslant x < 0, \\ \psi(x), & 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

Обозначим
$$F(t) = -\frac{k_1}{k_2-k_1}\tilde{\varphi}(t) + \frac{1}{k_2-k_1}\int_t^0\tilde{\psi}(z)dz.$$

Чтобы управление было возможным, должно выполняться соотношение

$$\frac{k_2}{k_2-k_1}\varphi(x)+\frac{1}{k_2-k_1}\int_0^x\psi(z)dz+F(l-k_2T)=0,\quad -k_1T\leqslant x\leqslant l. \tag{8}$$

Расширение промежутка задания начальных условий позволяет решить задачу Коши в треугольнике $\left\{k_2(t-T)+l\leqslant x\leqslant k_1t+l, 0\leqslant t\leqslant\frac{k_2}{k_2-k_1}T\right\}$, а затем и две задачи Гурса в областях $\left\{\frac{x-l}{k_2}+T\leqslant t\leqslant\frac{x}{k_1}+T, 0\leqslant x\leqslant-\frac{k_1}{k_2-k_1}l\right\}$, $\left\{\frac{x-l}{k_1}\leqslant t\leqslant\frac{x-l}{k_2}+T, l+\frac{k_1k_2}{k_2-k_1}T\leqslant x\leqslant l\right\}$ и построить управления в виде

$$\mu(t)=\begin{cases}\frac{k_2}{k_2-k_1}\varphi(-k_1t)+\frac{1}{k_2-k_1}\displaystyle\int_0^{-k_1t}\psi(z)dz+F(-k_2t), & 0\leqslant t<T-\frac{l}{k_2},\\ \frac{k_2(\varphi(-k_1t)-\varphi(-k_1T))}{k_2-k_1}-\frac{1}{k_2-k_1}\displaystyle\int_{-k_1t}^{-k_1T}\psi(z)dz, & T-\frac{l}{k_2}\leqslant t\leqslant T,\end{cases} \tag{9}$$

$$\nu(t)=\begin{cases}\frac{k_2}{k_2-k_1}\varphi(l)-\frac{k_1}{k_2-k_1}\varphi(l-k_2t)+\frac{1}{k_2-k_1}\displaystyle\int_{l-k_2t}^{l}\psi(z)dz, & 0\leqslant t\leqslant\frac{l}{k_2},\\ \frac{k_2}{k_2-k_1}\varphi(l)+\frac{1}{k_2-k_1}\displaystyle\int_0^{l}\psi(z)dz+F(l-k_2t), & \frac{l}{k_2}<t\leqslant T.\end{cases} \tag{10}$$

Если $T=-l/k_1$, то условие разрешимости задачи управления получается из (8) при $x=l$. Оно удовлетворяется только соответствующим выбором продолжений $\tilde{\varphi}(x)$, $\tilde{\psi}(x)$. В этом случае полное успокоение возможно при любых начальных условиях. Управления имеют вид (9), (10).

Рассмотрим промежуток управления при $T>-l/k_1$. В этом случае для решения задачи (1)–(3) необходимо доопределить начальные условия на отрезках $[l-k_2T,0]$ и $[l,-k_1T]$. Пусть

$$u(x,0)=\begin{cases}\tilde{\varphi}(x), & l-k_2T\leqslant x<0,\\ \varphi(x), & 0\leqslant x\leqslant l,\\ \tilde{\tilde{\varphi}}(x), & l<x\leqslant-k_1T,\end{cases}\qquad u_t(x,0)=\begin{cases}\tilde{\psi}(x), & l-k_2T\leqslant x<0,\\ \psi(x), & 0\leqslant x\leqslant l,\\ \tilde{\tilde{\psi}}(x), & l<x\leqslant-k_1T.\end{cases}$$

Введём также функцию

$$G(t)=\frac{k_2}{k_2-k_1}\tilde{\tilde{\varphi}}(t)+\frac{1}{k_2-k_1}\int_l^t\tilde{\tilde{\psi}}(z)dz.$$

Функции $F(t)$ и $G(t)$ (фактически $\tilde{\varphi}(x)$, $\tilde{\psi}(x)$, $\tilde{\tilde{\varphi}}(x)$, $\tilde{\tilde{\psi}}(x)$) должны удовлетворять соотношению

$$\frac{1}{k_2-k_1}\int_0^l\psi(z)dz+F(l-k_2T)+G(-k_1T)=0.$$

Как и в предыдущих случаях, решаем задачу Коши с начальными условиями и две задачи с данными на характеристиках, в результате чего получаем управления на левом и правом концах для $-l/k_1<T<l/k_2-l/k_1$:

$$\mu(t) = \begin{cases} \frac{k_2}{k_2-k_1}\varphi(-k_1t) + \frac{1}{k_2-k_1}\displaystyle\int_0^{-k_1t}\psi(z)dz + F(-k_2t), & 0 \leqslant t \leqslant T - \frac{l}{k_2}, \\ \frac{k_2}{k_2-k_1}\varphi(-k_1t) - \frac{1}{k_2-k_1}\displaystyle\int_{-k_1t}^{l}\psi(z)dz - G(-k_1T), & T - \frac{l}{k_2} < t \leqslant -\frac{l}{k_1}, \\ G(-k_1t) - G(-k_1T), & -\frac{l}{k_1} < t \leqslant T, \end{cases}$$

$$\nu(t) = \begin{cases} -\frac{k_1}{k_2-k_1}\varphi(l-k_2t) + \frac{1}{k_2-k_1}\displaystyle\int_{l-k_2t}^{l}\psi(z)dz + G(l-k_1t), & 0 \leqslant t \leqslant T + \frac{l}{k_1}, \\ -\frac{k_1}{k_2-k_1}\varphi(l-k_2t) - \frac{1}{k_2-k_1}\displaystyle\int_0^{l-k_2t}\psi(z)dz - F(l-k_2T), & T + \frac{l}{k_1} < t \leqslant \frac{l}{k_2}, \\ F(l-k_2t) - F(l-k_2T), & \frac{l}{k_2} < t \leqslant T \end{cases}$$

и для $T \geqslant l/k_2 - l/k_1$:

$$\mu(t) = \begin{cases} \frac{k_2}{k_2-k_1}\varphi(-k_1t) + \frac{1}{k_2-k_1}\displaystyle\int_0^{-k_1t}\psi(z)dz + F(-k_2t), & 0 \leqslant t \leqslant -\frac{l}{k_1}, \\ F(-k_2t) - F(l-k_2T) + G(-k_1t) - G(-k_1T), & -\frac{l}{k_1} < t \leqslant T - \frac{l}{k_2}, \\ G(-k_1t) - G(-k_1T), & T - \frac{l}{k_2} < t \leqslant T, \end{cases}$$

$$\nu(t) = \begin{cases} -\frac{k_1}{k_2-k_1}\varphi(l-k_2t) + \frac{1}{k_2-k_1}\displaystyle\int_{l-k_2t}^{l}\psi(z)dz + G(l-k_1t), & 0 \leqslant t \leqslant \frac{l}{k_2}, \\ F(l-k_2t) - F(l-k_2T) + G(l-k_1t) - G(-k_1T), & \frac{l}{k_2} < t \leqslant T + \frac{l}{k_1}, \\ F(l-k_2t) - F(l-k_2T), & T + \frac{l}{k_1} < t \leqslant T. \end{cases}$$

Таким образом, решена задача о полном успокоении для уравнения со смешанной производной. При $b = 0$, $c = -1$ (что соответствует значениям $k_1 = -1$, $k_2 = 1$) полученные результаты согласуются с результатами В. А. Ильина для волнового уравнения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Бутковский А. Г.* Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965. 474 с. [*Butkovskiy A. G.* Theory of optimal control of systems with distributed parameters. Moscow: Nauka, 1965. 474 pp.]
2. *Lions J. L.* Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équalions aux dérivées partielles. Paris: Dunod Gauthier-Villars; русск. пер.: *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 414 с.
3. *Ильин В. А.* Граничное управление процессом колебаний на двух концах в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией // *Дифференц. уравн.*, 2000. Т. 36, №11. С. 1513–1528; англ. пер.: *Il'in V. A.* Boundary control of oscillations on two ends in terms of the generalized solution of the wave equation with finite energy // *Differ. Equ.*, 2000. Vol. 36, no. 11. Pp. 1659–1675.
4. *Ильин В. А., Моисеев Е. И.* Граничное управление радиально-симметричными колебаниями круглой мембраны // *Докл. РАН*, 2003. Т. 393, №6. С. 730–734. [*Il'in V. A., Moiseev E. I.* Boundary control of radially symmetric oscillations of a round membrane // *Dokl. RAN*, 2003. Vol. 393, no. 6. Pp. 730–734].

5. *Боровских А. В.* Формулы граничного управления неоднородной струной. I // *Дифференц. уравн.*, 2007. Т. 43, № 1. С. 64–89; англ. пер.: *Borovskikh A. V.* Formulas for the boundary control of an inhomogeneous string. I // *Differ. Equ.*, 2007. Vol. 43, no. 1. Pp. 69–95.
6. *Ильин В. А., Моисеев Е. И.* Граничное управление на двух концах процессом, описываемым телеграфным уравнением // *Докл. РАН*, 2004. Т. 394, № 2. С. 154–158. [*Il'in V. A., Moiseev E. I.* Boundary control at two endpoints of a process described by the telegraph equation // *Dokl. RAN*, 2004. Vol. 394, no. 2. Pp. 154–158].
7. *Андреев А. А., Лексина С. В.* Задача граничного управления для системы волновых уравнений // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2008. № 1(16). С. 5–10. [*Andreev A. A., Leksina S. V.* The boundary control problem for the system of wave equations // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2008. no. 1(16). Pp. 5–10].
8. *Андреев А. А., Лексина С. В.* Система волновых уравнений с граничным управлением первого рода // *Вестн. Сам. гос. ун-та. Естественнонаучн. сер.*, 2008. № 2(61). С. 10–21. [*Andreev A. A., Leksina S. V.* A system of wave equations with boundary control of the first kind // *Vestn. Samar. Gos. Univ. Estestvennonauchn. Ser.*, 2008. no. 2(61). Pp. 10–21].
9. *Андреев А. А., Лексина С. В.* Задача граничного управления в условиях первой краевой задачи для системы гиперболического типа второго порядка // *Дифференциальные уравнения*, 2011. Т. 47, № 6. С. 843–849; англ. пер.: *Andreev A. A., Leksina S. V.* Boundary control problem for the first boundary value problem for a second-order system of hyperbolic type // *Differ. Equ.*, 2011. Vol. 47, no. 6. Pp. 848–854.
10. *Светлицкий В. А.* Механика гибких стержней и нитей. М.: Машиностроение, 1978. 224 с. [*Svetlitskiy B. A.* Mechanics of Flexible Rods and Threads. Moscow: Mashinostroenie, 1978. 224 pp.]
11. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с. [*Bitsadze A. V.* Some classes of partial differential equations. Moscow: Nauka, 1981. 448 pp.]

Поступила в редакцию 25/IX/2011;
в окончательном варианте — 26/XI/2011.

MSC: 35L51; 93-99, 49-99

DAMPING PROBLEM FOR THE HYPERBOLIC EQUATION WITH MIXED DERIVATIVE

E. A. Kozlova

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia.

E-mails: leni2006@mail.ru

The boundary control problem for the hyperbolic equation with mixed derivative was considered in the rectangular region. The control functions were constructed in an explicit form. The conditions of controllability for initial data were found for different periods of control.

Key words: *hyperbolic equation, boundary control, mixed derivative.*

Original article submitted 25/IX/2011;
revision submitted 26/XI/2011.

Elena A. Kozlova, Postgraduate Student, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science.