Функциональный анализ

УДК 517.983

ОБРАЩЕНИЕ И ОПИСАНИЕ НЕКОТОРЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ С L^P-ПЛОТНОСТЯМИ В НЕЭЛЛИПТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

А. В. Гиль, А. И. Задорожный, В. А. Ногин

Южный федеральный университет,
Факультет механики, математики и компьютерных наук,
344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а.

E-mails: gil-alexey@yandey.ru, simon@rsu.ru, vnogin@math.rsu.ru

Строится обращение обобщенных потенциалов Стрихарца с особенностями ядер на конечном объединении сфер в $\mathbb{R}^n$ с плотностями из пространства L^p, $1 \leqslant p \leqslant 2$ и из пространства Харди H^1 в неэллиптическом случае, когда их символы вырождаются на множестве меры нуль в $\mathbb{R}^n$. Даётся также описание рассматриваемых потенциалов в терминах обращающих конструкций.

Ключевые слова: *свёртка, осциллирующий символ, мультипликатор, обобщённая функция.*

Введение. Рассматривается оператор свёртки

$$M_\theta^{\overline{\beta}}\varphi = m_\theta^{\overline{\beta}} * \varphi \tag{1}$$

с ядром, имеющим степенные особенности на конечном объединении сфер:

$$m_\theta^{\overline{\beta}}(y) = \theta_1(|y|)(r_1^2 - |y|^2 + i0)^{\beta_1 - 1} \times \ldots \times \theta_{s-1}(|y|)\times \\ \times r_{s-1}^2 - |y|^2 + i0)^{\beta_{s-1}-1}\theta_s(|y|)(1-|y|^2)_+^{\beta_s - 1}, \tag{2}$$

где $\overline{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_s)$, $\beta_j > 0$, $1 \leqslant j \leqslant s$, $s \geqslant 2$, $0 < r_1 < r_2 < \ldots < r_{s-1} < r_s = 1$. Здесь $\theta_j(r)$ — гладкие функции, $\theta_j(r_j) \neq 0$, $1 \leqslant j \leqslant s$.

Операторы вида (1) возникают при решении задачи Коши для волнового уравнения (см. [1–3]). $(H^p - H^q)$-оценки для этих операторов, $0 < p \leqslant q < \infty$, были получены в [4].

Методом аппроксимативных обратных операторов (АОО) строится обращение потенциалов (2) с плотностями из пространства L^p, $1 \leqslant p \leqslant 2$ и из пространства Харди H^1 в неэллиптическом случае, когда их символы вырождаются на множестве меры нуль в $\mathbb{R}^n$. Даётся также описание образов $M_\theta^{\overline{\beta}}(L^p)$ и $M_\theta^{\overline{\beta}}(H^1)$ в терминах обращающих конструкций.

Алексей Викторович Гиль (к.ф.-м.н.), ст. преподаватель, каф. дифференциальных и интегральных уравнений. *Анатолий Иванович Задорожный* (д.ф.-м.н., проф.), зав. кафедрой, каф. дифференциальных и интегральных уравнений. *Владимир Александрович Ногин* (к.ф.-м.н., доц.), доцент, каф. дифференциальных и интегральных уравнений.

1. Предварительные сведения. Введём следующие обозначения: $(Ff)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{i\xi x}dx$ — преобразование Фурье функции f; $(F^{-1}f)(\xi) = \tilde{f}(\xi) = (2\pi)^{-n}(Ff)(-\xi)$ — обратное преобразование Фурье; $R^0(\mathbb{R}^n) = \{f : f(x) = \widehat{\varphi}(x), \varphi(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)\}$ — винеровское кольцо; $\mathcal{S}$ — класс Шварца быстро убывающих гладких функций; $\mathcal{S}'$ — пространство обобщённых функций медленного роста; $C_0(\mathbb{R}^n) = \{f : f \in C(\mathbb{R}^n), f(\infty) = 0\}$ — пространство непрерывных функций, исчезающих на бесконечности; $W_\varepsilon\varphi = w_\varepsilon * \varphi$ — интеграл Гаусса—Вейерштрасса, где $w_\varepsilon(x) = (4\pi\varepsilon)^{-n/2}e^{-|x|^2/(4\varepsilon)}$ $(\hat{w}_\varepsilon(\xi) = e^{-\varepsilon|\xi|^2})$; Φ, Ψ — пространства П. И. Лизоркина: $\Psi = \{\psi \in \mathcal{S} : \ (D^\nu\psi)(0) = 0, \ |\nu| = 0, 1, \dots\}$, $\Phi = \{\varphi \in \mathcal{S} : \hat{\varphi} \in \Psi\}$.

Через $H^1 = H^1(\mathbb{R}^n)$ обозначим множество всех $\mathcal{S}'$-распределений таких, что

$$f^+(x) = \sup_{0<\varepsilon<\infty} |(f * \varphi_\varepsilon)(x)| \in L^1,$$

где $\varphi \in \mathcal{S}$ и $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx \neq 0$, $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(\frac{x}{\varepsilon})$ и $(f * \varphi_\varepsilon)(x) = \langle f, \varphi_\varepsilon(x - \ \cdot\ )\rangle$. Положим $\|f\|_{H^1} = \|f^+\|_{L^1}$ (см. [5, с. 269]).

Пусть V — произвольное замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$. Через Ψ_V обозначим класс всех функций из $\mathcal{S}$, которые исчезают вместе со всеми своими производными на V:

$$\Psi_V = \{\psi(\xi) \in \mathcal{S} : D^k\psi(\xi) = 0, \xi \in V, |k| = 0,1,2, \dots\}.$$

Через Φ_V обозначим класс прообразов Фурье функций из Ψ_V: $\Phi_V = F^{-1}(\Psi_V)$.

Пространства Ψ_V и Φ_V были введены и изучены С. Г. Самко (см. [6, § 3]).

Теорема 1 [6, с. 50]. *Пусть $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Если $\frac{\partial^m f}{\partial x_{k_1} \dots \partial x_{k_m}} \in L^p(\mathbb{R}^n)$ при каком-нибудь $1 < p \leqslant 2$ для всех $m = 1, 2, \dots, n$ и любых $k_1, \dots, k_m$, то $f(x) \in R^0(\mathbb{R}^n)$.*

Теорема 2 [4]. *Пусть $\beta_j > 0$, $1 \leqslant j \leqslant s$, $\beta_0 = \min\{\beta_1, \dots, \beta_s\}$. Имеют место следующие соотношения:*

1) *оператор $M_\theta^{\overline{\beta}}$ ограничен из L^p в L^q, $1 < p \leqslant q < \infty$, тогда и только тогда, когда*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leqslant 1, \ \frac{1}{p} - \frac{n}{q} \leqslant \beta_0 \quad \textit{или} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geqslant 1, \ \frac{n}{p} - \frac{1}{q} \leqslant \beta_0 + (n-1);$$

2) *оператор $M_\theta^{\overline{\beta}}$ ограничен из L^1 в L^q тогда и только тогда, когда*

$$1 - \beta_0 < \frac{1}{q} \leqslant 1;$$

3) *оператор $M_\theta^{\overline{\beta}}$ ограничен из H^1 в H^1.*

2. Основные результаты. Воспользуемся идеей обращения потенциалов с символами $\widehat{m^\beta}(\xi) = (2\pi)^{n/2}2^{\beta-1}|\xi|^{1-\beta-n/2}J_{\beta-1+n/2}(|\xi|)$ из [7].

Обращение потенциала $f = M_\theta^{\overline{\beta}}\varphi$, $\varphi \in L^p$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, в неэллиптическом случае, когда $\mathrm{mes}\Big\{\xi: \ \widehat{m_\theta^{\overline{\beta}}}(\xi) = 0\Big\} = 0$, будем строить в виде

$$T_\theta^{\overline{\beta}} f = \overset{(L^p)}{\lim_{\varepsilon\to 0}}\ \overset{(L^2)}{\lim_{\delta\to 0}} T_{\theta,\varepsilon,\delta}^{\overline{\beta}} f, \tag{3}$$

где

$$T_{\theta,\varepsilon,\delta}^{\overline{\beta}} f = F^{-1}\left(\overline{\widehat{m_\theta^{\overline{\beta}}}(\xi)}\ e^{-\varepsilon|\xi|^2} \Big/ \left(|\widehat{m_\theta^{\overline{\beta}}}(\xi)|^2 + i\delta\right)\right) * f, \tag{4}$$

$$\widehat{m_\theta^{\overline{\beta}}}(\xi) = \int_0^1 \rho^{n-1}\theta_1(\rho)(r_1^2 - \rho^2 + i0)^{\beta_1 - 1} \times \ldots$$
$$\ldots \times \theta_{s-1}(\rho)(r_{s-1}^2 - \rho^2 + i0)^{\beta_{s-1}-1}\theta_s(\rho)(1-\rho^2)_+^{\beta_s - 1}\, d\rho \int_{S^{n-1}} e^{i(\rho\xi\cdot\sigma)}\, d\sigma.$$

Следующая теорема даёт обращение потенциалов $M_\theta^{\overline{\beta}}\varphi$, $\varphi \in L^p$, $1 \leqslant p \leqslant 2$.

Теорема 3. *Пусть $\varphi \in L^p$, $1 \leqslant p \leqslant 2$. Тогда*

$$\left(T_\theta^{\overline{\beta}} M_\theta^{\overline{\beta}}\varphi\right)(x) = \varphi(x), \tag{5}$$

где $T_\theta^{\overline{\beta}}$ — оператор (3).

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что оператор (4) — оператор свёртки с суммируемым ядром. Рассуждения будем основывать на равенстве

$$(T_{\theta,\varepsilon,\delta}^{\overline{\beta}} M_\theta^{\overline{\beta}}\varphi)(x) = (W_\varepsilon\varphi)(x) - i\delta(N_{\theta,\varepsilon,\delta}^{\overline{\beta}} W_{\frac{\varepsilon}{2}}\varphi)(x), \quad \varepsilon,\ \delta > 0, \tag{6}$$

где

$$N_{\theta,\varepsilon,\delta}^{\overline{\beta}} f = F^{-1}\left(n_{\theta,\varepsilon,\delta}^{\overline{\beta}}(\xi)\right) * f, \qquad n_{\theta,\varepsilon,\delta}^{\overline{\beta}}(\xi) = e^{\frac{-\varepsilon|\xi|^2}{2}} \Big/ \left(|\widehat{m_\theta^{\overline{\beta}}}(\xi)|^2 + i\delta\right).$$

Для функций $\varphi \in \Phi$ равенство (6) проверяется переходом к образам Фурье. Это равенство распространяется по ограниченности на все пространство L^p, $1 < p \leqslant 2$, с учетом того, что операторы в обеих частях (6) ограничены из L^p в L_γ^1, при некотором $\gamma > 0$, где

$$L_\gamma^1 = \left\{f(x): \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|dx}{(1+|x|)^\gamma} < \infty\right\}.$$

В случае $p = 1$ равенство (6) выполняется в смысле Φ':

$$\langle T_{\theta,\varepsilon,\delta}^{\overline{\beta}} M_\theta^{\overline{\beta}}\varphi, \omega\rangle = \langle W_\varepsilon\varphi - i\delta N_{\theta,\varepsilon,\delta}^{\overline{\beta}} W_{\frac{\varepsilon}{2}}\varphi, \omega\rangle, \quad \omega \in \Phi. \tag{7}$$

Из (7) следует, что

$$\left(T_{\theta,\varepsilon,\delta}^{\overline{\beta}} M_\theta^{\overline{\beta}}\varphi\right)(x) = \left(W_\varepsilon\varphi\right)(x) - i\delta\left(N_{\theta,\varepsilon,\delta}^{\overline{\beta}} W_{\frac{\varepsilon}{2}}\varphi\right)(x) + P(x), \tag{8}$$

где $P(x)$ — некоторый многочлен. Так как функции $\left(T^{\overline{\beta}}_{\theta,\varepsilon,\delta} M^{\overline{\beta}}_{\theta}\varphi\right)(x)$, $(W_\varepsilon\varphi)(x)$ и $\left(N^{\overline{\beta}}_{\theta,\varepsilon,\delta} W_{\frac{\varepsilon}{2}}\varphi\right)(x)$ принадлежат пространству L^1, $P(x)\equiv 0$ в (8).

С учётом того, что $W_\varepsilon\varphi \to \varphi$ при $\varepsilon \to 0$ по L^p-норме или почти всюду, формула (5) будет следовать из равенства

$$\lim_{\delta\to 0} \delta^2 \left\|(N^{\overline{\beta}}_{\theta,\varepsilon,\delta} W_{\frac{\varepsilon}{2}}\varphi)(x)\right\|_2^2 = 0. \tag{9}$$

Докажем (9). Применяя равенство Парсеваля, получаем

$$\delta^2 \left\|(N^{\overline{\beta}}_{\theta,\varepsilon,\delta} W_{\frac{\varepsilon}{2}}\varphi)(x)\right\|_2^2 = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\delta^2 e^{\frac{-\varepsilon|\xi|^2}{2}}}{|\widehat{m^{\overline{\beta}}_{\theta}}(\xi)|^4+\delta^2} \left|(\widehat{W_{\frac{\varepsilon}{2}}\varphi})(\xi)\right|^2 d\xi \to 0 \tag{10}$$

при $\delta \to 0$, с учётом того, что

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{\delta^2 e^{\frac{-\varepsilon|\xi|^2}{2}}}{|\widehat{m^{\overline{\beta}}_{\theta}}(\xi)|^4+\delta^2} \left|(\widehat{W_{\frac{\varepsilon}{2}}\varphi})(\xi)\right|^2 = 0, \quad \xi \notin \{\xi :\ \widehat{m^{\overline{\beta}}_{\theta}}(\xi) = 0\}.$$

Предельный переход (10) обосновывается применением мажорантной теоремы Лебега с учетом оценки

$$\left(\delta^2 e^{\frac{-\varepsilon|\xi|^2}{2}} \Big/ \left(|\widehat{m^{\overline{\beta}}_{\theta}}(\xi)|^4+\delta^2\right)\right) \left|(\widehat{W_{\frac{\varepsilon}{2}}\varphi})(\xi)\right|^2 \leqslant e^{\frac{-\varepsilon|\xi|^2}{2}} \left|(\widehat{W_{\frac{\varepsilon}{2}}\varphi})(\xi)\right|^2 \in L_1.$$

Здесь существенным являлся тот факт, что $W_{\frac{\varepsilon}{2}}\varphi \in L^2$, если $\varphi \in L^p$, $1 \leqslant p \leqslant 2$. Кроме того, учтено, что функция

$$\overline{\widehat{m^{\overline{\beta}}_{\theta}}(\xi)} e^{\frac{-\varepsilon|\xi|^2}{2}} \Big/ \left(\left|\widehat{m^{\overline{\beta}}_{\theta}}(\xi)\right|^2 + i\delta\right)$$

является 2-мультипликатором. □

Описание образа $M^{\overline{\beta}}_{\theta}(L^p)$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, даёт следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть* $\overline{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_s)$, $\beta_j > 0$, $1 \leqslant j \leqslant s$ *и* $1 \leqslant p \leqslant 2$. *Тогда*

$$M^{\overline{\beta}}_{\theta}(L^p) = \left\{ f \in L^q : T^{\overline{\beta}}_{\theta} f \in L^p \right\},$$

где $T^{\overline{\beta}}_{\theta}$ *— оператор* (3), q *— произвольное число*, $1 \leqslant q \leqslant 2$, *такое, что оператор* $M^{\overline{\beta}}_{\theta}$ *ограничен из* L^p *в* L^q.

Доказательство. Вложение

$$M^{\overline{\beta}}_{\theta}(L^p) \subset \left\{ f \in L^q : T^{\overline{\beta}}_{\theta} f \in L^p \right\} \tag{11}$$

вытекает из теоремы 2.

Докажем вложение

$$M_\theta^{\overline{\beta}}(L^p) \supset \left\{ f \in L^q : T_\theta^{\overline{\beta}} f \in L^p \right\},$$

обратное к (11). Пусть функция $\omega \in \mathcal{S}$ такова, что $\widehat{\omega}(\xi) = 0$ в некоторой окрестности множества $V = \{\xi :\ \widehat{m_\theta^{\overline{\beta}}}(|\xi|) = 0\}$ (следовательно, $\omega \in \Phi_V$).

Имеем

$$\langle M_\theta^{\overline{\beta}} T_\theta^{\overline{\beta}} f, \omega\rangle = \langle T_\theta^{\overline{\beta}} f, \overline{M_\theta^{\overline{\beta}}}\omega\rangle = \langle \overset{(L^p)}{\lim_{\varepsilon\to 0}} \overset{(L^2)}{\lim_{\delta\to 0}} T_{\theta,\varepsilon,\delta}^{\overline{\beta}} f, \overline{M_\theta^{\overline{\beta}}}\omega\rangle, \tag{12}$$

где $\overline{M_\theta^{\overline{\beta}}}$ — оператор свёртки с символом $\overline{\widehat{m_\theta^{\overline{\beta}}}(|\xi|)}$. С учётом (12) и того факта, что сходимость по L^p норме предполагает сходимость в Φ'_V, получаем

$$\langle M_\theta^{\overline{\beta}} T_\theta^{\overline{\beta}} f, \omega\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\langle \overset{(L^2)}{\lim_{\delta\to 0}} T_{\theta,\varepsilon,\delta}^{\overline{\beta}} f, \overline{M_\theta^{\overline{\beta}}}\omega\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\delta\to 0}\langle T_{\theta,\varepsilon,\delta}^{\overline{\beta}} f, \overline{M_\theta^{\overline{\beta}}}\omega\rangle =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\delta\to 0}\langle f, \overline{T_{\theta,\varepsilon,\delta}^{\overline{\beta}}}\ \overline{M_\theta^{\overline{\beta}}}\omega\rangle, \tag{13}$$

где $\overline{T_{\theta,\varepsilon,\delta}^{\overline{\beta}}}$ — мультипликаторный оператор с символом

$$\left(\widehat{m_\theta^{\overline{\beta}}}(\xi)\ e^{-\varepsilon|\xi|^2}\right) \Big/ \left(|\widehat{m_\theta^{\overline{\beta}}}(\xi)|^2 - i\delta\right).$$

Далее имеем

$$(\overline{T_{\theta,\varepsilon,\delta}^{\overline{\beta}}}\ \overline{M_\theta^{\overline{\beta}}}\omega)(x) = (W_\varepsilon\omega)(x) + i\delta(\overline{N_{\theta,\varepsilon,\delta}^{\overline{\beta}}} W_{\frac{\varepsilon}{2}}\omega)(x), \quad \varepsilon,\delta > 0, \tag{14}$$

где $\overline{N_{\theta,\varepsilon,\delta}^{\overline{\beta}}}$ — ограниченный в L^2 оператор, порождаемый 2-мультипликатором

$$e^{\frac{-\varepsilon|\xi|^2}{2}} \Big/ \left(|\widehat{m_\theta^{\overline{\beta}}}(\xi)|^2 - i\delta\right).$$

Равенство (14) проверяется переходом к преобразованиям Фурье.

С учётом (13) и (14) получаем

$$\langle M_\theta^{\overline{\beta}} T_\theta^{\overline{\beta}} f, \omega\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\langle f, W_\varepsilon\omega\rangle + \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\delta\to 0}\langle f, i\delta\overline{N_{\theta,\varepsilon,\delta}^{\overline{\beta}}} W_{\frac{\varepsilon}{2}}\omega\rangle. \tag{15}$$

Докажем, что

$$\lim_{\delta\to 0}\langle f, i\delta\overline{N_{\theta,\varepsilon,\delta}^{\overline{\beta}}} W_{\frac{\varepsilon}{2}}\omega\rangle = 0. \tag{16}$$

Так как $(\overline{N_{\theta,\varepsilon,\delta}^{\overline{\beta}}} W_{\frac{\varepsilon}{2}}\omega)(x) \in \Phi_V$,

$$\langle f, i\delta\overline{N_{\theta,\varepsilon,\delta}^{\overline{\beta}}} W_{\frac{\varepsilon}{2}}\omega\rangle = (2\pi)^{-n}\langle \widehat{f}, i\delta F(\overline{N_{\theta,\varepsilon,\delta}^{\overline{\beta}}} W_{\frac{\varepsilon}{2}}\omega)\rangle,$$

где преобразование Фурье $\widehat{f}$, понимаемое в смысле Φ', совпадает с преобразованием Фурье в пространстве $L^{q'}$, $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$ (в соответствии с теоремой Хаусcдорфа—Юнга).

Применяя неравенство Гёльдера, будем иметь

$$\left|\langle \widehat{f}, i\delta F(\overline{N^{\overline{\beta}}_{\theta,\varepsilon,\delta}}W_{\frac{\varepsilon}{2}}\omega)\rangle\right| \leqslant \delta\|\widehat{f}\|_{q'}\left\{\int_{\mathbb{R}^n}\frac{e^{-\varepsilon q|\xi|^2}\,|\widehat{\omega}(\xi)|^q}{|\widehat{m^{\overline{\beta}}_{\theta}}(\xi)|^{2q}}d\xi\right\}^{\frac{1}{q}}.$$

Заметим, что интеграл в правой части (17) конечен, так как $\widehat{\omega}(\xi)=0$ в некоторой окрестности множества V.

Переходя в (17) к пределу при $\delta\to 0$, получаем (16).

Из (15) и (16) следует, что

$$\langle M^{\overline{\beta}}_{\theta}T^{\overline{\beta}}_{\theta}f,\omega\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\langle f, W_\varepsilon\omega\rangle = \langle f,\omega\rangle. \tag{18}$$

Переходя к завершающему этапу доказательства, для заданной функции $\omega\in\mathcal{S}$ выберем последовательность $\{\omega_N\}$, $\omega_N\in\Phi_V$, такую, что $\widehat{\omega_N}(\xi)$ обращается в нуль в некоторой окрестности множества V и

$$\overset{(L^{q'})}{\lim_{N\to\infty}}\omega_N=\omega,\quad 1<q\leqslant 2 \qquad \text{и} \qquad \overset{(C_0)}{\lim_{N\to\infty}}\omega_N=\omega$$

(возможность выбора такой последовательности доказана в [6, §3]).

Из (18) вытекает, что $\langle M^{\overline{\beta}}_{\theta}T^{\overline{\beta}}_{\theta}f,\omega_N\rangle=\langle f,\omega_N\rangle$. Переходя в этом равенстве к пределу при $N\to\infty$ на основании мажорантной теоремы Лебега, получаем $\langle f,\omega\rangle=\langle M^{\overline{\beta}}_{\theta}T^{\overline{\beta}}_{\theta}f,\omega\rangle$, $\omega\in\mathcal{S}$, откуда следует, что $f(x)=(M^{\overline{\beta}}_{\theta}T^{\overline{\beta}}_{\theta}f)(x)$ для почти всех $x\in\mathbb{R}^n$. $\square$

3. Обращение и описание потенциалов $M^{\overline{\beta}}_{\theta}\varphi$ с H^1-плотностями. Обращение потенциала $f=M^{\overline{\beta}}_{\theta}\varphi$, $\varphi\in H^1$ в неэллиптическом случае будем строить в виде

$$T^{\overline{\beta}}_{\theta}f = \overset{(H^1)}{\lim_{\varepsilon\to 0}}\,\overset{(L^2)}{\lim_{\delta\to 0}}\,T^{\overline{\beta}}_{\theta,\varepsilon,\delta}f, \tag{19}$$

где $T^{\overline{\beta}}_{\theta,\varepsilon,\delta}$ определяется равенством (4).

Теорема 5. *Пусть $\varphi\in H^1$. Тогда*

$$M^{\overline{\beta}}_{\theta}(H^1)=\left\{f\in H^1 : T^{\overline{\beta}}_{\theta}f\in H^1\right\},$$

где $T^{\overline{\beta}}_{\theta}$ — оператор (19).

Доказательство теоремы 5 проводится по той же схеме, что и доказательство теорем 3 и 4.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Strichartz R. S.* Convolutions with kernels having singularities on a sphere // *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1970. Vol. 146. Pp. 461–471.

2. *Гиль А. В., Ногин В. А.* Оценки для некоторых операторов типа потенциала с осциллирующими символами // *Владикавк. матем. журн.*, 2010. Т. 12, № 3. С. 21–29. [*Gil A. V., Nogin V. A.* Estimates for some potential-type operators with oscillating symbols // *Vladikavkaz. Mat. Zh.*, 2010. Vol. 12, no. 3. Pp. 21–29].

3. *Гиль А. В., Ногин В. А.* $H^p - H^q$ оценки для некоторых операторов типа потенциала с осциллирующими символами // *Изв. вузов. Сев.-Кав. регион*, 2010. № 5. С. 8–13. [*Gil A. V., Nogin V. A.* $H^p - H^q$ estimates for some potential-type operators with oscillating symbols // *Izv. vuzov. Sev.-Kav. Region*, 2010. no. 5. Pp. 8–13].

4. *Гиль А. В., Задорожный А. И., Ногин В. А.* Оценки для некоторых операторов свёртки с особенностями ядер на сферах // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2011. № 2(23). С. 17–23. [*Gil A. V., Zadorozhnyi A. I., Nogin V. A.* Estimates for some convolution operators with singularities of their kernels on spheres // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2011. no. 2(23). Pp. 17–23].

5. *Miyachi A.* On some singular Fourier multipliers // *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo., Sect. 1 A, Math.*, 1981. Vol. 28, no. 2. Pp. 267–315.

6. *Самко С. Г.* Гиперсингулярные интегралы и их приложения. Ростов-на-Дону: Изд-во Ростов. ун-та, 1984. 208 с. [*Samko S. G.* Hypersingular integrals and their applications. Rostov-na-Donu: Izd-vo Rostov. Un-ta, 1984. 208 pp.]

7. *Nogin V. A., Luzhetskaya P. A.* Inversion and description of the ranges of multiplier operators of Strichartz–Peral–Miyachi-type // *Fractional Calculus & Applied Analysis*, 2000. Vol. 3, no. 1. Pp. 87–96.

8. *Stein E. M.* Harmonic Analysis: Real-variable Method, Orthogonality, and Oscillatory Integrals. Princeton, NJ.: Princeton Univ. Press, 1993. 695 pp.

Поступила в редакцию 03/VIII/2011;
в окончательном варианте — 22/XI/2011.

MSC: 45E10; 35L05

INVERSION AND CHARACTERIZATION OF SOME POTENTIALS WITH THE DENSITIES IN L^P IN THE NON-ELLIPTIC CASE

A. V. Gil, A. I. Zadorozhnyi, V. A. Nogin

Southern Federal University,
Faculty of Mathematics, Mechanics and Computer Science,
8a, Mil'chakova str., Rostov-on-Don, 344090, Russia.

E-mails: `gil-alexey@yandey.ru, simon@rsu.ru, vnogin@math.rsu.ru`

We construct the inversion of generalized Strichartz potentials with singularities of the kernels on a finite union of spheres in $\mathbb{R}^n$ with densities from space L^p, $1 \leqslant p \leqslant 2$ and Hardy space H^1 in the non-elliptic case, when its symbols degenerate on a set of zero measure in $\mathbb{R}^n$. We also give the description of these potentials in terms of the inverting constructions.

Key words: *convolution, oscillating symbol, multiplier, distribution.*

Original article submitted 03/VIII/2011;
revision submitted 22/XI/2011.

Alexey V. Gil (Ph. D. (Phys. & Math.)), Senior Lecturer, Dept. of Differential and Integral Equations. *Anatoliy I. Zadorozhnyi* (Dr. Sci. (Phys. & Math.)), Head of Dept., Dept. of Differential and Integral Equations. *Vladimir A. Nogin* (Ph. D. (Phys. & Math.)), Associate Professor, Dept. of Differential and Integral Equations.