

Механика деформируемого твёрдого тела

УДК 539.376

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ПОЛЗУЧЕСТИ ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛОСКОСТИ НА ОСНОВЕ ВТОРОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ МЕТОДА МАЛОГО ПАРАМЕТРА

Н. Н. Попов, О. О. Чернова

Самарский государственный технический университет,
443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mails: ponick25@gmail.com, chernova_olga@citydom.ru

Разработан аналитический метод решения нелинейной стохастической задачи ползучести при плоском напряженном состоянии. Стохастичность введена в определяющее соотношение ползучести, взятое в соответствии с нелинейной теорией вязкого течения, при помощи случайной однородной функции координат. Задача решается на основе второго приближения метода малого параметра относительно компонент тензора напряжений. Вычислены основные статистические характеристики случайного поля напряжений. Выполнен анализ результатов, полученных в первом и во втором приближениях.

Ключевые слова: *стохастическая задача, установившаяся ползучесть, метод малого параметра, второе приближение, случайное поле напряжений.*

Одним из основных методов решения стохастических краевых задач механики деформируемого твердого тела является метод малого параметра, который для задач теории упругости детально разработан В. А. Ломакиным [1, 2]. Суть этого метода состоит в том, что, разлагая компоненты тензора напряжений и деформаций в ряд по малому параметру, статистически нелинейную задачу можно свести к последовательности статистически линейных задач. Однако использование данного метода для решения нелинейных стохастических плоских задач теории ползучести вызывает затруднения вычислительного характера, поэтому обычно ограничиваются первым приближением, которое справедливо для слабонеоднородных сред [3–6].

В данной работе приводится решение нелинейной стохастической задачи ползучести при плоском напряженном состоянии на основе второго приближения метода малого параметра. В силу стохастической неоднородности среды компоненты тензоров напряжений и скоростей деформаций установившейся ползучести в декартовой ортогональной системе координат являются случайными функциями координат x_1 и x_2 . Упругие деформации считаются малыми настолько, что ими допустимо пренебречь.

Пусть компоненты тензора напряжений σ_{ij} удовлетворяют уравнениям

Николай Николаевич Попов, к.ф.-м.н., доц., доцент, каф. прикладной математики и информатики. Ольга Олеговна Чернова, аспирант, каф. прикладной математики и информатики.

равновесия

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad (1)$$

а компоненты тензора скоростей деформаций \dot{p}_{ij} — условию

$$\Lambda_{ij}\Lambda_{kl}\dot{p}_{jk,il} = 0, \quad (2)$$

которое получается дифференцированием по времени уравнения совместности деформаций, Λ_{ij} — единичный антисимметричный псевдотензор. Здесь везде индексы i и j принимают значения 1 и 2, по повторяющимся индексам производится суммирование.

В качестве определяющих соотношений для деформации ползучести выберем в соответствии с теорией вязкого течения следующие реологические соотношения в стохастической форме [3]:

$$\dot{p}_{ij} = cs^{n-1} \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} \right) (1 + \alpha U(x_1, x_2)), \quad (3)$$

где $s^2 = 0,5(3\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \sigma_{ii}\sigma_{jj})$ — интенсивность напряжений, δ_{ij} — символ Кронекера, $U(x_1, x_2)$ — случайная однородная функция, описывающая флуктуации реологических свойств материала с математическим ожиданием $\langle U \rangle = 0$ и дисперсией $\langle U^2 \rangle = 1$; c, n — постоянные материала, α — число, определяющее степень неоднородности материала.

В дальнейшем предполагается, что α — малый параметр, по которому производится разложение в ряд (метод малого параметра). Для идеально однородного материала $\alpha = 0$, и соотношения (3) в этом случае определяют обычные детерминированные уравнения теории вязкого течения.

Соотношения (1)–(3) задают стохастическую задачу ползучести. Решение стохастической задачи ползучести на основе второго приближения метода малого параметра рассматривалось в работе [7]. Здесь нелинейная функция s^{n-1} разлагалась в степенной ряд, и в этом разложении учитывались только линейные и квадратичные члены. В данной работе предлагается метод приближенного решения поставленной задачи относительно напряжений σ_{ij} без использования разложения функции s^{n-1} в ряд. При этом, очевидно, результаты должны получиться более точными.

В результате подставления определяющего соотношения (3) в уравнение совместности (2) и сокращения на величину $(s^2)^{(n-5)/2}$ в работе [8] было получено следующее уравнение:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{n-1}{2} \frac{n-3}{2} (s^2_{,2})^2 (1 + \alpha U) + \frac{n-1}{2} s^2 s^2_{,22} (1 + \alpha U) + (n-1) s^2 s^2_{,2} \alpha U_{,2} + \right. \\ & \quad \left. + (s^2)^2 \alpha U_{,22} \right) (2\sigma_{11} - \sigma_{22}) + \\ & \quad + 2 \left(\frac{n-1}{2} s^2 s^2_{,2} (1 + \alpha U) + (s^2)^2 \alpha U_{,2} \right) (2\sigma_{11} - \sigma_{22})_{,2} + \\ & \quad + (s^2)^2 (1 + \alpha U) (2\sigma_{11} - \sigma_{22})_{,22} + \\ & \quad + \left(\frac{n-1}{2} \frac{n-3}{2} (s^2_{,1})^2 (1 + \alpha U) + \frac{n-1}{2} s^2 s^2_{,11} (1 + \alpha U) + (n-1) s^2 s^2_{,1} \alpha U_{,1} + \right. \\ & \quad \left. + (s^2)^2 \alpha U_{,11} \right) (2\sigma_{22} - \sigma_{11}) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2\left(\frac{n-1}{2}s^2s_{,1}^2(1+\alpha U) + (s^2)^2\alpha U_{,1}\right)(2\sigma_{22} - \sigma_{11})_{,1} + \\
& \quad + (s^2)^2(1+\alpha U)(2\sigma_{22} - \sigma_{11})_{,11} - \\
& - 3(n-1)\left(\frac{n-3}{2}s_{,1}^2s_{,2}^2(1+\alpha U) + s^2s_{,12}^2(1+\alpha U) + s^2s_{,2}^2\alpha U_{,1} + \right. \\
& \left. + s^2s_{,1}^2\alpha U_{,2}\right)\sigma_{12} - 6(s^2)^2\alpha U_{,12}\sigma_{12} - 6\left(\frac{n-1}{2}s^2s_{,1}^2(1+\alpha U) + (s^2)^2\alpha U_{,1}\right)\sigma_{12,2} - \\
& - 6\left(\frac{n-1}{2}s^2s_{,2}^2(1+\alpha U) + (s^2)^2\alpha U_{,2}\right)\sigma_{12,1} - 6(s^2)^2(1+\alpha U)\sigma_{12,12} = 0. \quad (4)
\end{aligned}$$

Представим компоненты тензора напряжений в виде разложения по малому параметру α , ограничиваясь его членами второго порядка малости:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \alpha\sigma_{ij}^1 + \alpha^2\sigma_{ij}^2, \quad \langle\sigma_{ij}\rangle = \sigma_{ij}^0. \quad (5)$$

Аналогично (5) разложим интенсивность напряжений

$$s^2 = s_0^2 + \alpha s_1 + \alpha^2 s_2, \quad (6)$$

где $s_0^2 = (\sigma_{11}^0)^2 + (\sigma_{22}^0)^2 - \sigma_{11}^0\sigma_{22}^0$, $s_1 = \sigma_{11}^1l_1 + \sigma_{22}^1l_2$, $l_1 = 2\sigma_{11}^0 - \sigma_{22}^0$, $l_2 = 2\sigma_{22}^0 - \sigma_{11}^0$, $s_2 = \sigma_{11}^2l_1 + \sigma_{22}^2l_2 + (\sigma_{11}^1)^2 + (\sigma_{22}^1)^2 - \sigma_{11}^1\sigma_{22}^1 + 3(\sigma_{12}^1)^2$.

В дальнейшем будем предполагать, что детерминированные нормальные напряжения σ_{11}^0 и σ_{22}^0 являются постоянными, а касательное напряжение $\sigma_{12}^0 = 0$. Если подставить представление (5), (6) в соотношение (4) и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях α , то можно получить следующие уравнения:

$$\begin{aligned}
& ks_{1,22}l_1 + (2\sigma_{11}^1 - \sigma_{22}^1)_{,22} + ks_{1,11}l_2 + (2\sigma_{22}^1 - \sigma_{11}^1)_{,11} - 6\sigma_{12,12}^1 = \\
& \quad = -U_{,22}l_1 - U_{,11}l_2, \\
& ks_{2,22}l_1 + (2\sigma_{11}^2 - \sigma_{22}^2)_{,22} + ks_{2,11}l_2 + (2\sigma_{22}^2 - \sigma_{11}^2)_{,11} - 6\sigma_{12,12}^2 = \\
& \quad = \frac{ks_1}{s_0^2}(s_{1,22}l_1 + s_{1,11}l_2) - kq((s_{1,2})^2l_1 + (s_{1,1})^2l_2) - \\
& \quad - 2k(s_{1,2}U_{,2}l_1 + s_{1,1}U_{,1}l_2 + s_{1,2}(2\sigma_{11}^1 - \sigma_{22}^1)_{,2} + s_{1,1}(2\sigma_{22}^1 - \sigma_{11}^1)_{,1}) - \\
& \quad - ks_{1,22}(2\sigma_{11}^1 - \sigma_{22}^1) - ks_{1,11}(2\sigma_{22}^1 - \sigma_{11}^1) + \\
& \quad + 6k(s_{1,12}\sigma_{12}^1 + s_{1,1}\sigma_{12,2}^1 + s_{1,2}\sigma_{12,1}^1) + 6(U_{,12}\sigma_{12}^1 + U_{,1}\sigma_{12,2}^1 + U_{,2}\sigma_{12,1}^1) - \\
& \quad - U_{,22}(2\sigma_{11}^1 - \sigma_{22}^1) - U_{,11}(2\sigma_{22}^1 - \sigma_{11}^1) - U(U_{,22}l_1 + U_{,11}l_2),
\end{aligned}$$

которые можно привести к уравнениям относительно первого и второго приближений компонент тензора напряжений

$$\begin{aligned}
& \sigma_{11,22}^1(2 + kl_1^2) + \sigma_{22,22}^1(-1 + kl_1^2l_2^2) + \sigma_{11,11}^1(-1 + kl_1^2l_2^2) + \\
& \quad + \sigma_{22,11}^1(2 + kl_2^2) - 6\sigma_{12,12}^1 = -U_{,22}l_1 - U_{,11}l_2, \quad (7)
\end{aligned}$$

$$\sigma_{11,22}^2(2 + kl_1^2) + \sigma_{22,22}^2(-1 + kl_1^2l_2^2) + \sigma_{11,11}^2(-1 + kl_1^2l_2^2) +$$

$$+ \sigma_{22,11}^2(2 + kl_2^2) - 6\sigma_{12,12}^2 = \varphi(\sigma_{ij}^1, U), \quad (8)$$

где $k = (n - 1)/(2s_0^2)$, $q = (n - 3)/(2s_0^2)$. Правая часть $\varphi(\sigma_{ij}^1, U)$ уравнения (8) зависит от σ_{ij}^1 и U и их производных. К полученным уравнениям необходимо добавить уравнения равновесия для напряжений

$$\sigma_{ij,j}^1 = 0, \quad \sigma_{ij,j}^2 = 0. \quad (9)$$

Введём функции напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^1 &= F_{,22}^1, & \sigma_{22}^1 &= F_{,11}^1, & \sigma_{12}^1 &= -F_{,12}^1; \\ \sigma_{11}^2 &= F_{,22}^2, & \sigma_{22}^2 &= F_{,11}^2, & \sigma_{12}^2 &= -F_{,12}^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Очевидно, что уравнения равновесия (9) удовлетворяются при этом тождественно, а уравнения (7) и (8) относительно F^1 и F^2 имеют вид

$$F_{,1111}^1(2 + kl_2^2) + 2F_{,1122}^1(2 + kl_1l_2) + F_{,2222}^1(2 + kl_1^2) = -U_{22}l_1 - U_{11}l_2, \quad (11)$$

$$F_{,1111}^2(2 + kl_2^2) + 2F_{,1122}^2(2 + kl_1l_2) + F_{,2222}^2(2 + kl_1^2) = \varphi(F^1, U). \quad (12)$$

Функцию $U(x_1, x_2)$, с помощью которой задается случайное поле возмущений реологических свойств материала, будем брать в виде [9]

$$U(x_1, x_2) = A \cos(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \varphi), \quad (13)$$

где A — центрированная случайная величина с дисперсией $D[A]$, φ — случайная величина, распределённая равномерно на интервале $(0; 2\pi)$; ω_1 и ω_2 — положительные неслучайные параметры, причём случайные величины считаются независимыми. При этом имеем [9] $\langle U^2 \rangle = 0,5D[A]$. Отсюда с учётом равенства $\langle U^2 \rangle = 1$ следует, что $D[A] = 2$.

Для удобства выкладок целесообразно перейти к комплексной форме записи: $\tilde{U} = \tilde{A} \exp(i(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2))$, где $\tilde{A} = A \exp(i\varphi)$.

Будем рассматривать уравнения (11) и (12), в которых действительные функции U, F^1, F^2 заменены комплексными $\tilde{U}, \tilde{F}^1, \tilde{F}^2$, причём $\text{Re}\tilde{U} = U$, $\text{Re}\tilde{F}^1 = F^1$, $\text{Re}\tilde{F}^2 = F^2$.

Решение уравнения (11) было получено в работе [7]:

$$\tilde{F} = \tilde{A} f \exp(i(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)), \quad (14)$$

где

$$f = \frac{\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1}{2(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 + k(\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1)^2}.$$

Выделяя действительную часть \tilde{F}^1 , имеем $F^1 = \text{Re}\tilde{F}^1 = Af \cos(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \varphi)$ или с учётом формулы (13) —

$$F^1 = fU(x_1, x_2). \quad (15)$$

Таким образом, согласно (10), (15), имеем решение задачи (1)–(3) в первом приближении:

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^{(1)} &= \sigma_{11}^0 + \alpha\sigma_{11}^1 = \sigma_{11}^0 - \alpha\omega_2^2 fU = \sigma_{11}^0 - \frac{\alpha\omega_2^2(\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1)U}{2(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 + k(\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1)^2}; \\ \sigma_{22}^{(1)} &= \sigma_{22}^0 + \alpha\sigma_{22}^1 = \sigma_{22}^0 - \alpha\omega_1^2 fU = \sigma_{22}^0 - \frac{\alpha\omega_1^2(\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1)U}{2(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 + k(\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1)^2}; \\ \sigma_{12}^{(1)} &= \alpha\sigma_{12}^1 = \alpha\omega_1\omega_2 fU = \frac{\alpha\omega_1\omega_2(\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1)U}{2(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 + k(\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1)^2}.\end{aligned}\quad (16)$$

Подставляя полученное решение \tilde{F}^1 (см.(14)) в правую часть уравнения (12), можно получить

$$\begin{aligned}\tilde{F}_{,1111}^2(2 + kl_2^2) + 2\tilde{F}_{,1122}^2(2 + kl_1 l_2) + \tilde{F}_{,2222}^2(2 + kl_1^2) &= \\ &= \tilde{A}^2 b \exp(i(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)),\end{aligned}\quad (17)$$

где $b = -kqf^2c^3 + 10kf^2cd^2 - 2kfc^2 - 6fd^2 + c - kf^2c^3/s_0^2$, $c = \omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1$, $d = \omega_1^2 + \omega_2^2$.

Решение уравнения (17), которое можно искать в виде

$$\tilde{F}^2 = g \exp(2i(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)), \quad g = \text{const},$$

определяется формулой

$$\tilde{F}^2 = \frac{\tilde{A}^2 b \exp(2i(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2))}{16(2(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 + k(\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1)^2)}.$$

Выделяя действительную часть \tilde{F}^2 , получим второе приближение для функции напряжения:

$$F^2 = \frac{\tilde{A}^2 b \cos(2\omega_1 x_1 + 2\omega_2 x_2 + \varphi)}{16(2(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 + k(\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1)^2)}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^2 &= -\frac{A^2 b \omega_2^2 \cos(2\omega_1 x_1 + 2\omega_2 x_2 + \varphi)}{4(2(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 + k(\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1)^2)}, \\ \sigma_{22}^2 &= -\frac{A^2 b \omega_1^2 \cos(2\omega_1 x_1 + 2\omega_2 x_2 + \varphi)}{4(2(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 + k(\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1)^2)}, \\ \sigma_{12}^2 &= \frac{A^2 b \omega_1 \omega_2 \cos(2\omega_1 x_1 + 2\omega_2 x_2 + \varphi)}{4(2(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 + k(\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1)^2)}.\end{aligned}\quad (18)$$

Подставляя (16) и (18) в (5), получаем решение задачи (1)–(3) во втором приближении:

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^{(2)} &= \sigma_{11}^0 - \frac{\alpha\omega_2^2(\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1)U}{2(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 + k(\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1)^2} - \frac{\alpha^2 A^2 b \omega_2^2 \cos(2\omega_1 x_1 + 2\omega_2 x_2 + \varphi)}{4(2(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 + k(\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1)^2)}, \\ \sigma_{22}^{(2)} &= \sigma_{22}^0 - \frac{\alpha\omega_1^2(\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1)U}{2(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 + k(\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1)^2} - \frac{\alpha^2 A^2 b \omega_1^2 \cos(2\omega_1 x_1 + 2\omega_2 x_2 + \varphi)}{4(2(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 + k(\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1)^2)}, \\ \sigma_{12}^{(2)} &= \frac{\alpha\omega_1\omega_2(\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1)U}{2(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 + k(\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1)^2} - \frac{\alpha^2 A^2 b \omega_1 \omega_2 \cos(2\omega_1 x_1 + 2\omega_2 x_2 + \varphi)}{4(2(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 + k(\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1)^2)}.\end{aligned}$$

Основными статистическими характеристиками случайной функции являются математическое ожидание и дисперсия. Для равномерно распределённой случайной величины φ согласно [9] имеем $\langle \cos(2\omega_1 x_1 + 2\omega_2 x_2 + \varphi) \rangle = 0$, а по условию задачи $\langle U \rangle = 0$. Тогда, используя приближения (16) и (18), получим $\langle \sigma_{11}^{(1)} \rangle = \langle \sigma_{11}^{(2)} \rangle = \sigma_{ij}^0$. Дисперсии напряжений в первом приближении определяются так:

$$\begin{aligned} D_{11}^{(1)} &= \langle (\sigma_{11}^{(1)})^2 \rangle = \frac{\alpha^2 \omega_2^4 (\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1)^2}{(2(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 + k(\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1)^2)^2}, \\ D_{22}^{(1)} &= \langle (\sigma_{22}^{(1)})^2 \rangle = \frac{\alpha^2 \omega_1^4 (\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1)^2}{(2(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 + k(\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1)^2)^2}, \\ D_{12}^{(1)} &= \langle (\sigma_{12}^{(1)})^2 \rangle = \frac{\alpha^2 \omega_1^2 \omega_2^2 (\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1)^2}{(2(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 + k(\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1)^2)^2}. \end{aligned}$$

Дисперсии для второго приближения можно записать в виде

$$D_{ij}^{(2)} = \alpha^2 \mathcal{D}[\sigma_{ij}^1] + \alpha^4 \mathcal{D}[\sigma_{ij}^2] + 2\alpha^3 \langle \sigma_{ij}^1 \sigma_{ij}^2 \rangle. \quad (19)$$

В дальнейшем предполагаем, что случайная величина A распределена по нормальному закону. Для нормального распределения все центральные моменты нечётных порядков равны нулю, а момент четвёртого порядка $\langle A^4 \rangle = 3\langle A^2 \rangle = 6$ [10]. Момент $\langle \sigma_{ij}^1 \sigma_{ij}^2 \rangle$, входящий в (19), равен нулю, так как он пропорционален моменту третьего порядка $\langle A^3 \rangle$. Дисперсия $\mathcal{D}[\sigma_{ij}^2]$, согласно (18), пропорциональна величине $\langle A^4 \rangle \langle \cos^2(a + \varphi) \rangle = \langle A^4 \rangle (\cos^2 a \langle \cos^2 \varphi \rangle - 0,5 \sin 2a \langle \sin 2\varphi \rangle + \sin^2 a \langle \sin^2 \varphi \rangle)$, где $a = \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2$. Для равномерно распределённой случайной величины φ имеем [9] следующее:

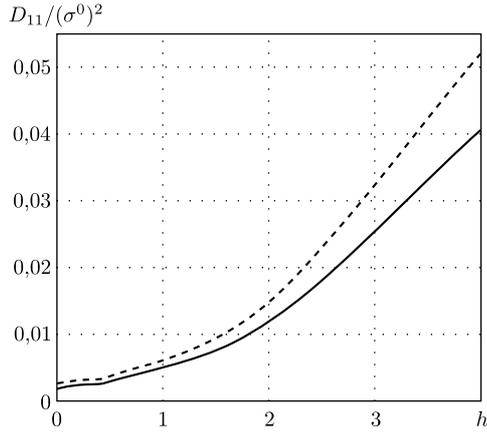
$$\langle \cos^2 \varphi \rangle = 0,5; \quad \langle \sin^2 \varphi \rangle = 0,5; \quad \langle \sin 2\varphi \rangle = 0.$$

В силу этого $\langle A^4 \rangle \langle \cos^2(a + \varphi) \rangle = 0,5 \langle A^4 \rangle$.

Таким образом, дисперсии напряжений согласно (19) во втором приближении определяются так:

$$\begin{aligned} D_{11}^{(2)} &= \frac{\alpha^2 \omega_2^4 (\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1)^2}{(2(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 + k(\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1)^2)^2} + \frac{3\alpha^4 b^2 \omega_2^4}{16 (2(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 + k(\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1)^2)^2}, \\ D_{22}^{(2)} &= \frac{\alpha^2 \omega_1^4 (\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1)^2}{(2(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 + k(\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1)^2)^2} + \frac{3\alpha^4 b^2 \omega_1^4}{16 (2(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 + k(\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1)^2)^2}, \\ D_{12}^{(2)} &= \frac{\alpha^2 \omega_1^2 \omega_2^2 (\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1)^2}{(2(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 + k(\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1)^2)^2} + \frac{3\alpha^4 b^2 \omega_1^2 \omega_2^2}{16 (2(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 + k(\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1)^2)^2}. \end{aligned}$$

Анализ случайного поля напряжений был проведен при условии, что плоскость растягивается в двух ортогональных направлениях пропорционально параметру h , т. е. $\sigma_{11} = \sigma^0$, $\sigma_{22} = h\sigma^0$. Для упрощения вычислений будем считать, что частоты флуктуаций микронеоднородностей ω_1 и ω_2 относительно осей x_1 и x_2 равны между собой ($\omega_1 = \omega_2 = \omega$). При этом условии случайное поле U , заданное разложением (13), можно считать близким к изотропному [1]. Дисперсии напряжений и в первом, и во втором приближениях будут равны между собой и не будут зависеть от ω .



Приведённые дисперсии при $n = 3$ и $\alpha = 0,4$: сплошная линия – первое приближение; штриховая линия – второе приближение

На рисунке представлен график зависимости приведённой дисперсии $D_{11}/(\sigma^0)^2$ в первом и во втором приближениях от параметра нагружения h при $n = 3$ и $\alpha = 0,4$.

Значения коэффициента вариации $d_{11}^{(1)} = \sqrt{D_{11}^{(1)}}/\sigma^0$ и $d_{11}^{(2)} = \sqrt{D_{11}^{(2)}}/\sigma^0$ (в процентах), как функции переменных α и n , приведены в табл. 1 ($h = 0,5$) и табл. 2 ($h = 4$). В столбце $d_{11}^{(1)}$ представлены значения коэффициента вариации, вычисленные по первому приближению, в столбце $d_{11}^{(2)}$ – по второму

приближению. Как видно из табл. 2, для материалов с высоким показателем нелинейности ($n = 9$) коэффициент вариации $d_{11}^{(2)}$ при $h = 4$ изменяется в пределах от 3,21 % ($\alpha = 0,1$) до 18,12 % ($\alpha = 0,5$). С уменьшением показателя нелинейности разброс по напряжениям довольно быстро возрастает. При $n = 1$, что соответствует полной линеаризации задачи ползучести, разброс напряжений принимает наибольшее значение: здесь коэффициент вариации $d_{11}^{(2)}$ при $h = 4$ заключен в пределах от 6,34 % ($\alpha = 0,1$) до 41,34 % ($\alpha = 0,5$).

В табл. 3 приведена относительная погрешность вычисления среднеквад-

Таблица 1

Значения коэффициента вариации $d_{11}^{(1)}$ и $d_{11}^{(2)}$ при $h = 0,5$ (в процентах)

$\alpha \backslash n$	1		3		5		7		9	
	$d_{11}^{(1)}$	$d_{11}^{(2)}$								
0,1	1,88	1,90	1,36	1,37	1,07	1,08	0,88	0,89	0,75	0,76
0,2	3,75	3,97	2,73	2,81	2,14	2,19	1,77	1,81	1,50	1,54
0,3	5,63	6,34	4,09	4,36	3,21	3,38	2,65	2,78	2,25	2,37
0,4	7,50	9,12	5,46	6,07	4,29	4,68	3,53	3,85	3,00	3,28
0,5	9,38	12,40	6,82	7,98	5,36	6,11	4,41	5,02	3,75	4,29

Таблица 2

Значения коэффициента вариации $d_{11}^{(1)}$ и $d_{11}^{(2)}$ при $h = 4$ (в процентах)

$\alpha \backslash n$	1		3		5		7		9	
	$d_{11}^{(1)}$	$d_{11}^{(2)}$								
0,1	6,25	6,34	5,04	5,08	4,22	4,25	3,63	3,65	3,19	3,21
0,2	12,50	13,23	10,08	10,43	8,44	8,67	7,26	7,44	6,37	6,52
0,3	18,75	21,13	15,12	16,27	12,66	13,41	10,89	11,47	9,56	10,05
0,4	25,00	30,41	20,15	22,81	16,88	18,62	14,52	15,87	12,74	13,89
0,5	31,25	41,34	25,19	30,23	21,10	24,41	18,16	20,72	15,93	18,12

Таблица 3

Относительная погрешность вычисления среднеквадратичного отклонения для $h = 4$ (в процентах)

$\alpha \backslash n$	1	3	5	7	9
0,1	1,47	0,87	0,67	0,60	0,58
0,2	5,51	3,34	2,60	2,33	2,27
0,3	11,26	7,08	5,58	5,03	4,89
0,4	17,80	11,66	9,32	8,46	8,24
0,5	24,41	16,66	13,54	12,37	12,06

рватичного отклонения второго приближения относительно первого при $h = 4$:

$$\delta = \frac{\sqrt{D_{11}^{(2)}} - \sqrt{D_{11}^{(1)}}}{\sqrt{D_{11}^{(2)}}} \cdot 100\%.$$

Из табл. 3 видно, что для слабонеоднородных материалов ($\alpha = 0,1 \div 0,2$) погрешность δ незначительна. Для таких материалов первое (линейное) приближение вполне приемлемо для решения практических задач. Для материалов с большой степенью неоднородности ($\alpha = 0,4 \div 0,5$), особенно при малых n , члены второго порядка вносят значительный вклад в среднеквадратичное отклонение напряжения, здесь относительная ошибка δ больше 15%. Поэтому в рассматриваемом случае неучёт членов второго порядка может привести к необоснованному завышению показателей прочности и надежности элементов конструкций.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 10-01-00644-а).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ломакин В. А. Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. М.: Наука, 1970. 137 с. [Lomakin V. A. Statistical Problems of the Mechanics of Solid Deformable Bodies. Moscow: Nauka, 1970. 137 pp.]
2. Ломакин В. А. Проблемы механики структурно-неоднородных тел // Изв. АН СССР. МТТ, 1978. №6. С. 45–52. [Lomakin V. A. Problems of the mechanics of structurally nonuniform bodies // Izv. AN SSSR. MTT, 1978. no. 6. Pp. 45–52].
3. Кузнецов В. А. Ползучесть стохастически неоднородных сред в условиях плоского напряженного состояния / В сб.: Математическая физика: Сб. научн. трудов. Куйбышев: КПТИ, 1977. С. 69–74. [Kuznetsov V. A. Creep of stochastically nonuniform media under conditions of a plane stress state / In: Mathematical Physics (collected scientific papers). Kuibyshev: KPtI, 1977. Pp. 69–74].
4. Попов Н. Н., Самарин Ю. П. Исследование полей напряжений вблизи границы стохастически неоднородной полуплоскости при ползучести // ПМТФ, 1988. №1. С. 159–164; англ. пер.: Popov N. N., Samarin Yu. P. Stress fields close to the boundary of a stochastically inhomogeneous half-plane during creep // J. Appl. Mech. Tech. Phys., 1988. Vol. 29, no. 1. Pp. 149–154.
5. Радченко В. П., Попов Н. Н. Статистические характеристики полей напряжений и деформаций при установившейся ползучести стохастически неоднородной плоскости // Изв. вузов. Машиностроение, 2006. №2. С. 3–11. [Radchenko V. P., Popov N. N. Statistical characteristics of the stress and strain fields at steady-state creep for stochastically inhomogeneous plane // Izv. Vuzov. Mashinostroenie, 2006. no. 2. Pp. 3–11].

6. Коваленко Л. В., Попов Н. Н., Радченко В. П. Решение плоской стохастической краевой задачи ползучести // ПММ, 2009. Т. 73, № 6. С. 1009–1016; англ. пер.: *Kovalenko L. V., Popov N. N., Radchenko V. P. Solution of the plane stochastic creep boundary value problem // J. Appl. Math. Mech.* Vol. 73, no. 6. Pp. 727–733.
7. Попов Н. Н., Забелин С. А. Решение нелинейной стохастической задачи ползучести методом малого параметра при плоском напряженном состоянии // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2006. № 43. С. 106–112. [*Popov N. N., Zabelin S. A. Solution of nonlinear stochastic creep problem the small parameter method in plane stress // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2006. Vol. 43. Pp. 106–112].
8. Попов Н. Н., Коваленко Л. В., Яшин М. А. Решение плоской нелинейной стохастической задачи ползучести методом спектральных представлений // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2009. № 2(19). С. 99–106. [*Popov N. N., Kovalenko L. V., Yashin M. A. Solution of plane nonlinear stochastic problem with spectral representation method // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2009. no. 2(19). Pp. 99–106].
9. Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. Прикладные задачи теории вероятностей. М.: Радио и связь, 1983. 416 с. [*Wentzel E. S., Ovcharov L. A. Applied Problems in Probability Theory. Moscow: Radio i Svyaz', 1983. 416 pp.*]
10. Пугачев В. С. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Физматлит, 2002. 496 с. [*Pugachev V. S. Theory of Probability and Mathematical Statistics. Moscow: Fizmatlit, 2002. 496 pp.*]

Поступила в редакцию 22/X/2011;
в окончательном варианте — 01/XII/2011.

MSC: 35Q74; 74E35, 74K20

SOLUTION OF NONLINEAR CREEP PROBLEM FOR STOCHASTICALLY INHOMOGENEOUS PLANE ON THE BASIS OF THE SECOND APPROXIMATION FOR SMALL PARAMETER METHOD

N. N. Popov, O. O. Chernova

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia.

E-mails: ponick25@gmail.com, chernova_olga@citydom.ru

The analytical method for nonlinear stochastic creep problem solving for a plane stressed state was developed. Stochasticity was introduced into the determinative creep equation, which was taken in accordance with the nonlinear theory of viscous flow, through a homogeneous random function of coordinates. The problem was solved on the basis of the second approximation for small parameter method in stress tensor components. The main statistical characteristics of the random stress field were calculated. The analysis of the results in the first and second approximations was obtained.

Key words: *stochastic problem, steady-state creep, small parameter method, second approximation, random stress field.*

Original article submitted 22/X/2011;
revision submitted 01/XII/2011.

Nikolay N. Popov (Ph. D. (Phys. & Math.)), Associate Professor, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science. *Olga O. Chernova*, Postgraduate Student, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science.