

УДК 517.958:532.5.013

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЕРТИКАЛЬНОГО ВЫТЕСНЕНИЯ НЕФТИ ВОДОЙ С УЧЕТОМ ВЯЗКОСТНЫХ, ГРАВИТАЦИОННЫХ И КАПИЛЛЯРНЫХ СИЛ

Г. Т. Булгакова, Н. Р. Кондратьева

Уфимский государственный технический университет,
450000, Россия, Уфа, ул. К. Маркса, 12.

E-mail: kondratyevanr@mail.ru

Представлена аналитическая модель одномерного водонефтяного вытеснения, которая учитывает три основные силы: капиллярные, гравитационные и вязкостные. Данная математическая модель имеет вид нелинейного параболического дифференциального уравнения второго порядка. В симуляторе Schlumberger ECLIPSE ver. 2004a_1 построена гидродинамическая модель рассматриваемого процесса. Результаты численного моделирования сравниваются с аналитическим решением задачи.

Ключевые слова: гидродинамическое моделирование, математическое моделирование, капиллярные силы.

Введение. Широкое распространение методов заводнения сделало вытеснение нефти водой из пластов основным процессом разработки месторождений. Как и любой другой, метод заводнения нуждается в предварительном изучении для выбора лучших условий добычи. Анализ одномерных течений позволяет выявить основные эффекты и характерные особенности фильтрации жидкостей.

Эта работа представляет аналитическую модель для одномерного водонефтяного вытеснения, которая учитывает три основные силы: капиллярные, гравитационные и вязкостные.

Модель в безразмерных переменных принимает вид нелинейного параболического дифференциального уравнения второго порядка, которое предполагает, что каждая из трех сил включается независимо. Влияние вязкости воды, скорости закачиваемого потока, величины капиллярного давления рассмотрено в структуре безразмерного гравитационного числа и безразмерного капиллярного числа. Аналитическое решение полученного дифференциального уравнения сопоставляется с результатами гидродинамического моделирования.

Модель вытеснения. Математическая модель потока двух несмешивающихся флюидов в однородном линейном резервуаре базируется на двух основных уравнениях: уравнение сохранения массы и уравнение скорости [1]. Скорость каждой фазы описывается законом Дарси:

$$u_w = -k\lambda_{rw}(S_w) \left[\frac{\partial p_w}{\partial z} + \gamma_w \frac{\partial H}{\partial z} \right], \quad u_o = -k\lambda_{ro}(S_w) \left[\frac{\partial p_o}{\partial z} + \gamma_o \frac{\partial H}{\partial z} \right]. \quad (1)$$

Здесь u_i — скорость i -той фазы, k — абсолютная проницаемость, $\lambda_{ri}(S_i)$ — относительная подвижность i -той фазы, p_i — давление i -той фазы, H — глубина,

Гузель Талгатовна Булгакова (д.ф.-м.н., проф.), профессор, каф. математики. Найля Рашитовна Кондратьева, аспирант, каф. математики.

z — координата, $\gamma_i = g\rho_i$, g — ускорение свободного падения, ρ_i — плотность i -той фазы. Насыщенности фаз связаны следующим уравнением:

$$S_w + S_o = 1. \quad (2)$$

Капиллярное давление определяется как

$$P_c(S_w) = P_o - P_w. \quad (3)$$

При условии несжимаемости флюидов и неизменной общей добычи через единицу площади сечения следует, что

$$u_t = u_w + u_o. \quad (4)$$

Уравнение сохранения массы имеет вид

$$\varphi \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial u_w}{\partial z} = 0, \quad (5)$$

где φ — пористость.

При комбинировании уравнений (1)–(5) скорость воды может быть описана как

$$u_w = k^* \lambda_{ro} \frac{\lambda_{rw}}{\lambda_{rt}} \left[\frac{dp_c}{dS_w} \frac{\partial S_w}{\partial z} - \Delta\gamma \frac{\partial H}{\partial z} \right] + \frac{\lambda_{rw}}{\lambda_{rt}} u_t, \quad (6)$$

где $\lambda_{rt} = \lambda_{rw} + \lambda_{ro}$ — общая подвижность. Подставляя (6) в (5), получим

$$\varphi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \lambda_{ro} \frac{\lambda_{rw}}{\lambda_{rt}} \frac{dp_c}{dS_w} \frac{\partial S_w}{\partial z} - k \lambda_{ro} \frac{\lambda_{rw}}{\lambda_{rt}} \Delta\gamma \frac{\partial H}{\partial z} + \frac{\lambda_{rw}}{\lambda_{rt}} u_t \right) = 0. \quad (7)$$

Первое слагаемое уравнения (7) определяет вклад капиллярных сил, второе — вклад гравитационных сил и третье слагаемое характеризует силы вязкого трения.

Приведём уравнение (7) к безразмерному виду по аналогии с принципами, изложенными в [2, с. 181–276]. Введём следующие безразмерные переменные:

$$S = \frac{S_w - S_{iw}}{1 - S_{or} - S_{iw}}, \quad \varphi^* = \varphi (1 - S_{or} - S_{iw}), \\ z_D = z/L, \quad H_D = H/L, \quad t_D = u_t / \varphi^* L t.$$

Здесь S_{iw} , S_{or} — насыщенности связанной водой и остаточной нефтью соответственно. Представим функции относительных фазовых проницаемостей и капиллярного давления как функции от насыщенности:

$$\lambda_{rw} = \lambda_{rw}^*(S)^{nw} = \frac{k_{rw}^*}{\mu_w} (S)^{nw}, \\ \lambda_{ro} = \lambda_{ro}^*(1 - S)^{no} = \frac{k_{ro}^*}{\mu_o} (1 - S)^{no}, \quad p_c = -p_c^* \ln(S),$$

где k_{rw}^* , k_{ro}^* — предельные точки кривых относительной фазовой проницаемости для воды и нефти соответственно, p_c^* — параметр функции капиллярного давления. В итоге получим

$$\frac{\partial}{\partial z_D} \left[\frac{1}{N_{Pe}} D_C(S) \frac{\partial S}{\partial z_D} + N_G G(S) - V(S) \right] - \frac{\partial S}{\partial t_D} = 0. \quad (8)$$

Здесь

$$N_{Pe} = \frac{U_t L}{k \lambda_{rw}^* p_c^*} \quad (9)$$

— безразмерное капиллярное число;

$$N_G = \frac{k \lambda_{rw}^* \Delta \gamma}{u_t} \frac{\partial H_D}{\partial z_D}$$

— безразмерное гравитационное число;

$$D_C(S) = \frac{(1-S)^{no} S^{nw-1}}{(1-S)^{no} + M S^{nw}}, \quad G(S) = \frac{(1-S)^{no} S^{nw}}{(1-S)^{no} + M S^{nw}},$$

$$V(S) = \frac{M S^{nw}}{(1-S)^{no} + M S^{nw}}, \quad M = \frac{\lambda_{rw}^*}{\lambda_{ro}^*}.$$

Аналитическое решение. Уравнение (8) дополним начальным и граничным условиями:

$$S(z_D, t_D = 0) = 0, \quad S(z_D = 0, t_D) = 1. \quad (10)$$

Важно наиболее полно оценить влияние капиллярных и гравитационных сил на процесс вытеснения, поэтому задача о вертикальном вытеснении нефти водой решается для произвольных значений гравитационных и капиллярных сил. Решение ищется для случая $N_{Pe} = m$, $D_C = 1$, $V = S$, $G = S$, $N_G = n$, где $m \neq 0$ и $n \neq 1$ — произвольные числа.

Тогда (8) примет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t_D} = \frac{1}{m} \frac{\partial^2 S}{\partial z_D^2} + (n-1) \frac{\partial S}{\partial z_D}. \quad (11)$$

После приведения уравнения (11) к каноническому виду получаем задачу для нахождения функции $V(z_D, t_D)$, которая связана с функцией $S(z_D, t_D)$:

$$S(z_D, t_D) = \exp\left(-\frac{(n-1)m}{2} z_D - \frac{(n-1)^2 m}{4} t_D\right) V(z_D, t_D).$$

Для нахождения функции $V(z_D, t_D)$ решается следующая краевая задача [3, 242–249]:

$$V'_{t_D} = \frac{1}{m} V''_{z_D z_D}; \quad V(z_D, t_D = 0) = 0, \quad V(z_D = 0, t_D) = \exp\left(\frac{(n-1)^2 m}{4} t_D\right).$$

Отсюда

$$V(z_D, t_D) = \exp\left(\frac{(n-1)^2 m}{4} t_D\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{z_D \sqrt{m}}{2\sqrt{t_D}}\right),$$

и решение задачи (11), (10) представляется как

$$S(z_D, t_D) = \exp\left(\frac{(n-1)m}{2} z_D\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{z_D \sqrt{m}}{2\sqrt{t_D}}\right).$$

На рис. 1 представлено изменение во времени профиля водонасыщенности, полученного из решения задачи (11), (10).

Оценим характер изменения профиля водонасыщенности в зависимости от значений гравитационного числа N_G и капиллярного числа N_{P_e} . Рассмотрим несколько вариантов: 1) $N_G = 0$, $N_{P_e} = 0,5$; 2) $N_G = 0,196$, $N_{P_e} = 0,5$ (направление гравитационного числа и направление закачки совпадают, т. е. $\partial H_D / \partial z_D > 0$); 3) $N_G = -0,196$, $N_{P_e} = 0,5$ (направление гравитационного числа и направление закачки различны, т. е. $\partial H_D / \partial z_D < 0$); 4) $N_G = 0,196$, $N_{P_e} = 1$ (направление гравитационного числа и направление закачки совпадают, т. е. $\partial H_D / \partial z_D > 0$). Расчёт производился по следующим данным: $u_t = 0,00001$ м/с, $k = 1$ мкм², $\Delta\gamma = 200$ Па/м $\lambda_{rw}^* = 1000$ (Па · с)⁻¹, $L = 50$ м, $p_c^* = 10^6$ Па; На рис. 2 представлены графики распределения водонасыщенности, соответствующие вариантам, описанным выше.

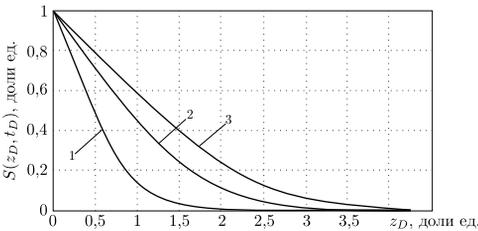


Рис. 1. Профиль водонасыщенности для случая $N_G = 0,196$, $N_{P_e} = 0,5$ в различные моменты времени: 1) $t_D = 0,1$; 2) $t_D = 0,3$; 3) $t_D = 0,5$

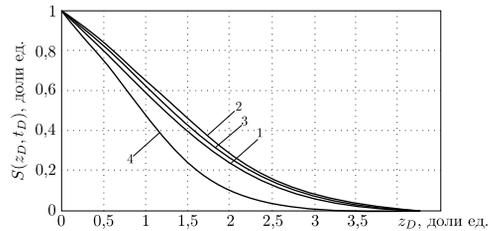


Рис. 2. Профиль водонасыщенности при различных N_G и N_{P_e} : 1) $N_G = 0,196$, $N_{P_e} = 0,5$; 2) $N_G = -0,196$, $N_{P_e} = 0,5$; 3) $N_G = 0$, $N_{P_e} = 0,5$; 4) $N_G = 0,196$, $N_{P_e} = 1$

Проведенный анализ чувствительности позволяет оценить вклад гравитационных и капиллярных сил в процесс вытеснения. С ростом числа N_{P_e} водонефтяной фронт движется быстрее. Это объясняется тем, что по определению капиллярного числа (9), параметр N_{P_e} и капиллярное давление обратно пропорциональны. При больших значениях N_{P_e} величина капиллярного давления мала, при этом предполагается, что порода одинаково смачивается и нефтью, и водой. В этом случае капиллярные силы будут противодействовать процессу вытеснения. Представления различных исследователей о механизме проявления и роли капиллярных процессов при вытеснении нефти водой из пористых сред широко описаны в [4]. Влияние гравитации взаимосвязано с направлением потока закачиваемой воды. Если их направления совпадают, то $\partial H_D / \partial z_D > 0$, гравитационные силы будут способствовать процессу вытеснения, и оно будет более эффективным, чем в случае, когда их направления различны.

Численное решение. В гидродинамическом симуляторе Schlumberger ECLIPSE ver.2004a_1 была построена аналогичная модель вытеснения нефти водой для одномерного случая. При расчёте используются следующие свойства флюидов и пористой среды:

проницаемость	1 мкм ²
пористость	0,01
плотность нефти	800 кг/м ³
плотность воды	1000 кг/м ³
вязкость нефти	5 МПа · с

вязкость воды 1 МПа · с
 множитель капиллярного давления $5 \cdot 10^6$; 10^6 Па

Гидродинамическая модель строилась для двух случаев: 1) $N_G = -0,196$, $N_{P_e} = 0,5$ (направление гравитационного числа и направление закачки различны, т.е. $\partial H_D / \partial z_D < 0$) при $p_c^* = 0,5 \cdot 10^6$ Па; 2) $N_G = 0,196$, $N_{P_e} = 1$ (направление гравитационного числа и направление закачки различны, т.е. $\partial H_D / \partial z_D > 0$) при $p_c^* = 10^6$ Па. Расчёт производился по следующим данным: $u_t = 0,00001$ м/с, $k = 1$ мкм², $\Delta\gamma = 200$ Па/м, $\lambda_{rw}^* = 1000$ (Па · с)⁻¹, $L = 50$ м. На рис. 3 представлено сравнение профиля водонасыщенности для задачи, решённой аналитически и численно в момент времени $t_D = 0,5$.

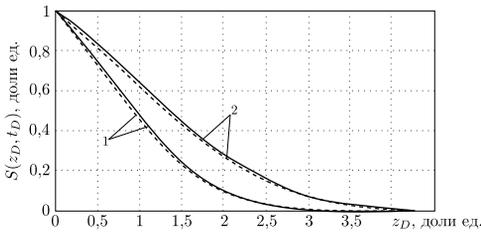


Рис. 3. Сравнение аналитического и численного решения задачи вытеснения: 1) $N_G = -0,196$, $N_{P_e} = 0,5$; 2) $N_G = 0,196$, $N_{P_e} = 1$; штриховая линия — численное решение

В результате можно говорить о том, что численное решение обеспечивает удовлетворительную сходимость во всей рассматриваемой области. Для выполнения начальных и граничных условий поставленной задачи при заданных числовых параметрах пласта и флюидов в гидродинамической модели число слоев по вертикали следует задавать не менее 300 при толщине слоя 1 м. При увеличении толщины слоя, а значит, и уменьшении обще-

го числа слоёв решить задачу численно невозможно, так как система нелинейных уравнений не имеет решения. Вместе с тем дальнейшее увеличение числа слоев более 300 позволит получить численное решение задачи для последующих моментов времени. Нельзя не отметить, что гидродинамические модели с малым количеством слоев не позволяют в полной мере учитывать все физические процессы, протекающие в пласте.

Выводы.

1. Представлено уравнение для описания двухфазного несмешивающегося потока в однородной линейной пористой среде. Математическая модель имеет вид нелинейного параболического дифференциального уравнения второго порядка.
2. Получено аналитическое решение задачи о вертикальном вытеснении нефти водой для произвольных значений гравитационных и капиллярных сил в одномерном случае.
3. Определено безразмерное гравитационное число N_G и безразмерное капиллярное число N_{P_e} . Это позволяет оценить влияние каждой силы на процесс вытеснения.
4. В гидродинамическом симуляторе Schlumberger ECLIPSE ver.2004a_1 построена модель рассматриваемого процесса. Результаты численного моделирования сравниваются с аналитическим решением задачи.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Aziz Kh., Settari A. Petroleum Reservoir Simulation. London: Applied Science Publishers LTD, 1979. 497 pp.; русск. пер.: Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем. М.: Наука, 1982. 386 с.

2. Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М.: Недра, 1972. 288 с. [Barenblatt G. I., Yentov V. M., Ryzhik V. M. The theory of the unsteady filtration of liquid and gas. Moscow: Nedra, 1972. 288 pp.]
3. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 741 с. [Tikhonov A. N., Samarskiy A. A. Equations of mathematical physics. Moscow: Nauka, 1977. 741 pp.]
4. Гиматудинов Ш. К. Физика нефтяного и газового пласта. М.: Недра, 1971. 312 с. [Gimatudinov Sh. K. Physics of the oil and gas reservoir. Moscow: Nedra, 1971. 312 pp.]

Поступила в редакцию 16/X/2011;
в окончательном варианте — 20/XII/2011.

MSC: 76S05

ANALYTICAL MODEL OF VERTICAL OIL-WATER DISPLACEMENT WITH THE ACCOUNT OF VISCOUS, CAPILLARY AND GRAVITY FORCES

G. T. Bulgakova, N. R. Kondratyeva

Ufa State Technical University,
12, K. Marx st., Ufa, 450000, Russia

E-mail: kondratyevanr@mail.ru

A mathematical model of water displacement in vertical porous media is presented. The mathematical formulation takes the form of a nonlinear convection-diffusion equation. Its contribution comes from consideration of the three chief forces: viscous, capillary and gravity in oil recovery processes. A numerical model was based on the simulator Schlumberger ECLIPSE ver. 2004a-1. Finally, analytical and numerical results are compared.

Key words: *hydrodynamic modeling, mathematical modeling, gravity forces, capillary forces.*

Original article submitted 16/X/2011;
revision submitted 20/XII/2011.