Дифференциальные уравнения

УДК 517.956.6

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ СОПРЯЖЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО И ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПОВ С ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ОБЛАСТЕЙ

В. А. Елеев, А. Х. Балкизова

Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова,
360004, Нальчик, ул. Чернышевского, 173.

E-mails: eleev@yandex.ru, alena-balkizova@rambler.ru

Доказана однозначная разрешимость задач сопряжения гиперболического и параболического уравнений в конечных областях методом эквивалентной редукции к интегральному уравнению Вольтерра второго рода.

Ключевые слова: *интегральное уравнение Вольтерра, задачи сопряжения, функции Бесселя.*

Необходимость рассмотрения сопряжения, когда на одной части области задано уравнение параболического типа, а на другой — уравнение гиперболического типа, была впервые высказана И. М. Гельфандом в 1959 г. [1]. К задаче сопряжения приводит изучение электрических колебаний в проводах. Такого рода задачи встречаются также при изучении движения жидкости в канале, окруженной пористой средой, в теории распространения электромагнитных полей и в ряде других областей физики. Так, в канале гидродинамическое давление жидкости удовлетворяет волновому уравнению, а в пористой среде — уравнению фильтрации, которое в данном случае совпадает с уравнением диффузии [2]. При этом на границе канала выполняются некоторые условия сопряжения. Аналогичная ситуация имеет место для магнитной напряженности электромагнитного поля в указанной выше неоднородной среде [3]. Большой интерес представляет изучение влияния вязкоупругих свойств нефти на различные технологические процессы ее добычи [4, 5]. Если рассмотреть совместное движение различных несмешивающихся жидкостей в трещинах и пористых пластах с учетом вязкоупругих характеристик, то движение вязкоупругой и вязкой жидкостей в плоской горизонтальной трещине без учета поверхностных явлений описывается одномерным гиперболическим уравнением и уравнением теплопроводности с интегро-дифференциальными условиями на границе раздела движущихся жидкостей.

В монографии А. Г. Шашкова [7] строится структурная модель теплопроводности в системе, составленной из теплоизолированных с боковой поверхности ограниченного и полуограниченного стержней, имеющих одинаковую

Валерий Абдурахманович Елеев (д.ф.-м.н., профессор), зав. кафедрой, каф. теории функций и функционального анализа. *Алёна Хамидбиевна Балкизова*, аспирант, каф. теории функций и функционального анализа.

температуру. На свободный конец системы поступает изменяющийся во времени тепловой поток. Температурное поле в ограниченном стержне описывается обычным уравнением теплопроводности, а в полуограниченном — гиперболическим уравнением. Теплофизические свойства стержней различны. В месте соприкосновения стержней имеет место идеальный тепловой поток. Большой интерес представляет изучение математических моделей, описывающих влияние растительного покрова на теплообменные процессы в почве и приземном воздухе, при котором возникает необходимость исследования задачи для двух уравнений: уравнения Аллера переноса влаги, предполагающего бесконечную скорость распространения возмущения, и уравнение А. В. Лыкова, учитывающего конечную его скорость. При этом коэффициенты уравнений таковы, что они инвариантны относительно групп преобразований.

Достаточно полная библиография, посвященная постановке и решению сопряженных задач для почв различных структур при различных условиях на границе «почва — воздух», имеется в монографии А. Ф. Чудновского [8]. В связи с изложенным возникает необходимость поиска корректно поставленных краевых задач, сформулированных одновременно для волнового уравнения и уравнения теплопроводности. Среди ранних работ, тесно примыкающих по тематике к данной статье, особо отметим работу Г. М. Стручиной [9]. Она посвящена задаче сопряжения двух уравнений по пространственной переменной. Эта задача эквивалентно сводится к интегральному уравнению Вольтерра второго рода, решение которого получено в замкнутой форме. Л. А. Золина исследовала корректную постановку задачи сопряжения по временной переменной для таких уравнений и изучила структурные и качественные свойства решения [10]. М. А. Абдрахманов методом интегральных преобразований доказал однозначную разрешимость двумерной задачи сопряжения [11]. Е. А. Островский рассмотрел также одномерную задачу сопряжения двух уравнений, когда в граничные условия входят производные по времени методом контурных интегралов [12]. В. И. Корзюк исследовал однозначную разрешимость задачи о сопряжении уравнений гиперболического и параболического типов в многомерном случае методами функционального анализа [13].

За последние несколько десятилетий в математической литературе появилось значительное количество публикаций, посвященных задачам сопряжения по временной переменной. Достаточно полная библиография по этой теории содержится в монографиях Т. Д. Джураева [14], Т. Д. Джураева, А. Сопуева и М. Мамажанова [15], в докторских диссертациях Д. Базарова [16], В. А. Елеева [17], О. А. Репина [18], К. Б. Сабитова [19]. В приведенных выше работах задачи сопряжения двух уравнений по пространственной переменной в основном изучались для бесконечных или полубесконечных областей.

В настоящей работе решаются задачи о сопряжении гиперболического и параболического уравнений по пространственной переменной в конечных областях. Здесь отметим работу В. А. Нахушевой [20], в которой в конечной области построена корректная математическая модель задачи сопряжения, найдены фундаментальные соотношения между температурой и ее градиентом в точке идеального контакта составной системы.

Рассматривается уравнение

$$0 = \begin{cases} (-x)^m u_{tt} - a^2 u_{xx} + b^2 u, & 0 \leqslant m \leqslant 2, \quad x < 0, \\ u_t - c^2 u_{xx}, & x > 0 \end{cases} \tag{1}$$

в конечной области Ω, ограниченной отрезками AB, BB_0 и A_0B_0 прямых $t = 0$, $x = 1$, $t = 1$ соответственно и характеристиками $AC: \xi = t - (2/(m+2) \times$ $\times (-x))^{(m+2)/2} = 0$, $A_0C: \eta = t + (2/(m+2)(-x))^{(m+2)/2} = 1$, $\Omega_1 = \Omega \bigcap (x > 0)$, $\Omega_2 = \Omega \bigcap (x < 0)$.

Задача T_α^β. *Найти функцию $u(x,t)$, которая удовлетворяет следующим условиям:*

1) *является регулярным решением уравнения* (1) *в области Ω при $x \neq 0$;*
2) *удовлетворяет граничным условиям*

$$u|_{AB} = \varphi_0(x), \quad \left[\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta u\right]_{BB_0} = \varphi_1(t), \quad u|_{AC} = \psi(x) \tag{2}$$

и условиям сопряжения

$$u(-0,t) = u(+0,t), \quad h_1 \frac{\partial u}{\partial x}(-0,t) = h_2 \frac{\partial u}{\partial x}(+0,t), \tag{3}$$

где α, β, h_1, h_2 — константы, $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(t)$, $\psi(x)$ — заданные функции.

Справедлива

Теорема 1. *Пусть выполняются условия:*

1) $0 < m < 2$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$; $\varphi_0(0) = \psi(0)$, $\varphi_0(x) \in C^1[0,1]$, $\varphi_1(t) \in C[0,1]$; $\psi(x) \in C^4[-1/2, 0]$, $a = 1$, $c = 1$, $b = 0$, $\varphi_0(0) = \varphi_1(0) = 0$, $\varphi_1(1) = \varphi_1(0)$;
2) $\alpha = 0$, $\beta = 1$; $\varphi_0(x) \in C^2[0,1]$, $\varphi_1(t) \in C[0,1]$, $\psi(x) \in C^4[-1/2, 0]$, $\varphi_0(0) = \varphi_0'(0) = \psi(0) = 0m$ $\varphi_0(1) = \varphi_1(0)$; $a = 1$, $c = 1$, $b = 0$, $0 < m < 2$.

Тогда задача T_0^1 имеет, и притом единственное, решение.

Доказательство. Рассмотрим условие 1). Переходя к решению поставленной задачи, воспользуемся первым условием сопряжения из (3) и обозначим через $\mu(t)$ значение функции $u(x,t)$ на прямой $x = 0$:

$$\mu(t) = u(-0,t) = u(+0,t). \tag{4}$$

Решение первой краевой задачи (1), (2), (4) в Ω_1 имеет вид

$$u(x,t) = \int_0^1 \varphi_0(\xi) G(\xi, 0; x, t) d\xi + \int_0^t \mu(\eta) G_\xi(0, \eta; x, t) d\eta - \\ - \int_0^t \varphi_1(\eta) G_\xi(1, \eta; x, t) d\eta, \tag{5}$$

где

$$G(\xi, \eta; x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\eta)}} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \Big\{ \exp\Big[-\frac{(x - \xi + 2n)^2}{4(t-\eta)}\Big] -$$

$$-\exp\Big[-\frac{(x+\xi+2n)^2}{4(t-\eta)}\Big]\Big\} \quad (6)$$

— функция Грина первой краевой задачи для уравнения (1) при $x>0$. В силу свойств функции Грина (6) из (5) получаем [21]

$$\nu^+(t) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{\mu'(\eta)d\eta}{(t-\eta)^{1/2}} + \int_0^t k_0(t,\eta)\mu'(\eta)d\eta + \psi_0(t), \qquad (7)$$

где

$$k_0(t,\eta) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}{}' (t-\eta)^{-1/2}\exp\Big(-\frac{n^2}{t-\eta}\Big), \qquad (8)$$

$$\psi_0(t) = \int_0^1 \varphi_0(\xi)G_x(\xi,0;0,t)d\xi - \int_0^t \varphi_1(\eta)G_{\xi x}(1,\eta;0,t)dt,$$

где $\sum'$ означает, что $n\neq 0$, $\nu^+(t) = \lim\limits_{x\to+0} u_x(x,t)$.

Учитывая свойства заданных функций $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(t)$, можем заключить, что $\psi_0(t)\in C^1[0,1]\bigcap C^2]0,1[$. Найдём теперь функциональное соотношение между $\mu(t)$ и $\nu^-(t)$, которое приносится из гиперболической части Ω_2 на линию $x=0$. Для этого в уравнении (1) при $x<0$ перейдём к характеристическим координатам:

$$\xi = t-(2/(m+2))(-x)^{(m+2)/2}, \quad \eta = t+(2/(m+2))(-x)^{(m+2)/2}.$$

В результате уравнение (1) в области его гиперболичности перейдёт в уравнение Эйлера—Дарбу—Пуассона:

$$u_{\xi\eta} + \frac{\bar\beta}{\eta-\xi}(u_\xi - u_\eta) = 0, \quad 0<\xi<\eta<1, \qquad (9)$$

где $2\bar\beta = m/(m+2)$, а краевое условие $u|_{AC} = \psi(x)$ — в условие

$$u|_{\xi=0} = \psi\Big[-\Big(\frac{m+2}{4}\Big)^{1-2\bar\beta}\eta^{1-2\bar\beta}\Big] = \varphi(\eta), \quad 0\leqslant\eta\leqslant 1. \qquad (10)$$

При этом

$$\Big(\frac{m+2}{2}\Big)^{2\bar\beta}\Big[(\eta-\xi)^{2\bar\beta}(u_\xi-u_\eta)\Big]_{\eta=\xi} = \nu^-(\xi). \qquad (11)$$

Решение задачи Дарбу (9)–(11) выражается формулой

$$u(\xi,\eta) = \gamma_0\int_0^\xi (\xi-z)^{-\bar\beta}(\eta-z)^{-\bar\beta}\nu^-(z)dz + \\ + \int_0^\eta [\varphi'(z)+\bar\beta z^{-1}\varphi(z)]H(0,z;\xi,\eta)dz, \qquad (12)$$

где $\gamma_0 = (-2^{2\bar\beta-1}\rho)/(m+2)^{2\bar\beta}$, $\rho = \Gamma(\bar\beta)/[\Gamma(1-\bar\beta)\Gamma(2\bar\beta)]$, $H(0,z;\xi,\eta) = \rho z^{2\bar\beta}\eta^{-\bar\beta}\times$ $\times(\xi-z)^{-\bar\beta}$ — след функции Грина—Адамара уравнения (9) [21].

В равенстве (12) положим $\eta = \xi = t$, $0 < t < 1$. В результате получим функциональное соотношение между $\mu(t)$ и $\nu^-(t)$:

$$\mu(t) = \gamma_0 \int_0^t (t-\eta)^{-2\bar{\beta}} \nu^-(\eta) d\eta + \psi_1(t), \tag{13}$$

где

$$\psi_1(t) = \rho t^{-\beta} \int_0^t \eta^{2\bar{\beta}} (t-\eta)^{-\bar{\beta}} [\varphi'(\eta) + \bar{\beta}\eta^{-1}\varphi(\eta)] d\eta,$$

причём $\alpha^j \varphi(\eta)/d\eta^j = \eta^{1-2\bar{\beta}} \varphi_j^*(\eta)$, где $\varphi_j^*(\eta) \in C[0,1]$, j принимает значения $0, 1, 2, 3$.

С учётом этого легко заметить, что $\psi_1(t) \in C[0,1] \bigcap C^3]0,1[$, $\psi_1(t) = t^{1-2\bar{\beta}} \mathsf{O}(1)$, где символ $\mathsf{O}(1)$ означает ограниченную величину. Перепишем уравнение (13) в виде

$$D_{0t}^{2\bar{\beta}-1} \nu^-(t) = \bar{\gamma_0} \mu(t) + \bar{\gamma_0} \psi_1(t), \tag{14}$$

где $\bar{\gamma_0} = 1/[\gamma_0 \Gamma(1-2\bar{\beta})]$, D_{0t}^l — оператор дробного интегрирования порядка $-l$ при $l < 0$ и обобщенная в смысле Лиувилля производная порядка l при $l > 0$.

К обеим частям равенства (14) применим оператор $D_{0t}^{1-2\bar{\beta}}$, обратный оператору $D_{0t}^{2\bar{\beta}-1}$. Будем иметь

$$\nu^-(t) = \bar{\gamma_0} D_{0t}^{1-2\bar{\beta}} \mu(t) + \bar{\gamma_0} D_{0t}^{1-2\bar{\beta}} \psi_1(t). \tag{15}$$

В силу второго условия сопряжения из (3) получим

$$D_{0t}^{-2\bar{\beta}} \mu'(t) + \lambda D_{0t}^{-1/2} \mu'(t) = \frac{1}{\Gamma(2\bar{\beta})} \left[\overline{\psi}_0(t) + \int_0^t k_0(t,\eta) \mu'(\eta) d\eta \right], \tag{16}$$

где $\lambda = -[\sqrt{\pi}\Gamma(1-2\bar{\beta})\bar{\gamma}_0 h_2]/\sqrt{\pi} h_1$, $\bar{\psi}_0(t) = \psi_0(t) - \frac{h_1}{\gamma_0 \Gamma(1-2\bar{\beta})} D_{0t}^{1-2\bar{\beta}} \bar{\psi}_1(t)$.

Действуя на обе части равенства (16) оператором $D_{0t}^{2\bar{\beta}}$, получим

$$\mu'(t) + \bar{\lambda} \int_0^t \frac{\mu'(\eta)}{(t-\eta)^{2\bar{\beta}+1/2}} d\eta = \frac{1}{\Gamma(2\bar{\beta})} D_{0t}^{2\bar{\beta}} \left[\overline{\psi}_0(t) + \int_0^t k_0(t,\eta) \mu'(\eta) d\eta \right], \tag{17}$$

где $\bar{\lambda} = \lambda / \Gamma(1/2 - 2\bar{\beta})$.

Резольвента ядра $(t-\eta)^{-2\bar{\beta}-1/2}$ оператора Вольтерра в левой части (17) имеет вид [22]

$$R(t-\eta, \bar{\lambda}) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\lambda}^{n-1} \frac{[\Gamma(1/2 - 2\bar{\beta})]^n}{\Gamma[n(1/2 - 2\bar{\beta})]} (t-\eta)^{\eta(1/2-2\bar{\beta})-1}. \tag{18}$$

После обращения интегрального оператора Вольтерра уравнение (17) примет вид

$$\mu'(t) + \bar{\bar{\lambda}} \int_0^t R(t-\eta, \bar{\lambda}) D_{0t}^{2\bar{\beta}} \int_0^t k_0(t, \eta_1) \mu'(\eta_1) d\eta_1 d\eta =$$
$$= \bar{\bar{\lambda}} \int_0^t R(t-\eta, \bar{\lambda}) D_{0t}^{2\bar{\beta}} \bar{\psi}_0(t) d\eta, \quad (19)$$

где $\bar{\bar{\lambda}} = \bar{\lambda}/\Gamma(2\bar{\beta})$.

Принимая во внимание, что в равенстве (19)

$$D_{0t}^{2\bar{\beta}} \int_0^t k_0(t, \eta_1) \mu'(\eta_1) d\eta_1 =$$
$$= \frac{1}{\Gamma(1-2\bar{\beta})} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\eta_1)^{3/2-2\bar{\beta}} k_1(t, \eta_1) \mu'(\eta_1) d\eta_1 =$$
$$= \frac{1}{\Gamma(1-2\bar{\beta})} \int_0^t [(3/2 - 2\bar{\beta})(t-\eta_1)^{1/2-2\bar{\beta}} k_1(t, \eta_1) +$$
$$+ (t-\eta_1)^{-1/2-2\bar{\beta}} k_2(t, \eta_1)] \mu'(\eta_1) d\eta_1 = \frac{1}{\Gamma(1-2\beta)} \int_0^t \frac{N(t, \eta_1) \mu'(\eta_1) d\eta_1}{(t-\eta_1)^{2\bar{\beta}+1/2}},$$

где

$$k_1(t, \eta_1) = \int_0^1 z^{1/2} (1-z)^{-2\bar{\beta}} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty}{}' \exp\Big(-\frac{n^2}{(t-\eta_1) z}\Big) dz,$$
$$k_2(t, \eta_1) = n^2 \int_0^1 z^{-1/2} (1-z)^{-2\bar{\beta}} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty}{}' \exp\Big(-\frac{n^2}{(t-\eta_1) z}\Big) dz,$$

$$N(t, \eta_1) = (3/2 - 2\bar{\beta})(t-\eta_1) k_1(t, \eta_1) + k_2(t, \eta_1) \in C[0,1] \times$$
$$\times [0,1] \bigcap C^2]0,1[\times]0,1[, \ D_{0t}^{2\bar{\beta}} \bar{\psi}_0(t) \in C[0,1] \bigcap C^2]0,1[,$$

получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода с интегрируемой особенностью:

$$\mu'(t) + \bar{\bar{\lambda}} \int_0^t \frac{\bar{N}(t, \eta) \mu'(\eta)}{(t-\eta)^{2\bar{\beta}-1/2}} d\eta = q(t), \quad (20)$$

где

$$\bar{N}(t, \eta) = \int_0^1 \frac{R\big((t-\eta)(1-z), \bar{\lambda}\big) N(\eta + (t-\eta) z, \eta)}{z^{2\bar{\beta}+1/2}} dz,$$
$$q(t) = \bar{\bar{\lambda}} \int_0^t R(t-\eta, \bar{\lambda}) D_{0t}^{2\bar{\beta}} \bar{\psi}_0(t) d\eta.$$

В силу условий, наложенных на функцию $\psi(x)$, можем заключить, что $q(t) \in C[0,1] \bigcap C^2]0,1[$, следовательно, уравнение (20) однозначно и безусловно разрешимо в классе $C[0,1]$.

Обозначив через $T(t, \eta)$ резольвенту уравнения (20) и обратив его как интегральное уравнение Вольтерра второго рода, получим

$$\mu'(t) = q(t) + \int_0^t T(t, \eta) q(\eta) d\eta$$

или

$$\mu(t) = \int_0^t \left[1 + \int_\eta^t T(t,\eta_1)d\eta_1\right] q(\eta)d\eta.$$

После определения функции $\mu(t)$ по формуле (7) находим $\nu^+(t)$, а из равенства (15) — $\nu^-(t)$. Таким образом, решение задачи T_0^1 в области Ω_1 даётся формулой (5), а в Ω_2 — формулой (12).

Однозначная разрешимость случая 2 доказывается аналогично предыдущему случаю с использованием свойств функции Грина смешанной краевой задачи (1) при $x > 0$: $u(x,0) = \varphi_0(x)$, $u(1,t) = \varphi_1(t)$, $u_x(0,t) = \varphi_2(t)$. $\square$

Теорема 2. *Пусть выполняются условия*

1) $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\varphi_0(x) \in C^1[0,1]$, $\varphi_1(t) \in C[0,1]$, $\psi(x) \in C^4[-1/2,0]$, $\varphi_0(0) = \psi(0) = 0$, $\varphi_0'(1) = \varphi_1(0)$, $0 < m < 2$

или

2) $\alpha = 1$, $\beta = 0$; $\varphi_0(x) \in C^2[0,1]$, $\varphi_1(t) \in C[0,1]$, $\varphi_0(0) = \varphi_0'(0) = \psi(0) = 0$, $\varphi_0(1) = \varphi_1(0)$, $0 < m < 2$.

Тогда задача T_1^0 имеет, и притом единственное, решение.

Доказательство. Предположим, что решение задачи T_1^0 существует. Тогда в силу дифференциальных свойств функции Грина [21]

$$G(\xi,\eta;x,y) = \frac{\pi^{-1/2}}{2}(t-\eta)^{-1/2}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\Big\{\exp\Big[-\frac{(x-\xi+2n)^2}{4(t-\eta)}\Big] -$$
$$-\exp\Big[-\frac{(x+\xi+2n)^2}{4(t-\eta)}\Big] + \exp\Big[-\frac{(x+\xi-2+2n)^2}{4(t-\eta)}\Big] - \exp\Big[-\frac{(x-\xi-2+2n)^2}{4(t-\eta)}\Big]\Big\}$$

смешанной краевой задачи $u(x,0) = \varphi_0(x)$, $u(0,t) = \mu(t)$, $u_x(1,t) = \varphi_1(t)$ уравнения (1) при $x > 0$ функция $u(x,t)$ является решением нагруженного интегрального уравнения

$$u(x,t) = \int_0^1 \varphi_0(\xi)G(\xi,0;x,t)d\xi + \int_0^t u(0,\eta)G_\xi(0,\eta;x,t)d\eta +$$
$$+ \int_0^1 \varphi_1(\eta)G(1,\eta;x,t)d\eta. \quad (21)$$

Функциональное соотношение между $\mu(t)$ и $\nu^+(t)$ на линии $x = 0$ имеет вид

$$\nu^+(t) = -D_{0t}^{1/2}\mu(t) + \int_0^t k_3(t,\eta)\mu(t)dt + \psi_2(t), \quad (22)$$

где

$$k_3(t,\eta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}(t-\eta)^{-5/2}\Big\{(2-t+\eta)\exp[-1/(t-\eta)] +$$
$$+ \sum_{n=-\infty}^{n=\infty}{}' \big((t-\eta-2n^2)\exp[-n^2/(t-\eta)] +$$
$$+ (2(n-1)^2 - t + \eta)\exp[-(n-1)^2/(t-\eta)]\big)\Big\}, \quad (23)$$

$$\psi_2(t) = \int_0^1 \varphi_0(\xi) G_\xi(\xi, 0; 0, t) d\xi + \int_0^t \varphi_1(\eta) G_x(1, \eta; x, t) d\eta. \tag{24}$$

В силу второго условия сопряжения из (3) и равенств (15), (22) получим интегральное уравнение для определения $\mu(t)$:

$$\mu(t) + \lambda D_{ot}^{2\bar{\beta}-1/2}\mu(t) + \lambda \int_0^t \bar{k_3}(t,\eta)\mu(t)dt = \lambda D_{ot}^{2\bar{\beta}-1}\psi_2(t) - \psi_1(t),$$

где $\lambda = h_2/(h_1\bar{\gamma_0})$,

$$\bar{k}_3(t,\eta) = \frac{1}{\Gamma(1-2\bar{\beta})}\int_\eta^t (t-\eta_1)^{-2\bar{\beta}} k_3(\eta_1,\eta)d\eta_1.$$

Из представлений (23), (24) функций $k_3(t,\eta)$, $\psi_2(t)$ легко заключить, что $\bar{k}_3(t,\eta) \in C[0,1]\times[0,1]$, $\psi_2(t) \in C[0,1]$.

Поступая таким же образом, как для уравнения (20), находим единственным образом функцию $\mu(t)$, а затем из равенств (22) и (15) — функции $\nu^+(t)$ и $\nu^-(t)$.

Следовательно, решение задачи T_1^0 в области Ω_1 определяется формулой (21), а в Ω_2 — формулой (12). Случай 2 доказывается аналогично. □

Теорема 3. *Пусть выполнены следующие условия:* $\alpha = 1$, $\beta = -\gamma = \mathrm{const} > 0$, $2\bar{\beta} = 1/2$, *т. е.* $m = 2$, $u(x,0) = 0$, $x \geqslant 0$, $\varphi_1(t) \in C[0,1]$, $\varphi_0'(1) - \gamma\varphi_0(1) = \varphi_1(0)$. *Тогда задача* $T_1^{-\gamma}$ *имеет, и притом единственное, решение.*

Доказательство. Решение задачи $T_1^{-\gamma}$ в области Ω_1 будем искать в виде суммы тепловых потенциалов двойного слоя и простого слоя:

$$u(x,t) = \int_0^t \theta(\eta)\frac{x}{2\sqrt{\pi(t-\eta)}}e^{-\frac{x^2}{4(t-\eta)}}\frac{d\eta}{2(t-\eta)} + \int_0^t \nu^+(\eta)\frac{e^{-\frac{(x-1)^2}{4(t-\eta)}}d\eta}{2\sqrt{\pi(t-\eta)}}. \tag{25}$$

Удовлетворяя (25) второму граничному условию из (2) и условию (4), получим систему из интегральных уравнений Вольтерра первого и второго рода:

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \frac{\theta(t)}{2} + \frac{1}{2}\int_0^t \nu^+(t)\frac{1}{\sqrt{\pi(t-\eta)}}e^{-\frac{1}{4(t-\eta)}}d\eta, \\ \varphi_1(t) &= \frac{\nu^+(t)}{2} - \frac{\gamma}{2}\int_0^t \frac{\nu^+(\eta)d\eta}{\sqrt{\pi(t-\eta)}} - \frac{2\gamma+1}{4}\int_0^t \theta(\eta)e^{-\frac{1}{4(t-\eta)}}\frac{d\eta}{t-\eta}. \end{aligned} \tag{26}$$

Соотношение между $\mu(t)$ и $\nu^-(t)$, приносимое на линию $x = 0$, имеет вид

$$\mu(t) = \gamma_0 \int_0^t \frac{\nu^-(\eta)d\eta}{(t-\eta)^{1/2}} + \psi_1(t). \tag{27}$$

Перепишем второе уравнение системы (26) в виде

$$\nu^+(t) = \lambda \int_0^t \frac{\nu^+(\eta)}{(t-\eta)^{1/2}}d\eta + F(t), \tag{28}$$

где

$$F(t) = 2\varphi_1(t) + \frac{2\gamma+1}{2}\int_0^t \theta(\eta)\frac{1}{t-\eta}e^{-\frac{1}{4(t-\eta)}}d\eta, \quad \lambda = \gamma/\sqrt{\pi}.$$

Элементарные вычисления показывают, что в данном случае повторные ядра уравнения (28) выражаются так [9]: $K_n(t-\eta) = \pi^{\frac{n}{2}}(t-\eta)^{\frac{n-2}{2}}/\Gamma(n/2)$.

Тогда резольвента ядра интегрального уравнения (28) имеет вид

$$R(t-\eta) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big[\lambda^n \pi^{\frac{n}{2}}(t-\eta)^{\frac{n-2}{2}}/\Gamma(n/2)\Big]. \tag{29}$$

Решение уравнения (28) даётся формулой

$$\nu^+(t) = \int_0^t R(t-\eta)F(\eta)d\eta + F(t). \tag{30}$$

Учитывая в равенстве (30) значение функции $F(t)$ и выполняя несложные преобразования, получим

$$\nu^+(t) = \int_0^t Z(t,\eta)\theta(\eta)d\eta + \bar{\varphi}_1(t), \tag{31}$$

где

$$Z(t,\eta) = \int_0^1 R[(t-\eta)(1-z)]\frac{1}{z}e^{-\frac{1}{4(t-\eta)z}}dz + \frac{1}{t-\eta}e^{-\frac{1}{4(t-\eta)}},$$

$$\bar{\varphi}_1(t) = 2\bigg(\varphi_1(t) + \int_0^t R(t-\eta)\varphi_1(\eta)d\eta\bigg).$$

Подставляя (27) в первое уравнение системы (26) и учитывая второе условие сопряжения из (3), получим

$$\int_0^t \frac{G(t,\eta)}{\sqrt{t-\eta}}\nu^+(\eta)d\eta = \frac{\theta(t)}{2} - \psi_1(t), \tag{32}$$

где

$$G(t,\eta) = \frac{h_2\gamma_0}{h_1} - \frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{1}{4(t-\eta)}},$$

причём $G(t,t) = (h_2\gamma_0)/h_1$.

Следовательно, уравнение (32) можно свести к интегральному уравнению Вольтерра второго рода:

$$\nu^+(t) + \lambda_0\int_0^t \frac{\partial N(t,\eta)}{\partial t}\nu^+(\eta)d\eta = \lambda_1\int_0^t \frac{\theta'(\eta)d\eta}{\sqrt{t-\eta}} + \lambda_2\int_0^t \frac{\psi_1'(\eta)d\eta}{\sqrt{t-\eta}}, \tag{33}$$

где

$$N(t,\eta) = \int_0^1 \frac{G[\eta+(t-\eta)z,\eta]dz}{z^{1/2}(1-z)^{1/2}},$$

$$\lambda_0 = h_1/(\gamma_0 h_2), \quad \lambda_1 = (2h_1)/(\gamma_0 h_2), \quad \lambda_2 = h_1/h_2.$$

Исключая из системы (31), (33) $\nu^+(t)$ и выполняя несложные преобразования, получим
$$\int_0^t \frac{\theta'(\eta)d\eta}{\sqrt{t-\eta}} = \frac{1}{\lambda_1}\int_0^t \bar{Z}(t,\eta)\theta(\eta)d\eta + \bar{\bar{\varphi}}_1(t), \tag{34}$$
где
$$\bar{Z}(t,\eta) = Z(t,\eta) + \lambda_0 \int_\eta^t \frac{\partial N(t,\eta_1)}{\partial t} Z(\eta_1,\eta)d\eta_1,$$
$$\bar{\bar{\varphi}}_1(t) = \bar{\varphi}_1(t) + \lambda_0 \int_0^t \frac{\partial k_1(t,\eta)}{\partial t}\bar{\varphi}_1(\eta)d\eta,$$
причём $\bar{Z}(t,t) = 0$. Обращая (34) как интегральное уравнение Абеля относительно $\theta'(t)$, а затем интегрируя обе части полученного равенства от 0 до t, будем иметь
$$\theta(t) - \bar{\lambda}_1 \int_0^t M(t,\eta)\theta(\eta)d\eta = r(t), \tag{35}$$
где
$$M(t,\eta) = \int_\eta^t \frac{\bar{Z}(\eta_1,\eta)d\eta_1}{\sqrt{t-\eta_1}}, \quad r(t) = -\frac{1}{\pi}\int_0^t \frac{\bar{\bar{\varphi}}_1(\eta)d\eta}{\sqrt{t-\eta}}, \quad \bar{\lambda}_1 = 1/(\lambda_1\pi).$$

В силу представлений $N(t,\eta)$, $Z(t,\eta)$, а следовательно $\bar{Z}(t,\eta)$ и свойств функции $\varphi_1(t)$, нетрудно проверить, что $M(t,\eta) \in C[0,1]\times[0,1]$, $r(t)\in C[0,1]$.

Обращая интегральный оператор Вольтерра через резольвенту $T(t,\eta)$, получим
$$\theta(t) = r(t) + \bar{\lambda}_1 \int_0^t T(t,\eta)r(\eta)d\eta. \tag{36}$$
Подставляя значение $\theta(t)$ из соотношения (36) в равенство (31), находим $\nu^+(t)$, затем из первого равенства системы (26) определяем $\mu(t)$, а из второго условия сопряжения (3) получаем $\nu^-(t)$.

Следовательно, решение задачи $T_\alpha^{-\gamma}$ в области Ω_1 даётся формулой (25), а в Ω_2 — равенством (12). □

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* 1 *теоремы* 1: $a = 1$, $c = 1$, $b \neq 0$, $m = 0$. *Тогда задача* T_0^1 *имеет, и притом единственное, решение.*

Доказательство. Решение задачи Коши $u(0,t) = \mu(t)$, $u_x(0,t) = \nu^-(t)$ в области Ω_2 даётся формулой
$$u(x,t) = \frac{\mu(x+t)+\mu(t-x)}{2} + \frac{1}{2}\int_{t-x}^{t+x} \nu^-(\eta)J_0\big(b\sqrt{x^2-(t-\eta)^2}\big)d\eta + \frac{bx}{2}\int_{t-x}^{t+x} \frac{J_1\big(b\sqrt{x^2-(t-\eta)^2}\big)}{\sqrt{x^2-(t-\eta)^2}}\mu(\eta)d\eta, \tag{37}$$
где $J_0(z)$ и $J_1(z)$ — модифицированные функции Бесселя первого рода. Удовлетворяя (37) третьему условию из (2), получаем функциональное соотношение между $\mu(t)$ и $\nu^-(t)$, приносимое из области Ω_2 на линию $x = 0$:
$$\mu(t) + \int_0^t \frac{t}{\eta}\frac{\partial}{\partial t}J_0\big(b\sqrt{\eta(t-\eta)}\big)\mu(\eta)d\eta = 2\psi(t/2) + \int_0^t \nu^-(\eta)J_0\big(b\sqrt{\eta(t-\eta)}\big)d\eta.$$

Отсюда после обращения относительно $\mu(t)$ и ряда преобразований получим [23]

$$\mu(t)=\int_0^t J_0[b(t-\eta)]\nu^-(\eta)d\eta+\phi(t), \tag{38}$$

где

$$\phi(t)=2\Big(\psi(\frac{t}{2})-\int_0^t\psi\Big(\frac{\eta}{2}\Big)\frac{\partial}{\partial\eta}J_0\big(b\sqrt{t(\eta-t)}\big)d\eta\Big),$$

$J_0(z)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Обращение интегрального уравнения (38) относительно $\nu^-(t)$ имеет вид

$$\nu^-(t)=\mu'(t)+b\int_0^t\frac{J_1[b(t-\eta)]}{t-\eta}\mu(\eta)d\eta+\phi_1(t), \tag{39}$$

где

$$\phi_1(t)=\phi'(t)+b\int_0^t\frac{J_1[b(t-\eta)]}{t-\eta}\phi(\eta)d\eta,$$

$J_1(z)$ — функция Бесселя первого рода первого порядка. В силу второго условия сопряжения из (3) получим

$$\mu'(t)+\lambda\int_0^t\frac{\mu'(\eta)d\eta}{(t-\eta)^{1/2}}=\bar{\phi}_1(t)+\int_0^t\bar{T}(t,\eta)\mu(\eta)d\eta, \tag{40}$$

где

$$\bar{\phi}_1(t)=\frac{h_2}{h_1}\psi_0(t)-\phi_1(t),\quad \bar{T}(t,\eta)=-\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial k_0(t,\eta)}{\partial\eta}-c\frac{J_1[b(t-\eta)]}{t-\eta}.$$

С помощью резольвенты (29) оператора в левой части равенства (40) можем записать

$$\mu'(t)=\bar{\bar{\phi}}_1(t)+\int_0^t\bar{\bar{T}}(t,\eta)\mu(\eta)d\eta, \tag{41}$$

где

$$\bar{\bar{\phi}}_1(t)=\bar{\phi}_1(t)+\int_0^t R(t-\eta)\bar{\phi}_1(\eta)d\eta,\quad \bar{\bar{T}}(t,\eta)=\bar{T}(t,\eta)+\int_\eta^t R(t-\eta)\bar{T}(\eta_1,\eta)d\eta_1.$$

Путём интегрирования в пределах от 0 до t равенства (41) после некоторых преобразований приходим к интегральному уравнению Вольтерра второго рода:

$$\mu(t)+\int_0^t P(t,\eta)\mu(\eta)d\eta=n(t), \tag{42}$$

где

$$P(t,\eta)=\int_\eta^t\bar{\bar{T}}(\eta_1,\eta)d\eta_1,\quad n(t)=\int_0^t\bar{\bar{\phi}}_1(\eta)d\eta.$$

В силу свойств функций $P(t,\eta)$, $n(t)$ заключаем, что существует единственное решение интегрального уравнения (42) в классе $C[0,1]$.

После определения $\mu(t)$ по формуле (39) находим $\nu^-(t)$. Следовательно, решение задачи T_0^1 в областях Ω_1 и Ω_2 находится по формулам (37) и (6) соответственно. $\Box$

Задача 1 (N). *Задача N отличается от задачи T_α^β тем, что второе условие сопряжения из* (3) *заменяется условием*

$$\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x}(-0,t) = \frac{\lambda_2}{\tau_q}\int_0^t \frac{\partial u}{\partial x}(x,\eta)\Big|_{x=0} \exp\Big(-\frac{t-\eta}{\tau_q}\Big)d\eta, \tag{43}$$

где τ_q — время релаксации теплового потока.

Учитывая (7), (39) в равенстве (43) и выполняя несложные преобразования, получим

$$\mu'(t) + \lambda\int_0^t \Pi(t,\eta)\mu'(\eta)d\eta = e(t) - b\int_0^t \frac{J_1[b(t-\eta)]}{t-\eta}\mu(\eta)d\eta, \tag{44}$$

где

$$\Pi(t,\eta) = \int_\eta^t \big[(\eta_1-\eta)^{-1/2} + k_0(\eta_1,\eta)\big]\exp\Big(-\frac{t-\eta_1}{\tau_q}d\eta_1\Big),$$

$$e(t) = \lambda\int_0^t \psi_0(\eta)\exp\Big(-\frac{t-\eta}{\tau_q}\Big)d\eta - \psi(t), \quad \lambda = \lambda_2/(\lambda_1\sqrt{\pi}\tau_q).$$

В силу свойств заданных функций $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(t)$ и $\psi(x)$ заключаем, что $\Pi(t,\eta) \in C[0,1]\bigcap C^2]0,1[, e(t) \in C[0,1]\bigcap C^2]0,1[$ по переменным t и η. Если правую часть уравнения (44) считать известной и обозначить через $N(t,\eta)$ резольвенту ядра $\Pi(t,\eta)$, то оно может быть представлено в виде

$$\mu'(t) = \rho(t) + \lambda\int_0^t \bar{N}(t,\eta)\mu(\eta)d\eta, \tag{45}$$

где

$$\rho(t) = \lambda\int_0^t \psi_0(\eta)\exp\Big(-\frac{t-\eta}{\tau_q}\Big)d\eta - \psi_1(t) +$$
$$+ \lambda\int_0^t N(t,\eta)\Big\{\lambda\int_0^t \psi_0(\eta_1)\exp\Big(-\frac{t-\eta}{\tau_q}\Big)d\eta - \psi_1(\eta)\Big\}d\eta,$$

$$\bar{N}(t,\eta) = -\Big(\frac{J_1[b(t-\eta)]}{t-\eta} + \lambda b\int_\eta^t N(t,\eta_1)\frac{J_1[b(\eta_1-\eta)]}{\eta_1-\eta}d\eta_1\Big).$$

Интегрируя равенство (45) от 0 до t, снова приходим к интегральному уравнению Вольтерра второго рода, ядро и правая часть которого непрерывны в замкнутых областях их определения. Следовательно, однозначно определяется функция $\mu(t)$ в классе непрерывных функций. Затем по формуле (39) находим функцию $\nu^-(t)$. Решение исходной задачи в области Ω_2 определяем по формуле (5), а в области Ω_1 находим по формуле (37).

Пусть теперь $a \neq 1$, $c \neq 1$, $b = 0$, $m = 0$, $J \equiv (0, l_1)$. Уравнение (1) будем рассматривать в области $\Omega = \Omega_1\bigcup\Omega_2\bigcup J$, где $\Omega_1 = \{(x,t) : 0 < x < l_1, 0 < t < t_0\}$, $\Omega_2 = \{(x,t) : l_1 < x < l_2, 0 < t \leqslant t_0\}$, l_1, l_2, t_0 — константы.

Задача E. *Найти функцию $u(x,t)$, которая:*
1) *является регулярным решением уравнения* (1) *в области* Ω *при* $x \neq l_1$;
2) *удовлетворяет граничным условиям*

$$\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) + \beta_1 u(0,t) = \varphi_1(t),\ u(x,0) = \psi_0(x),\quad 0 \leqslant x \leqslant l_1,\ 0 \leqslant t \leqslant t_0; \tag{46}$$

$$\alpha_2 \frac{\partial u}{\partial x}(l_2,t) + \beta_2 u(l_2,t) = \varphi_2(t),\ u(x,0) = f_0(x),\ u_t(x,0) = f_1(x),\quad l_1 \leqslant x \leqslant l_2,\quad 0 \leqslant t \leqslant t_0 \tag{47}$$

и условиям сопряжения

$$u(-l_1,t) = u(+l_1,t),\quad \alpha_3 \frac{\partial u}{\partial x}(-l_1,t) = \beta_3 \frac{\partial u}{\partial x}(+l_1,t),\quad 0 < t \leqslant t_0, \tag{48}$$

где α_i, β_i $(i = 1,2,3)$, l_1, l_2, t_0 — *постоянные, причём* $\alpha_3 > 0$, $\beta_3 > 0$, $\psi_0(x)$, $f_0(x) \in C^2[l_1,l_2]$, $f_1(x) \in C^1[l_1,l_2]$, $\varphi_j(t) \in C[0,t_0]$, $j = 1,2$.

Основная интегральная формула представлений решений краевых задач для уравнения (1) в области Ω_1 имеет следующий вид [24]:

$$u(x,t) = \int_0^t \Big[\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \xi}\Gamma(x,t;\xi,\eta) - u(\xi,\eta)\frac{\partial \Gamma(x,t;\xi,\eta)}{\partial \xi}\Big]_{\xi=l_2} d\eta - \\ - \int_0^t \Big[\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \xi}\Gamma(x,t;\xi,\eta) - u(\xi,\eta)\frac{\partial \Gamma(x,t;\xi,\eta)}{\partial \xi}\Big]_{\xi=l_1} d\eta - \\ - \int_{l_1}^{l_2} \Big[f_1(\xi)\Gamma(x,t;\xi,0) - \frac{\partial \Gamma(x,t;\xi,\eta)}{\partial \eta}\Big]_{\eta=0} f_0(\xi)]d\xi, \tag{49}$$

где $\Gamma(x,t;\xi,\eta)$ — функция Грина первой, второй или третьей краевой задачи для уравнения (1) при $x > l_1$ и она определяется так:

$$\Gamma(x,t;\xi,\eta) = \rho\omega(x,t;\xi,\eta) + g(x,t;\xi,\eta),$$

причём

$$\omega(x,t;\xi,\eta) = \begin{cases} h_1, & |x-\xi| \leqslant a(t-\eta), \\ 0, & |x-\xi| > a(t-\eta) \end{cases}$$

— функция единичного импульса,

$$h_1 = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2a} \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} h dz = \frac{1}{2a} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \frac{I}{2\varepsilon\rho} dz = \frac{1}{2a\rho},$$

ρ — линейная плотность, $g(x,t;\xi,\eta)$ — как функция x и t удовлетворяет уравнению (1) при $x > l_1$ и такая, что $\Gamma(x,t;\xi,\eta)$ на концах рассматриваемого интервала (l_1,l_2) удовлетворяет однородным граничным условиям соответствующей краевой задачи, а $\Gamma(x,t;\xi,\eta)$ и $\partial\Gamma(x,t;\xi,\eta)/\partial t$ равны нулю в интервале (l_1,l_2) при $t < \eta$. Функция $\Gamma(x,t;\xi,\eta)$ по переменным x и t удовлетворяет уравнению

$$\Box\Gamma = \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t^2} = -\frac{1}{a^2}\delta(x,\xi)\delta(t,\eta),$$

где $\delta(x,\xi)$ и $\delta(t,\eta)$ — δ-функции переменных x и t соответственно, $\Box$ — оператор Даламбера. $\Gamma(x,t;\xi,\eta)$ как функция ξ и η обладает свойством взаимности: $\Gamma(x,t;\xi,t)=\Gamma(\xi,-\eta,x,-t)$.

В случае первой краевой задачи, т. е. когда $\alpha_2=0$, $\beta_2=1$, $u(+l_1,t)=\mu(t)$, представление (49) принимает вид

$$u(x,t)=a^2\biggl(\int_0^t[\varphi_1(\eta)\Gamma(x,t;l_1,\eta)]d\eta-\int_0^t\mu(\eta)\Gamma_\xi(x,t;l_2,\eta)d\eta-\\
-\int_{l_1}^{l_2}[\psi_1(\xi)\Gamma(x,t;\xi,0)-\psi_0(\xi)\Gamma_\eta(x,t;\xi,0)]d\xi\biggr).$$

В случае второй краевой задачи, т. е. $\alpha_2=1$, $\beta_2=0$, $u_x(-l_1,t)=(\beta_3/\alpha_3)$, $u_x(+l_1,t)=\nu^-(t)$, представление (49) имеет вид

$$u(x,t)=-a^2\biggl(\int_0^t[\varphi_1(\eta)\Gamma(x,t;l_1,\eta)+\nu^-(\eta)\Gamma(x,t;l_2,\eta)]d\eta-\\
-\int_{l_1}^{l_2}[\psi_1(\xi)\Gamma(x,t;\xi,0)-\psi_0(\xi)\Gamma_\eta(x,t;\xi,0)]d\xi\biggr).$$

В случае третьей краевой задачи, т. е. $\lambda_1u_x(-l_1,t)+\lambda_2u(-l_1,t)=\varphi_3(t)$, представление (49) принимает вид

$$u(x,t)=-a^2\biggl(\int_0^t[\varphi_1(\eta)\Gamma(x,t,l_1,\eta)-\varphi_3(\eta)\Gamma(x,t;l_2,\eta)]d\eta-\\
-\int_{l_1}^{l_2}[\varphi_1(\eta)\Gamma(x,t;\xi,0)-\psi_0(\eta)\Gamma_\eta(x,t;\xi,0)]d\xi\biggr).$$

Функция Грина первой краевой задачи имеет вид [24].

$$\Gamma(x,t;\xi,\eta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi a}\sin\frac{n\pi x}{l_1}\sin\frac{n\pi\xi}{l_1}\sin\frac{n\pi a(t-\eta)}{l_1}.$$

Построение функций Грина для второй, третьей и смешанных краевых задач для гиперболических уравнений в явном виде, хотя бы для широкого класса областей, связано со значительными трудностями. Здесь функция Грина, в отличие от эллиптических и параболических уравнений, не приводит к сравнительно простому способу получения решения первой, второй и третьей краевых задач в явном виде хотя бы для сколько-нибудь широкого класса областей.

Справедлива

Теорема 5. *Пусть* $\alpha_1=0$, $\beta_1=1$, $\alpha_2=0$, $\beta_2=1$, $\varphi_1(t)\in C[0,t_0]$; *функция* $\psi_0(x)$ *после нечётного продолжения на отрезок* $[-l_2,l_1]$ *и периодического продолжения с периодом* $2(l_2-l_1)$ *принадлежит классу* $C^3[l_1,l_2]$, *а функция* $\psi_1(x)$ *при тех же условиях продолжения принадлежит классу* $C^2[l_1,l_2]$, *причём* $\psi_0(l_1)=\psi_0(l_2)=0$, $\psi_0''(l_1)=\varphi_0''(l_2)=0$, $\psi_1(l_1)=\psi_1(l_2)=0$. *Тогда задача E имеет, и притом единственное, решение.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть существует решение задачи E, тогда, дифференцируя равенство (49) по x, а затем переходя к пределу при $x \to -l_1$ и выполняя несложные преобразования, будем иметь

$$\nu^-(t) = \int_0^t M(t,\eta)\mu(\eta)d\eta + m(t), \tag{50}$$

где $M(t,\eta) = -a^2\Gamma_{\xi x}(-l_1,t;l_2,\eta)$,

$$m(t) = a^2\int_0^t \varphi_1(\eta)\Gamma_{\xi x}(-l_1,t;-l_2,\eta)d\eta -$$
$$- a^2\int_{-l_1}^{l_2}[\psi_1(\xi)\Gamma_x(-l_1,t;\xi,0) - \psi_0(\xi)\Gamma_{\eta x}(-l_1,t;\xi,0)]d\xi.$$

Учитывая второе условие сопряжения из (48), получим

$$D_{0t}^{-1/2}\mu'(t) + \sqrt{\pi}\int_0^t k_0(t,\eta)\mu'(\eta)d\eta = \bar\lambda\int_0^t M(t,\eta)\mu(\eta)d\eta + \bar m(t), \tag{51}$$

где

$$\bar\lambda = -(a_3\sqrt{\pi})/\beta_3, \quad \bar m(t) = \sqrt{\pi}\psi_0(t) - (\alpha_3\sqrt{\pi})/\beta_3 m(t).$$

К обеим частям равенства (51) применим оператор $D_{0t}^{+1/2}$, обратный оператору $D_{0t}^{-1/2}$. В результате будем иметь

$$\mu'(t) + \sqrt{\pi}\frac{d}{dt}D_{0t}^{-1/2}\int_0^t k_0(t,\eta)\mu'(\eta)d\eta =$$
$$= \bar\lambda\frac{d}{dt}D_{0t}^{-1/2}\int_0^t M(t,\eta)\mu(\eta)d\eta + \frac{d}{dt}D_{0t}^{-1/2}\bar m(t)$$

или

$$\mu'(t) + \int_0^t \bar k_0(t,\eta)\mu'(\eta)d\eta = \bar\lambda\frac{d}{dt}\int_0^t \bar M(t,\eta)\mu(\eta)d\eta + r(t), \tag{52}$$

где

$$\bar k_0(t,\eta) = -\frac{1}{\pi}\int_0^1 z^{3/2}(1-z)^{-1/2}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}{}' \frac{n^2}{(t-\eta)^2}\exp\Big(-\frac{n^2}{(t-\eta)z}\Big)dz,$$

$$\bar M(t,\eta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_\eta^t \frac{M(\eta_1,\eta)}{(t-\eta_1)^{1/2}}d\eta_1, \quad r(t) = \frac{d}{dt}D_{0t}^{-1/2}\bar m(t).$$

Легко заметить, что $\bar k_0(t,\eta) \in C^1[-l_1,0]\times[-l_1,0]\bigcap C^2]-l_1,0[\times]-l_1,0[$, $r(t) \in C[0,t_0]$, $\bar M(t,\eta) \in C[-l_1,0]\times[-l_1,0]\bigcap C^1]-l_1,0[\times]-l_1,0[$. В уравнении (52) правую часть пока будем считать известной. Если обозначим через $\bar R(t,\eta)$ резольвенту ядра $\bar k_0(t,\eta)$, то уравнение (51) можно переписать в виде

$$\mu(t) = r(t) + \bar{\lambda}\frac{d}{dt}\int_0^t \bar{M}(t,\eta)\mu(\eta)d\eta +$$
$$+ \int_0^t \bar{R}(t,\eta)\left\{\bar{\lambda}\frac{d}{d\eta}\int_0^\eta \bar{M}(\eta,\eta_1)\mu(\eta_1)d\eta_1 + r(\eta)\right\}d\eta$$

или

$$\mu'(t) = \int_0^t L_1(t,\eta)\mu(\eta)d\eta + \bar{r}(t), \tag{53}$$

где

$$L_1(t,\eta) = \bar{\lambda}\bar{R}(t,t)\bar{M}(t,\eta) + \bar{M}_t(t,\eta) + \int_\eta^t \bar{R}_{\eta_1}(t,\eta_1)\bar{M}(\eta_1,\eta)d\eta_1,$$

$$\bar{r}(t) = r(t) + \int_0^t \bar{R}(t,\eta)r(\eta)d\eta.$$

Интегрируя обе части равенства (53) от 0 до t, получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно $\mu(t)$:

$$\mu(\eta) = \int_0^t \bar{L}_1(t,\eta)\mu(\eta)d\eta + \bar{\bar{r}}(t), \tag{54}$$

где

$$\bar{L}_1(t,\eta) = \int_\eta^t L_1(\eta_1,\eta)d\eta_1, \quad \bar{\bar{r}}(t) = \int_0^t \bar{r}(\eta)d\eta.$$

На основании свойств заданных функций $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$, $f(x)$ заключаем, что $\bar{L}_1(t,\eta) \in C[-l_1,0] \times [-l_1,0]$, $\bar{\bar{r}}(t) \in C[0,t_0]$. Следовательно, уравнение (54) безусловно и однозначно разрешимо, и его решение $\mu(t) \in C[0,t_0]$.

После определения функции $\mu(t)$ решение задачи E в области Ω_2 находим по формуле (49), а в области Ω_1 оно задаётся так:

$$u(x,t) = \int_0^{+l_1} f(\xi)G(\xi,0;x,t)d\xi + \int_0^t \mu(\eta)G_\xi(0,\eta;x,t)d\eta -$$
$$- \int_0^t \varphi_1(\eta)G_\xi(+l_1,\eta;x,t)d\eta,$$

где $G(\xi,\eta;x,t)$ — функция Грина первой краевой задачи уравнения (1) при $x < l_1$ и определяется формулой (7). $\square$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Гельфанд И. И.* Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений // *УМН*, 1959. Т. 14, № 3(87). С. 3–19; англ. пер.: *Gel'fand I. M.* Some questions of analysis and differential equations // *Am. Math. Soc., Transl., II. Ser.*, 1963. Vol. 26. Pp. 201–219.
2. *Лейбензон Л. Л.* Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. М., Л.: ОГИЗ, Гостехиздат, 1947. 244 с. [*Leybenzon L. L.* Motion of natural liquids and gases in porous medium. Moscow, Leningrad: OGIZ, Gostekhizdat, 1947. 244 pp.]
3. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.; англ. пер.: *Tikhonov A. N., Samarskii A. A.* Equations of Mathematical Physics. Oxford: Pergamon Press, 1963. 784 pp.

4. *Азиз Х., Сеттари Э.* Математическое моделирование пластовых систем. М.: Недра, 1982. 407 с. [*Aziz H., Settari E.* Mathematical modeling of reservoir systems. Moscow: Nedra, 1982. 407 pp.]
5. *Акилов Ж. А.* Нестационарные движения вязкоупругих жидкостей. Ташкент: Фан, 1982. 104 с. [*Akilov J. A.* Non-stationary motions of viscoelastic fluids. Tashkent: Fan, 1982. 104 pp.]
6. *Корзюк В. И., Лемешевский С. В., Матус П. П.* Разрешимость задачи сопряжения гиперболического и параболического уравнений с интегро-дифференциальными условиями на границе раздела областей // *Тр. ин-та мат. НАН Беларуси*, 2000. Т. 6. С. 100–108. [*Korzyuk V. I., Lemeshevskiy S. V., Matus P. P.* Solvability of a conjugation problem for hyperbolic and parabolic equations with integro-differential conditions on the separation boundary // *Tr. in-ta mat. NAN Belarusi*, 2000. Vol. 6. Pp. 100–108].
7. *Шашков А. Г.* Системно-структурный анализ процесса теплообмена и его применение. М.: Энергоатомиздат, 1983. 279 с. [*Shashkov A. G.* Systematic Structural Analysis of Heat Transfer Processes and its Application. Moscow: Energoizdat, 1983. 279 pp.]
8. *Чудновский А. Ф.* Теплофизика почв. М.: Наука, 1976. 352 с. [*Chudnovskiy A. F.* Thermophysics of Soils: Nauka, 1976. 352 pp.]
9. *Стручина Г. М.* Задача о сопряжении двух уравнений // *Инженерно-физический журнал*, 1961. Т. 4, № 11. С. 99–104. [*Struchina G. M.* A problem of conjugation of two equations // *Inzherno-Fizicheskii Zhurnal*, 1961. Vol. 4, no. 11. Pp. 99–104].
10. *Золина Л. А.* О краевой задаче для модельного уравнения гиперболо-параболического типа // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1966. Т. 6, № 6. С. 991–1001; англ. пер.: *Zolina L. A.* On a boundary value problem for a model equation of hyperbolo-parabolic type // *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, 1966. Vol. 6, no. 6. Pp. 63–78.
11. *Абдрахманов М. А.* Об одной задаче сопряжения уравнений параболического типов // *Известия. АН КазССР. Сер. физ.-мат. науки*, 1967. Т. 5. С. 87–93. [*Abrakhmanov M. A.* On one conjugation problem for parabolic type equations // *Izvest. AN KazSSR. Ser. fiz.-mat. nauki*, 1967. Vol. 5. Pp. 87–93].
12. *Островский Е. А.* Задача на сопряжение уравнений параболического и гиперболического типов, когда в граничные условия входят производные по времени // *Дифференц. уравнения*, 1967. Т. 3, № 6. С. 965–979. [*Ostrovskiy E. A.* // *Differents. uravneniya*, 1967. Vol. 3, no. 6. Pp. 965–979].
13. *Корзюк В. И.* Задача о сопряжении уравнений гиперболического и параболического типов // *Дифференц. уравнения*, 1968. № 4. С. 1855–1866. [*Korzyuk V. I.* The problem of conjugate equations of hyperbolic and parabolic type // *Differents. uravneniya*, 1968. no. 4. Pp. 1855–1866].
14. *Джураев Т. Д.* Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типа.. Ташкент: Фан, 1979. 238 с. [*Dzhuraev T. D.* Boundary value problems for equations of mixed and mixed-composite type. Tashkent: Fan, 1979. 238 pp.]
15. *Джураев Т. Д., Сопуев А. С., Мамажанов М.* Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. Ташкент: Фан, 1986. 220 с. [*Dzhuraev T. D., Sopuev A. S., Mamazhanov M.* Boundary value problem for equations of hyperbolic-parabolic type. Tashkent: Fan, 1986. 220 pp.]
16. *Базаров Д. К.* К теории локальных и нелокальных краевых задач для уравнений смешанного и смешанно-составного типов: Дис. … д-ра физ.-мат. наук. Ашхабад, 1991. 272 с. [*Bazarov D. K.* For the theory of local and nonlocal boundary value problems for equations of mixed and mixed-composite type: Dr. Sci. Thesis: Ashgabat, 1991. 272 pp.]
17. *Елеев В. А.* Краевые задачи для уравнений смешанного гиперболо-параболического типа: Дис. … д-ра физ.-мат. наук. Киев, 1995. 266 с. [*Eleev V. A.* Boundary value problems for equations of mixed hyperbolic-parabolic type: Dr. Sci. Thesis. Kiev, 1995. 266 pp.]
18. *Репин О. А.* Краевые задачи для уравнений гиперболического и смешанного типов и дробное интегро-дифференцирование: Дис. … д-ра физ.-мат. наук. Минск, 1998. 220 с. [*Repin O. A.* Boundary value problems for equations of hyperbolic and mixed types and fractional integro-differentiation: Dr. Sci. Thesis. Minsk, 1998. 220 pp.]

19. *Сабитов К. Б.* Некоторые вопросы качественной спектральной теории уравнений смешанного типа: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М., 1991. 313 с. [*Sabitov K. B.* Some problems in qualitative and spectral theory of mixed-type equations: Dr. Sci. Thesis. Moscow, 1991. 313 pp.]
20. *Нахушева В. А.* Об одной математической модели теплообмена в смешанной среде с идеальным контактом // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2006. № 42. С. 11–34. [*Nakhusheva V. A.* On one mathematical model of heat transfer in a mixed media with ideal contact // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2006. no. 42. Pp. 11–34].
21. *Елеев В. А.* О краевых задачах для смешанного уравнения гиперболо-параболического типа // *Дифференц. уравнения*, 1988. Т. 24, № 4. С. 627–635; англ. пер.: *Eleev V. A.* Boundary-value problems for a mixed hyperbolic-parabolic equation // *Differ. Equations*, 1988. Vol. 24, no. 4. Pp. 437–443.
22. *Мышкис А. Д.* Математика для ВТУЗов: Специальные курсы. М.: Наука, 1971. 632 с. [*Myshkis A. D.* Mathematics for technical universities: Special courses. Moscow: Nauka, 1971. 632 pp.]
23. *Салахитдинов М. С., Уринов А. К.* Краевые задачи для уравнений смешанного типа со спектральным параметром. Ташкент: Фан, 1997. 165 с. [*Salakhitdinov M. S., Urinov A. K.* Boundary value problems for the mixed type equations with spectral parameter. Tashkent: Fan, 1997. 166 pp.]
24. *Положий Г. П.* Уравнения математической физики. М.: Высш. шк., 1964. 559 с. [*Polozhiy G. P.* Equations of mathematical physics. Moscow: Vyssh. shk., 1964. 559 pp.]

Поступила в редакцию 18/XI/2010;
в окончательном варианте — 25/VIII/2011.

MSC: 35M10

ON SOME CONJUGATION PROBLEMS OF PARABOLIC AND HYPERBOLIC EQUATIONS WITH INTEGRO-DIFFERENTIAL CONDITIONS ON THE SEPARATING BOUNDARY

V. A. Eleev, A. H. Balkizova

Kabardino-Balkar State University,
173, Chernyshevskogo st., Nal'chik, 360004.

E-mails: `eleev@yandex.ru, alena-balkizova@rambler.ru`

The one-valued solvability of the conjugation problems of parabolic and hyperbolic equations in finite domains was proved by the method of equivalent reduction to Volterra integral equation of the second kind.

Key words: *Volterra integral equation, conjugation problems, Bessel functions.*

Original article submitted 18/XI/2010;
revision submitted 25/VIII/2011.

Valeriy A. Eleev (Dr. Sci. (Phys. & Math.)), Head of Dept., Dept. of Function Theory and Functional Analysis. *Alyona H. Balkizova*, Postgraduate Student, Dept. of Function Theory and Functional Analysis.