Вычислительная математика

УДК 519.654

ЭКОНОМИЧНЫЙ МЕТОД МНОГОКРАТНОГО РЕШЕНИЯ РАСШИРЕННЫХ РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ НОРМАЛЬНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

В. В. Долишний, А. И. Жданов

Самарский государственный аэрокосмический университет им. ак. С. П. Королёва
(национальный исследовательский университет),
443086, Россия, Самара, Московское ш., 34.

E-mails: VDolishniy@mail.ru, ZhdanovAleksan@yandex.ru

Предлагается новый вычислительный алгоритм получения решений расширенных регуляризованных нормальных систем уравнений при различных параметрах регуляризации. Исследуются вычислительные затраты и требуемый объём оперативной памяти вычислительного алгоритма. Проводится сравнение предложенного вычислительного алгоритма с алгоритмом, использующим сингулярное разложение.

Ключевые слова: *плохо обусловленные задачи, расширенные регуляризованные нормальные системы уравнений, вычислительный алгоритм.*

Введение. Многие прикладные задачи регрессионного анализа и математической физики сводятся к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида

$$Ax = \widetilde{b}, \quad A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \quad \widetilde{b} = b + \xi \in \mathbb{R}^m, \quad m \geqslant n, \tag{1}$$

в которой точное значение вектора правой части b неизвестно, а известно его значение $\widetilde{b} = b + \xi$, где ξ — возмущение.

Обычно система, подобная (1), возникающая в реальной задаче, исходя из её происхождения и физического смысла при отсутствии погрешностей в исходных данных является совместной и имеет единственное решение $\overline{x}$. Однако наличие погрешностей, в частности, погрешностей вектора правой части ξ, как правило, делает её несовместной.

Требуется найти из системы (1) вектор $\widetilde{x}$ такой, чтобы норма разности $\|\widetilde{x}-\overline{x}\|_2$, где $\overline{x}$ — вектор решения невозмущённой системы, была минимальной.

В реальных задачах характерной особенностью матрицы системы (1), как правило, является плохая обусловленность (спектральное число обусловленности [1] $\kappa_2(A) \approx 1/\varepsilon_{\mathrm{mach}}$, где $\varepsilon_{\mathrm{mach}}$ — машинное эпсилон) и достаточно большая размерность (m, $n > 10^4$). Матрица A может иметь неполный ранг (или неполный численный ранг) и, возможно, $m \gg n$.

Александр Иванович Жданов (д.ф.-м.н., проф.), зав. кафедрой, каф. прикладной математики. *Долишний Василий Владимирович*, аспирант, каф. прикладной математики.

Для получения устойчивого решения плохо обусловленных систем обычно используют различные регуляризирующие алгоритмы, наиболее известным и часто применяемым из которых является регуляризация Тихонова, сводимая к решению регуляризованной системы нормальных уравнений

$$\left(A^\top A + \alpha I\right) x = A^\top \widetilde{b}, \tag{2}$$

где $\alpha > 0$ — параметр регуляризации, согласованный с возмущениями в исходных данных.

Эффективность решения задачи регуляризации (2)) зависит от выбора параметра α. Для выбора параметра регуляризации α известны различные подходы [2]. При этом часто возникает необходимость решения системы (2) при различных значениях параметра α.

Известно, что наиболее эффективным численным алгоритмом решения системы (2) при различных значениях параметра регуляризации является алгоритм, основанный на сингулярном разложении матрицы системы A [3]. Однако решение задачи большой размерности с его помощью вызывает значительные трудности при реализации на ЭВМ. Например, использование программ из пакета `MATLAB` при размерности матрицы $m, n \sim 10^4$ проблематично, так как требует значительных объёмов оперативной памяти. Однако сингулярное разложение — самое надёжное в смысле точности вычислений.

Целью данной работы является разработка вычислительного алгоритма, который по вычислительной сложности и точности полученного решения не уступал бы вычислительному алгоритму, использующему сингулярное разложение, но требовал меньшего объёма оперативной памяти компьютера, что позволяло бы решать системы с матрицами больших размерностей $(m, n > 10^4)$.

В работе предлагается подход, основанный на замене регуляризованной нормальной системы (2) эквивалентной ей расширенной регуляризованной нормальной системой [4].

1. Метод расширенных регуляризованных нормальных систем. В [4] был предложен подход, основанный на замене системы (2) эквивалентной расширенной регуляризованной нормальной системой (РРНС)

$$\begin{pmatrix} \omega I_m & A \\ A^\top & -\omega I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{b} \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где $\omega = \sqrt{\alpha}$; I_m, I_n — единичные матрицы размерности $m \times m$ и $n \times n$ соответственно; $z = r\omega^{-1}$; $r = \widetilde{b} - Ax$ — вектор невязки системы (1). Обозначим

$$\widetilde{A}_\omega = \begin{pmatrix} \omega I_m & A \\ A^\top & -\omega I_n \end{pmatrix}.$$

Преимуществом решения РРНС (3) вместо системы (2) является то, что

$$\kappa_2(\widetilde{A}_\omega) = \left(\frac{\delta^2_{\max}(A) + \omega^2}{\delta^2_{\min}(A) + \omega^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\kappa_2(A^\top A + \omega^2 I)\right)^{\frac{1}{2}},$$

где $\kappa_2(A)$ — спектральное число обусловленности матрицы A; $\delta_{\max}(A)$, $\delta_{\min}(A)$ — максимальное и минимальное сингулярные числа матрицы A, соответственно [4].

Рассмотрим метод, позволяющий эффективно организовать многократные вычисления решений РРНС при различных значениях параметра регуляризации α.

2. Решение расширенной регуляризованной нормальной системы при помощи двухдиагонализации матрицы. Представим матрицу A в виде

$$A = UBV^\top, \tag{4}$$

где $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ — нижняя двухдиагональная матрица, $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ и $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — ортогональные матрицы.

Разложение (4) можно получить, используя, например, модификацию процесса двухдиагонализации, описанного в [5].

Очевидно, что разложение (4) существует для произвольной матрицы A.

Лемма. *Система* (3) *эквивалентна системе*

$$\begin{pmatrix} \omega I_m & B \\ B^\top & -\omega I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{d} \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где $w = U^\top z$; $v = V^\top x$, $\widetilde{d} = U^\top \widetilde{b}$; B, U, V *удовлетворяют* (4).

Доказательство. Система (3) является совместной и определённой [4]. Обозначим $H = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}$. Легко проверить, что матрица H — ортогональная. Умножая систему (3) слева на $H^\top$, учитывая разложение (4) и то, что $HH^\top = I$, имеем

$$\begin{pmatrix} U^\top & 0 \\ 0 & V^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega I_m & UBV^\top \\ VB^\top U^\top & -\omega I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^\top & 0 \\ 0 & V^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} U^\top & 0 \\ 0 & V^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{b} \\ 0 \end{pmatrix},$$

или после преобразований

$$\begin{pmatrix} \omega I_m & B \\ B^\top & -\omega I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^\top z \\ V^\top x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U^\top \widetilde{b} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Вводя соответствующие обозначения, получаем требуемое утверждение. □

Отметим, что в обозначениях системы (5) вектор v соответствует решению регуляризованной нормальной системы

$$\left(B^\top B + \alpha I\right) v = B^\top \widetilde{d}, \tag{6}$$

а $w = \left(\widetilde{d} - Bv\right)\omega^{-1}$.

Перейдём к решению расширенной регуляризованной нормальной системы (5). Обозначим

$$\widetilde{B}_\omega = \begin{pmatrix} \omega I_m & B \\ B^\top & -\omega I_n \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Введём следующую перестановку натуральных чисел от 1 до $m+n$:

$$1, m+1, 2, m+2, 3, m+3, \ldots, n, m+n, n+1, n+2, \ldots, m-1, m. \qquad (8)$$

В случае, когда $m=n$, ряд (8) обрывается на числе $2n$.

Пусть P — матрица перестановок, соответствующая перестановке (8). Обозначим

$$T_\omega = P^\top \widetilde{B}_\omega P \in \mathbb{R}^{(m+n)\times(m+n)}. \qquad (9)$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что матрица T_ω, полученная из матрицы $\widetilde{B}_\omega$ путём симметричной перестановки строк и столбцов, будет трёхдиагональной и симметричной.

Учитывая (7), (9), перепишем систему (5) в виде

$$T_\omega y = \widetilde{f}, \qquad (10)$$

где $y = P^\top \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix}$, $\widetilde{f} = P^\top \begin{pmatrix} \widetilde{d} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Рассмотрим два случая: $m>n$ и $m=n$.

Если $m>n$, то матрица T_ω будет выглядеть следующим образом:

$$T_\omega = \begin{pmatrix} Q_\omega & O^{(2n+1)\times(m-n-1)} \\ O^{(m-n-1)\times(2n+1)} & \omega I_{m-n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+n)\times(m+n)}, \qquad (11)$$

где Q_ω — трёхдиагональная матрица вида

$$Q_\omega = \begin{pmatrix} \omega & b_{1,1} & & & \\ b_{1,1} & -\omega & b_{2,1} & & \\ & b_{2,1} & \omega & b_{2,2} & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & b_{n+1,n} & \omega \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2n+1)\times(2n+1)}. \qquad (12)$$

В случае $m=n$ матрице B будет соответствовать матрица T_ω:

$$T_\omega = \begin{pmatrix} \omega & b_{1,1} & & & \\ b_{1,1} & -\omega & b_{2,1} & & \\ & b_{2,1} & \omega & b_{2,2} & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & b_{n,n} & -\omega \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}. \qquad (13)$$

Для простоты и единообразия описания дальнейшего процесса решения в случае $m=n$ дополним систему (10) фиктивным уравнением

$$b_{n+1,n} + \omega y_{2n+1} = \widetilde{f}_{2n+1}, \qquad (14)$$

в котором положим $b_{n+1,n} = \widetilde{f}_{2n+1} = 0$. Тогда можно считать, что матрица Q_ω при $m=n$ имеет вид

$$Q_\omega = \begin{pmatrix} T_\omega & O^{2n\times 1} \\ O^{1\times 2n} & \omega \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2n+1)\times(2n+1)}. \qquad (15)$$

Учитывая (11), (14), (15), систему уравнений (10) можно переписать в виде

$$\begin{cases} Q_\omega y^{(1)} &= \widetilde{f}^{(1)}, \\ \omega y^{(2)} &= \widetilde{f}^{(2)} \end{cases}$$

и решение (10) сводится к решению системы

$$Q_\omega y^{(1)} = \widetilde{f}^{(1)}, \tag{16}$$

где

$$y^{(1)} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{2n+1} \end{pmatrix}, \ y^{(2)} = \begin{pmatrix} y_{2n+2} \\ \vdots \\ y_{n+m} \end{pmatrix}, \ \widetilde{f}^{(1)} = \begin{pmatrix} \widetilde{f}_1 \\ \vdots \\ \widetilde{f}_{2n+1} \end{pmatrix}, \ \widetilde{f}^{(2)} = \begin{pmatrix} \widetilde{f}_{2n+2} \\ \vdots \\ \widetilde{f}_{n+m} \end{pmatrix}.$$

Непосредственное решение системы (16) как системы с трёхдиагональной квадратной матрицей может привести к большим погрешностями, так как главная диагональ матрицы Q_ω, как следует из (12), (13) (15), содержит параметр регуляризации ω, значение которого может быть мало́.

Опишем метод получения устойчивого решения системы (16). Перепишем (16) в виде

$$\begin{pmatrix} \omega & b_{1,1} & & \\ b_{1,1} & -\omega & b_{2,1} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & b_{n+1,n} & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{2n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{f}_1 \\ \widetilde{f}_2 \\ \vdots \\ \widetilde{f}_{2n+1} \end{pmatrix}.$$

Проведём исключение из этой системы переменных с чётными индексами. Для этого из строк с номерами $2i-1$ и $2i+1$, $1 \leqslant i \leqslant n$ вычтем строку с номером $2i$, умноженную на $-b_{i,i}/\omega$ и на $-b_{i+1,i}/\omega$ соответственно. Умножая полученные уравнения на ω, получим систему

$$\begin{cases} C_\omega u = g, \\ y_{2i} = \Big(\dfrac{\widetilde{f}_{2i} - b_{i,i}y_{2i-1} - b_{i+1,i}y_{2i+1}}{-\omega}\Big), \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \end{cases} \tag{17}$$

где

$$C_\omega = \begin{pmatrix} c_1 & c'_1 & & \\ c'_1 & c_2 & c'_2 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & c'_n & c_{n+1} \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{2n+1} \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{n+1} \end{pmatrix};$$

$$c_1 = b_{1,1}^2 + \omega^2, \quad c_{n+1} = b_{n+1,n}^2 + \omega^2, \quad c_i = b_{i,i-1}^2 + b_{i,i}^2 + \omega^2, \quad 2 \leqslant i \leqslant n;$$
$$c'_i = b_{i,i}b_{i+1,i}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n;$$
$$g_1 = f_1\omega + f_2 b_{1,1}, \quad g_{n+1} = f_{2n+1}\omega + f_{2n}b_{n+1,n},$$
$$g_i = f_{2i-1}\omega + f_{2i-2}b_{i,i-1} + f_{2i}b_{i,i}, \quad 2 \leqslant i \leqslant n.$$

Определим числа

$$\eta_i = \prod_{k=1}^{i} \zeta_k, \quad 1 \leqslant i \leqslant n+1,$$

где

$$\zeta_1 = 1; \quad \zeta_k = \begin{cases} \dfrac{|b_{k-1,k-1}|}{|b_{k,k-1}|}, & 0 < |b_{k-1,k-1}| < |b_{k,k-1}|, \\ 1, & |b_{k-1,k-1}| \geqslant |b_{k,k-1}|, \end{cases} \qquad 2 < k \leqslant n+1.$$

Пусть $D = \mathrm{diag}(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n+1}) \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ – диагональная матрица. Рассмотрим следующую СЛАУ:

$$\widetilde{C}_\omega \psi = g, \tag{18}$$

где $\widetilde{C}_\omega = C_\omega D$, $\psi = D^{-1}u$.

Теорема. *Для системы* (18) *метод прогонки будет корректен и устойчив при любом* $\omega > 0$.

Доказательство. Докажем корректность. Прогонка будет корректной, если знаменатели Δ_i прогоночных коэффициентов δ_i, $1 \leqslant i \leqslant n+1$, не обращаются в нуль. Для матрицы $\widetilde{C}_\omega$ имеем

$$\delta_1 = -\frac{c'_1\eta_2}{c_1\eta_1} = -\frac{(b_{1,1}b_{2,1})\eta_2}{(b_{1,1}^2+\omega^2)\eta_1} = -\frac{b_{1,1}b_{2,1}}{b_{1,1}^2+\omega^2}\zeta_2, \qquad \Delta_1 = b_{1,1}^2 + \omega^2 > 0;$$

$$\delta_2 = -\frac{c'_2\eta_3}{c_2\eta_2 + c'_1\eta_1\delta_1} = -\frac{(b_{2,2}b_{3,2})\eta_3}{(b_{2,1}^2+b_{2,2}^2+\omega^2)\eta_2 + (b_{1,1}b_{2,1})\eta_1\delta_1} =$$

$$= -\frac{(b_{2,2}b_{3,2})\eta_3}{(b_{2,1}^2+b_{2,2}^2+\omega^2)\eta_2 - \left(b_{1,1}b_{2,1}\frac{b_{1,1}b_{2,1}}{b_{1,1}^2+\omega^2}\right)\eta_2} = -\frac{b_{2,2}b_{3,2}}{b_{2,1}^2+b_{2,2}^2+\omega^2-\frac{b_{1,1}^2b_{2,1}^2}{b_{1,1}^2+\omega^2}}\zeta_3,$$

$$\Delta_2 = b_{2,1}^2 + b_{2,2}^2 + \omega^2 - \frac{b_{1,1}^2b_{2,1}^2}{b_{1,1}^2+\omega^2} \geqslant b_{2,2}^2 + \omega^2 > 0.$$

Далее, по индукции, пусть для всех k, $1 \leqslant k \leqslant i$, выполняется

$$\delta_k = -\frac{b_{k,k}b_{k+1,k}}{\Delta_k}\zeta_{k+1}, \qquad \Delta_k \geqslant b_{k,k}^2 + \omega^2 > 0.$$

Для $k = i+1$ имеем

$$\delta_{i+1} = -\frac{c'_{i+1}\eta_{i+2}}{c_{i+1}\eta_{i+1} + c'_i\eta_i\delta_i} = -\frac{(b_{i+1,i+1}b_{i+2,i+1})\eta_{i+2}}{(b_{i+1,i}^2+b_{i+1,i+1}^2+\omega^2)\eta_{i+1} + (b_{i,i}b_{i+1,i})\eta_i\delta_i} =$$

$$= -\frac{b_{i+1,i+1}b_{i+2,i+1}}{b_{i+1,i}^2+b_{i+1,i+1}^2+\omega^2-\frac{b_{i,i}^2b_{i+1,i}^2}{\Delta_i}}\zeta_{i+2},$$

$$\Delta_{i+1} = b_{i+1,i}^2 + b_{i+1,i+1}^2 + \omega^2 - \frac{b_{i,i}^2 b_{i+1,i}^2}{\Delta_i} \geqslant$$
$$\geqslant b_{i+1,i}^2 + b_{i+1,i+1}^2 + \omega^2 - \frac{b_{i,i}^2 b_{i+1,i}^2}{b_{i,i}^2 + \omega^2} \geqslant b_{i+1,i+1}^2 + \omega^2 > 0.$$

Таким образом,

$$\delta_{i+1} = -\frac{b_{i+1,i+1} b_{i+2,i+1}}{\Delta_{i+1}} \zeta_{i+2}, \qquad \Delta_{i+1} \geqslant b_{i+1,i+1}^2 + \omega^2 > 0$$

и, следовательно,

$$\delta_i = -\frac{b_{i,i} b_{i+1,i}}{\Delta_i} \zeta_{i+1}, \qquad \Delta_i \geqslant b_{i,i}^2 + \omega^2 > 0$$

выполняется для всех $i = 1, 2, \ldots, n+1$.

Корректность прогонки для системы (18) доказана.

Докажем устойчивость. Прогонка будет устойчивой, если для всех δ_i, $i = 1, 2, \ldots, n+1$, выполняется условие $|\delta_i| < 1$.

Учитывая полученные ранее неравенства, имеем

$$|\delta_i| = \frac{|b_{i,i} b_{i+1,i}|}{\Delta_i} \zeta_{i+1} \leqslant \frac{|b_{i,i} b_{i+1,i}|}{b_{i,i}^2 + \omega^2} \zeta_{i+1} \leqslant \frac{b_{i,i}^2}{b_{i,i}^2 + \omega^2} < 1, \ i = 1{,}2, \ldots, n; \quad |\delta_{n+1}| = 0.$$

Таким образом, для системы (18) метод прогонки будет корректным и устойчивым для любого $\omega > 0$. $\square$

Отметим, что иногда требуется найти не всё решение $\begin{pmatrix} \widetilde{w} \\ \widetilde{v} \end{pmatrix}$ системы (5), а только вектор невязки $\widetilde{w}$. В этом случае в соответствующей системе (17) нет необходимости находить неизвестные y_{2i}, $i = 1, 2, \ldots, n$, поскольку, как следует из (8), (10), эти компоненты вектора y соответствуют вектору v системы (5).

3. Вычислительная сложность алгоритма. Проведём анализ вычислительных затрат предложенного алгоритма. Наиболее трудоёмким является приведение матрицы исходной системы (1) к двухдиагональному виду (получение разложения (4)). Известно два варианта этой процедуры: двухдиагонализация Хаусхолдера и R-двухдиагонализация [5]. Первый даёт лучший результат при $m \leqslant 5/3\, n$, второй — при $m \geqslant 5/3\, n$. В случае, когда явное формирование матриц U и V не требуется, как в предложенном алгоритме, двухдиагонализация Хаусхолдера требует $4mn^2 - 4n^3/3 + \mathsf{O}(n^2)$ флопов, затраты на выполнение R-двухдиагонализация составляют $2mn^2 + 2n^3 + \mathsf{O}(n^2)$ флопов [5].

Следует заметить, что решение системы (2) получается из решения системы (6) при помощи ортогонального преобразования, которое сохраняет евклидову норму вектора. Это обстоятельство часто позволяет использовать его, не вычисляя регуляризованного решения исходной системы. В этом случае количество арифметических операций, необходимых на одну итерацию решения системы (6), составляет $17n$. Если всё-таки необходимо при каждом параметре регуляризации вычисления решение исходной системы (2), то

Время вычисления параметра регуляризации методом перекрёстной значимости

размерность / метод	512×512	1024×1024	1536×1536	2048×2048
на основе PPHC, сек	11,19	66,45	201,05	446,64
на основе SVD, сек	15,06	112,66	382,77	918,58

каждая итерация потребует $17n + n^2$ операций. Все остальные вычисления, связанные с реализацией алгоритма, требуют порядка $\mathsf{O}(n^2)$ операций и не вносят существенного вклада в общие вычислительные затраты при $m, n \gg 1$.

Итого вычислительная сложность предложенного алгоритма составляет $4mn^2 - 4n^3/3 + \tau(17n[+n^2]) + \mathsf{O}(n^2)$ (при $m \leqslant 5/3\,n$) или $2mn^2 + 2n^3 + \tau(17n[+n^2]) + \mathsf{O}(n^2)$ (при $m \geqslant 5/3\,n$) флопов, где τ — количество вычисляемых решений.

Оценим необходимый для реализации алгоритма объём оперативной памяти. Разложение (4) может быть записано на место исходной матрицы при условии, что матрицы U и V хранятся в факторизованном виде [5]. Их явное формирование для реализации предложенного алгоритма, как упоминалось ранее, не требуется. Более того, матрица U нужна лишь для получения правой части системы (5). Таким образом, предложенный алгоритм не требует дополнительной оперативной памяти и вычисления по нему могут быть реализованы на месте матрицы исходной системы.

Заключение. Проведём сравнение предложенного вычислительного алгоритма с алгоритмом, использующим сингулярное разложение матрицы системы, как наиболее важным конкурентом решения подобного класса задач.

Одним из подходов к вычислению параметра регуляризации, не требующим априорной информации, является метод перекрёстной значимости [6].

Основным преимуществом предложенного метода является то, что он может быть реализован на месте матрицы исходной системы без использования дополнительной памяти, в отличие от SVD-метода.

Сравнение времени работы, приведенное в таблице, показывает, что предложенный алгоритм имеет преимущество, которое увеличивается с ростом размерности задачи.

Многочисленные численные эксперименты показали, что оба метода дают приблизительно одинаковую точность решения. Из этого следует, что предложенный алгоритм позволяет эффективно вычислять решения регуляризованной нормальной системы уравнений существенно большей размерности при различных параметрах регуляризации по сравнению с SVD-методом и при одних и тех же характеристиках точности.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Беклемишев Д. В.* Дополнительные главы линейной алгебры. М.: Наука, 1983. 336 с. [*Beklemishev D. V.* Additional Chapters of Linear Algebra. Moscow: Nauka, 1983. 336 pp.]
2. *Морозов В. А.* Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. М.: Наука, 1987. 240 с. [*Morozov V. A.* Regular Methods for Solving Ill-Posed Problems. Moscow: Nauka, 1987. 240 pp.]
3. *Chung J., Nagy J. G., O'Leary D. P.* A weighted-GCV method for Lanczos-hybrid regularization // *Electron. Trans. Numer. Anal.*, 2008. Vol. 28, no. 12. Pp. 149–167.
4. *Жданов А. И.* Об одном численно устойчивом алгоритме решения систем линейных алгебраических уравнений неполного ранга // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-*

мат. науки, 2008. № 1(16). С. 149–153. [*Zhdanov A. I.* About one numerical stable algorithm for solving system linear algebraic equations of defect rank // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2008. no. 1(16). Pp. 149–153].

5. *Голуб Дж., Ван Лоун Ч.* Матричные вычисления. М.: Мир, 1999. 548 с. [*Golub G., Van Loan C.* Matrix Computations. Moscow: Mir, 1999. 548 pp.]
6. *Björck Å.* Least Squares Methods / In: *Handbook of Numerical Analysis.* I: Solution of Equations in $\mathbb{R}^n$. Part 1.; eds. P. G. Ciarlet and J. L. Lions. Amsterdam: Elsevier/North Holland. Pp. 466–647.

Поступила в редакцию 19/X/2011;
в окончательном варианте — 27/XI/2011.

MSC: 15A06

ECONOMY METHOD FOR MULTIPLE SOLVING OF AUGMENTED REGULARIZED NORMAL SYSTEM OF EQUATIONS

V. V. Dolishniy, A. I. Zhdanov

S. P. Korolyov Samara State Aerospace University
(National Research University),
34, Moskovskoe sh., Samara, 443086, Russia.

E-mails: `VDolishniy@mail.ru`, `ZhdanovAleksan@yandex.ru`

In this work, a new numerical algorithm for solving augmented regularized normal system of equations with several regularization parameters is proposed. The computational costs and the required amount of RAM of the proposed algorithm are analyzed. The proposed numerical algorithm is compared with the algorithm based on the singular value decomposition.

Key words: *ill-posed problems, augmented regularized normal system of equations, numerical algorithm.*

Original article submitted 19/X/2011;
revision submitted 27/XI/2011.

Vasiliy V. Dolishniy, Postgraduate Student, Dept. of Applied Mathematics. *Alexander I. Zhdanov* (Dr. Sci. (Phys. & Math)), Head of Dept., Dept. of Applied Mathematics.