Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2011. № 3 (24). С. 26–34

УДК 517.956

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ОСЕСИММЕТРИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

А. А. Абашкин

Самарский государственный архитектурно-строительный университет,
443001, Самара, ул. Молодогвардейская, 194.

E-mail: samcocaa@rambler.ru

Для обобщённого осесимметрического уравнения Гельмгольца исследована нелокальная краевая задача. Спектральным методом доказана единственность решения и найдены условия его существования. Приведена формула, в которой решение представляется в виде биортогонального ряда.

Ключевые слова: *уравнение Гельмгольца, функции Бесселя, нелокальная задача, базис Рисса.*

Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u_{xx} + u_{yy} + \frac{2p}{y} u_y + b^2 u = 0, \quad p \neq n + \frac{1}{2}, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

в полуполосе $D = \{(x, y) \mid 0 < x < 1,\ y > 0\}$. Для уравнения (1) поставим следующую задачу.

Задача. *Найти в области D функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую уравнению* (1) *и следующим условиям*:

$$u(x, y) \in C^1(D \cup \{x = 0, y > 0\}) \cap C^2(D); \tag{2}$$

$$u(0, y) = u(1, y), \quad u_x(0, y) = 0; \tag{3}$$

$$\begin{gathered} \lim_{y\to 0+} u(x, y) = \varphi(x), \quad 2p < 1, \\ \lim_{y\to 0+} y^{2p-1} u_y(x, y) = \varphi(x), \quad 2p > 1; \end{gathered} \tag{4}$$

$$\begin{gathered} \lim_{l\to\infty} l^p \int_0^1 u\Big(x, \frac{(2l+p)\pi}{2\sqrt{|(2\pi n)^2 - b^2|}}\Big) \sin(2\pi n x)dx = 0, \quad l \in \mathbb{N}, \\ \lim_{l\to\infty} l^p \int_0^1 u\Big(x, \frac{(2l+p)\pi}{2\sqrt{|(2\pi n)^2 - b^2|}}\Big) (1-x)\cos(2\pi n x)dx = 0, \quad l \in \mathbb{N}. \end{gathered} \tag{5}$$

Заметим, что подобная задача, но для уравнения

$$u_{xx} + u_{yy} + \frac{2p}{y} u_y - b^2 u = 0,$$

была изучена в работах [1, 2]. А для уравнения

$$y^m u_{xx} + u_{yy} - b^2 y^m u = 0, \quad b > 0, m > 0$$

подобные задачи рассматривались в публикациях [3, 4].

Антон Александрович Абашкин, аспирант, каф. высшей математики.

Уравнение (1) является частным случаем двуосесимметрического уравнения Гельмгольца, которое подробно рассматривалось в монографии [5]. В частном случае при $p = 0$ уравнение (1) является уравнением Гельмгольца. Оно возникает при моделировании в волноводной электродинамике [6].

Теорема 1. *Если решение задачи для уравнения* (1) *с условиями* (2)–(5) *существует, то оно единственно.*

Доказательство. Пусть $u(x, y)$ — решение задачи (2)–(5) для уравнения (1). Рассмотрим функции

$$v_n = 4\int_0^1 u(x, y)\sin(2\pi nx)dx, \tag{6}$$

$$u_0 = 2\int_0^1 u(x, y)(1 - x)dx, \tag{7}$$

$$u_n = 4\int_0^1 u(x, y)(1 - x)\cos(2\pi nx)dx. \tag{8}$$

Так как $u(x, y)$ является решением уравнения (1), выполняется соотношение

$$\int_0^1 \Big(u_{xx} + u_{yy} + \frac{2p}{y}u_y + b^2 u\Big)\sin(2\pi nx)dx = 0,$$

которое интегрированием по частям можно привести к виду

$$v_n'' + \frac{2p}{y}v_n' - \big((2\pi n)^2 - b^2\big)v_n = 0. \tag{9}$$

При $|2\pi n| > |b|$ уравнение (9) заменой $v_n(y) = y^{-\overline{p}}W(\sqrt{s_n}y)$, где $s_n = (2\pi n)^2 - b^2$, сводится к модифицированному уравнению Бесселя, поэтому решением уравнения (9) будет функция [7, с. 13]

$$v_n(y) = C_1 y^{-\overline{p}} I_{\overline{p}}(\sqrt{s_n}y) + C_2 y^{-\overline{p}} K_{\overline{p}}(\sqrt{s_n}y), \tag{10}$$

где $I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$ — модифицированные функции Бесселя.

Из условия (5) получаем, что $C_1 = 0$ ввиду асимптотики функций $K_\nu(z)$ и $I_\nu(z)$ при $z \to \infty$ [7, с. 32, с. 99]:

$$K_\nu(z) \simeq \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}}, \quad I_\nu(z) \simeq \frac{e^{z}}{\sqrt{z}}. \tag{11}$$

Теперь, используя условие (4) и асимптотику для функции Макдональда [8, с. 246]

$$K_\nu(z) \simeq \frac{\Gamma(|\nu|)}{2^{1-|\nu|}x^{|\nu|}}, \quad z \to 0, \tag{12}$$

найдём C_2.

При $2p > 1$ имеем

$$\lim_{y\to 0}(y^{2p-1}v_n(y)) = C_2\frac{\Gamma(\overline{p})}{2^{1-\overline{p}}(\sqrt{s_n})^{\overline{p}}} = 4\int_0^1 \varphi(x)\sin(2\pi nx)dx.$$

Выражая из этого соотношения C_2, получаем

$$C_2 = \frac{2^{3-\overline{p}}(\sqrt{s_n})^{\overline{p}}}{\Gamma(\overline{p})} \int_0^1 \varphi(x)\sin(2\pi nx)dx.$$

Тогда $v_n(y)$ имеет следующий вид:

$$v_n(y) = \frac{2^{3-\overline{p}}(\sqrt{s_n})^{\overline{p}}}{\Gamma(\overline{p})} y^{-\overline{p}} K_{\overline{p}}(\sqrt{s_n}y) \int_0^1 \varphi(x)\sin(2\pi nx)dx. \tag{13}$$

При $2p < 1$ имеем

$$\lim_{y\to 0} v_n(y) = C_2 \frac{\Gamma(-\overline{p})(\sqrt{s_n})^{\overline{p}}}{2^{1+\overline{p}}} = 4\int_0^1 \varphi(x)\sin(2\pi nx)dx.$$

Для C_2 получаем такое выражение:

$$C_2 = \frac{2^{\overline{p}+3}}{\Gamma(-\overline{p})(\sqrt{s_n})^{\overline{p}}} \int_0^1 \varphi(x)\sin(2\pi nx)dx.$$

Функция $v_n(y)$ тогда принимает следующий вид:

$$v_n(y) = \frac{2^{\overline{p}+3}}{\Gamma(-\overline{p})(\sqrt{s_n})^{\overline{p}}} y^{-\overline{p}} K_{\overline{p}}(\sqrt{s_n}y) \int_0^1 \varphi(x)\sin(2\pi nx)dx. \tag{14}$$

При $|2\pi n| < |b|$ уравнение (9) заменой $v_n(y) = y^{-\overline{p}} W(\sqrt{-s_n}y)$ сводится к уравнению Бесселя, решение которого имеет вид [7, с. 12]:

$$v_n(y) = C_3 y^{-\overline{p}} J_{\overline{p}}(\sqrt{-s_n}y) + C_4 y^{-\overline{p}} Y_{\overline{p}}(\sqrt{-s_n}y), \tag{15}$$

где $J_\nu(z)$ — функция Бесселя [7, с. 12]:

$$J_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{z}{2}\right)^{2m+\nu}}{m!\Gamma(m+\nu+1)}, \quad \nu \notin \mathbb{Z}, \tag{16}$$

$Y_\nu(z)$ — функция Вебера [7, с. 12]:

$$Y_\nu = \frac{1}{\sin(\nu\pi)}(J_\nu(z)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(z)), \quad \nu \notin \mathbb{Z}. \tag{17}$$

Учитывая асимптотику функций Бесселя и Вебера [7, с. 98]:

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\Big(\cos\Big(\frac{4z-(2\nu+1)\pi}{4}\Big) + \mathsf{O}\Big(\frac{1}{z}\Big)\Big), \quad z \to \infty,$$

$$Y_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\Big(\sin\Big(\frac{4z-(2\nu+1)\pi}{4}\Big) + \mathsf{O}\Big(\frac{1}{z}\Big)\Big), \quad z \to \infty,$$

для выполнения условия (5) требуется положить $C_3 = 0$.

Найдём C_4, используя условие (4) и определения функций Бесселя (16) и Вебера (17). Тогда при $2p > 1$ имеем

$$\lim_{y\to 0} y^{2p-1} v_n(y) = C_4 \frac{2^{\overline{p}}}{\sin(\pi\overline{p})\Gamma(-\overline{p}+1)(\sqrt{-s_n})^{\overline{p}}} = 4\int_0^1 \varphi(x)\sin(2\pi nx)dx.$$

Выражая C_4 из этого соотношения, получаем

$$C_4 = 2^{-\overline{p}+2}\sin(\pi\overline{p})\Gamma(-\overline{p}+1)(\sqrt{-s_n})^{\overline{p}}\int_0^1 \varphi(x)\sin(2\pi nx)dx.$$

В этом случае $v_n(y)$ выражается следующей формулой:

$$v_n(y) = 2^{-\overline{p}+2}\sin(\pi\overline{p})\Gamma(-\overline{p}+1)(\sqrt{-s_n})^{\overline{p}} y^{-\overline{p}} Y_{\overline{p}}(\sqrt{-s_n}y)\times \\ \times \int_0^1 \varphi(x)\sin(2\pi nx)dx. \quad (18)$$

При $2p < 1$

$$\lim_{y\to 0} v_n(y) = C_4 \frac{\operatorname{ctg}(\pi\overline{p})(\sqrt{-s_n})^{\overline{p}}}{2^{\overline{p}}\Gamma(-\overline{p}+1)} = 4\int_0^1 \varphi(x)\sin(2\pi nx)dx,$$

а значит

$$C_4 = \frac{2^{\overline{p}+2}\Gamma(-\overline{p}+1)}{\operatorname{ctg}(\pi\overline{p})(\sqrt{-s_n})^{\overline{p}}}\int_0^1 \varphi(x)\sin(2\pi nx)dx$$

и

$$v_n(y) = \frac{2^{\overline{p}+2}\Gamma(-\overline{p}+1)}{\operatorname{ctg}(\pi\overline{p})(\sqrt{-s_n})^{\overline{p}}} y^{-\overline{p}} Y_{\overline{p}}(\sqrt{-s_n}y)\int_0^1 \varphi(x)\sin(2\pi nx)dx. \quad (19)$$

Найдём теперь $u_0(y)$. Аналогично предыдущим рассуждениям приходим к уравнению

$$u_0'' + \frac{2p}{y}u_0' + b^2 u_0 = 0.$$

Заменой $u_0(y) = y^{-\overline{p}}W(by)$ оно сводится к уравнению Бесселя. Его решением будет функция $u_0(y) = C_5 y^{-\overline{p}} J_{\overline{p}}(by) + C_6 y^{-\overline{p}} Y_{\overline{p}}(by)$. Ввиду условия (5) $C_5 = 0$.

Найдём C_6 из условия (4), опираясь на явный вид функции Бесселя (16) и Вебера (17). При $2p > 1$ имеем

$$\lim_{y\to 0} y^{2p-1} u_0(y) = C_6 \frac{2^{\overline{p}}}{\sin(\pi\overline{p})\Gamma(-\overline{p}+1)b^{\overline{p}}} = 2\int_0^1 \varphi(x)(1-x)dx.$$

Преобразовав это соотношение, получим

$$C_6 = 2^{-\overline{p}+1}\sin(\pi\overline{p})\Gamma(-\overline{p}+1)b^{\overline{p}}\int_0^1 \varphi(x)(1-x)dx.$$

Тогда

$$u_0(y) = 2^{-\overline{p}+1}\sin(\pi\overline{p})\Gamma(-\overline{p}+1)b^{\overline{p}} y^{-\overline{p}} Y_{\overline{p}}(by)\int_0^1 \varphi(x)(1-x)dx. \quad (20)$$

При $2p<1$ имеем

$$\lim_{y\to 0} u_0(y) = C_6 \frac{\operatorname{ctg}(\pi\overline{p}) b^{\overline{p}}}{2^{\overline{p}}\Gamma(-\overline{p}+1)} = 2\int_0^1 \varphi(x)(1-x)dx,$$

а значит

$$C_6 = \frac{2^{\overline{p}+1}\Gamma(-\overline{p}+1)}{\operatorname{ctg}(\pi\overline{p}) b^{\overline{p}}} \int_0^1 \varphi(x)(1-x)dx$$

и

$$u_0(y) = \frac{2^{\overline{p}+1}\Gamma(-\overline{p}+1)}{\operatorname{ctg}(\pi\overline{p}) b^{\overline{p}}} y^{-\overline{p}} Y_{\overline{p}}(by) \int_0^1 \varphi(x)(1-x)dx. \tag{21}$$

Теперь найдём $u_n(y)$. Аналогично предыдущим случаям приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$u_n'' + \frac{2p}{y}u_n' - ((2\pi n)^2 - b^2)u_n = -4\pi n v_n. \tag{22}$$

Уравнение (22) — линейное неоднородное дифференциальное уравнение, его решение можно представить в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного. Однородное уравнение совпадает с уравнением (9), его решение имеет вид (10) при $|2\pi n| > |b|$ и вид (15) при $|2\pi n| < |b|$.

Частным решением уравнения (22) будет функция $C_K y^{-\overline{p}+1} K_{\overline{p}-1}(\sqrt{s_n})$, если $|2\pi n| > |b|$, и функция $C_J y^{-\overline{p}+1} J_{\overline{p}-1}(\sqrt{-s_n} y)$, если $|2\pi n| < |b|$, где

$$C_K = -\frac{\pi n (\sqrt{s_n})^{\overline{p}-1}}{2^{\overline{p}-1} p \Gamma(\overline{p})} \int_0^1 \varphi(x)\sin(2\pi n x)dx, \quad 2p>1,$$

$$C_K = -\frac{2^{\overline{p}+5}\pi n}{p\Gamma(-\overline{p})(\sqrt{s_n})^{\overline{p}+1}} \int_0^1 \varphi(x)\sin(2\pi n x)dx, \quad 2p<1,$$

$$C_J = -\frac{\pi n \sin(\pi\overline{p})\Gamma(-\overline{p}+1)(\sqrt{-s_n})^{\overline{p}-1}}{2^{\overline{p}} p} \int_0^1 \varphi(x)\sin(2\pi n x)dx, \quad 2p>1,$$

$$C_J = -\frac{2^{\overline{p}+4}\pi n \Gamma(-\overline{p}+1)}{p \operatorname{ctg}(\pi\overline{p})(\sqrt{-s_n})^{\overline{p}+1}} \int_0^1 \varphi(x)\sin(2\pi n x)dx, \quad 2p<1.$$

Тогда общее решение уравнения (22) имеет вид

$$u_n(y) = C_7 y^{-\overline{p}} I_{\overline{p}}(\sqrt{s_n} y) + C_8 y^{-\overline{p}} K_{\overline{p}}(\sqrt{s_n} y), \quad |2\pi n| > |b|,$$

$$u_n(y) = C_9 y^{-\overline{p}} J_{\overline{p}}(\sqrt{-s_n} y) + C_{10} y^{-\overline{p}} Y_{\overline{p}}(\sqrt{-s_n} y), \quad |2\pi n| < |b|.$$

Ввиду условия (5) $C_7 = 0$ и $C_9 = 0$.

Теперь рассмотрим условие (4). При $|2\pi n| > |b|$ и при $2p>1$ имеем

$$\lim_{y\to 0} y^{2p-1} u_n(y) = C_8 \frac{\Gamma(\overline{p})}{2^{1-\overline{p}}(\sqrt{s_n})^{\overline{p}}} = 4\int_0^1 \varphi(x)(1-x)\cos(2\pi n x)dx,$$

т. е.

$$C_8 = \frac{2^{3-\overline{p}}(\sqrt{s_n})^{\overline{p}}}{\Gamma(\overline{p})}\int_0^1 \varphi(x)(1-x)\cos(2\pi nx)dx.$$

Тогда для $u_n(y)$ получим следующее выражение:

$$u_n(y) = \frac{2^{3-\overline{p}}(\sqrt{s_n})^{\overline{p}}}{\Gamma(\overline{p})}y^{-\overline{p}}K_{\overline{p}}(\sqrt{s_n}y)\int_0^1 \varphi(x)(1-x)\cos(2\pi nx)dx-$$
$$- \frac{\pi n(\sqrt{s_n})^{\overline{p}-1}}{2^{\overline{p}-1}p\Gamma(\overline{p})}y^{-\overline{p}+1}K_{\overline{p}-1}(\sqrt{s_n}y)\int_0^1 \varphi(x)\sin(2\pi nx)dx. \quad (23)$$

А при $2p < 1$ —

$$\lim_{y\to 0} u_n(y) = C_8\frac{\Gamma(-\overline{p})(\sqrt{s_n})^{\overline{p}}}{2^{1+\overline{p}}} + C_K\frac{\Gamma(-\overline{p}+1)(\sqrt{s_n})^{\overline{p}-1}}{2^{\overline{p}}} =$$
$$= 4\int_0^1 \varphi(x)(1-x)\cos(2\pi nx)dx.$$

Из этого соотношения выражаем C_8:

$$C_8 = \frac{2^{3+\overline{p}}\int_0^1 \varphi(x)(1-x)\cos(2\pi nx)dx}{\Gamma(-\overline{p}+1)(\sqrt{s_n})^{\overline{p}+1}} + \frac{2^{\overline{p}+6}\pi n(-\overline{p}+1)}{p\Gamma(-\overline{p})(\sqrt{s_n})^{\overline{p}-2}}\int_0^1 \varphi(x)\sin(2\pi nx)dx$$

и получаем представление для u_n:

$$u_n(y) = \left(\frac{2^{3+\overline{p}}\int_0^1 \varphi(x)(1-x)\cos(2\pi nx)dx}{\Gamma(-\overline{p}+1)(\sqrt{s_n})^{\overline{p}+1}}+\right.$$
$$\left.+\frac{2^{\overline{p}+6}\pi n(-\overline{p}+1)}{p\Gamma(-\overline{p})(\sqrt{s_n})^{\overline{p}-2}}\int_0^1 \varphi(x)\sin(2\pi nx)dx\right)y^{-\overline{p}}K_{\overline{p}}(\sqrt{s_n}y)+$$
$$+\frac{2^{\overline{p}+5}\pi n}{p\Gamma(-\overline{p})(\sqrt{s_n})^{\overline{p}+1}}y^{-\overline{p}+1}K_{\overline{p}-1}(\sqrt{s_n}y)\int_0^1 \varphi(x)\sin(2\pi nx)dx. \quad (24)$$

При $|2\pi n| < |b|$ и $2p > 1$ имеем

$$\lim_{y\to 0} y^{2p-1}u_n(y) = C_{10}\frac{2^{\overline{p}}}{\sin(\pi\overline{p})\Gamma(-\overline{p}+1)(\sqrt{-s})^{\overline{p}}} = 4\int_0^1 \varphi(x)(1-x)\cos(2\pi nx)dx.$$

Отсюда

$$C_{10} = 2^{-\overline{p}+2}\sin(\pi\overline{p})\Gamma(-\overline{p}+1)(\sqrt{-s_n})^{\overline{p}}\int_0^1 \varphi(x)(1-x)\cos(2\pi nx)dx$$

и

$$u_n = 2^{-\overline{p}+2}\sin(\pi\overline{p})\Gamma(-\overline{p}+1)(\sqrt{-s_n})^{\overline{p}}y^{-\overline{p}}Y_{\overline{p}}(\sqrt{-s_n}y)\int_0^1 \varphi(x)(1-x)\cos(2\pi nx)dx-$$

$$-\frac{\pi n\sin(\pi\overline{p})\Gamma(-\overline{p}+1)(\sqrt{-s_n})^{\overline{p}-1}}{2^{\overline{p}}p}y^{-\overline{p}+1}J_{\overline{p}-1}(\sqrt{-s_n}y)\times$$
$$\times\int_0^1\varphi(x)\sin(2\pi nx)dx.$$

При $2p<1$ имеем

$$\lim_{y\to 0}u_n(y)=C_{10}\frac{\mathrm{ctg}(\pi\overline{p})(\sqrt{-s_n})^{\overline{p}}}{2^{\overline{p}}\Gamma(-\overline{p}+1)}+C_J\frac{\mathrm{ctg}(\pi(\overline{p}-1))(\sqrt{-s_n})^{\overline{p}-1}}{2^{\overline{p}-1}\Gamma(-\overline{p}+2)}=$$
$$=4\int_0^1\varphi(x)(1-x)\cos(2\pi nx)dx.$$

В этом случае

$$C_{10}=\frac{2^{\overline{p}+2}\Gamma(-\overline{p}+1)}{\mathrm{ctg}(\pi\overline{p})(\sqrt{-s_n})^{\overline{p}}}\int\limits_0^1\varphi(x)(1-x)\cos(2\pi nx)dx+$$
$$+\frac{2^{\overline{p}+5}(-\overline{p}+2)\pi n\Gamma(-\overline{p}+1)}{p\,\mathrm{ctg}(\pi(\overline{p}-1))(\sqrt{-s_n})^{\overline{p}+2}}\int\limits_0^1\varphi(x)\sin(2\pi nx)dx. \quad (25)$$

В итоге

$$u_n=\left(\frac{2^{\overline{p}+2}\Gamma(-\overline{p}+1)}{\mathrm{ctg}(\pi\overline{p})(\sqrt{-s_n})^{\overline{p}}}\int\limits_0^1\varphi(x)(1-x)\cos(2\pi nx)dx+\right.$$
$$\left.+\frac{2^{\overline{p}+5}(-\overline{p}+2)\pi n\Gamma(-\overline{p}+1)}{p\,\mathrm{ctg}(\pi(\overline{p}-1))(\sqrt{-s_n})^{\overline{p}+2}}\int_0^1\varphi(x)\sin(2\pi nx)dx\right)y^{-\overline{p}}Y_{\overline{p}}(\sqrt{-s_n}y)-$$
$$-\frac{2^{\overline{p}+4}\pi n\Gamma(-\overline{p}+1)}{p\,\mathrm{ctg}(\pi\overline{p})(\sqrt{-s_n})^{\overline{p}+1}}y^{-\overline{p}+1}J_{\overline{p}-1}(\sqrt{-s_n}y)\int_0^1\varphi(x)\sin(2\pi nx)dx. \quad (26)$$

Из формул (13), (14), (18)–(21), (23)–(26) следует, что если $\varphi(x)=0$, то $v_n(y)=0$, $u_0(y)=0$ и $u_n(y)=0$, но тогда $u(x,y)=0$ в силу полноты системы $\{4\sin 2\pi nx\}_{n=1}^{\infty}$, $\{2(1-x)\}$, $\{4(1-x)\cos 2\pi nx\}_{n=1}^{\infty}$ [9], что завершает доказательство единственности решения. □

Теорема 2. *Если $\varphi(x)\in C[0,1]$, то решение задачи (2)–(5) для уравнения (1) существует и представимо в виде*

$$u(x,y)=u_0(y)+\sum_{n=1}^{\infty}u_n(y)\cos 2\pi nx+\sum_{n=1}^{\infty}v_n(y)x\sin 2\pi nx. \quad (27)$$

Доказательство. Поскольку системы функций $\{4\sin 2\pi nx\}_{n=1}^{\infty}$, $\{2(1-x)\}$, $\{4(1-x)\cos 2\pi nx\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{x\sin 2\pi nx\}_{n=1}^{\infty}$, $\{1\}$, $\{\cos 2\pi nx\}_{n=1}^{\infty}$ образуют базис Рисса [9], достаточно доказать равномерную сходимость ряда (27).

Рассмотрим ряд из абсолютных значений коэффициентов при $\cos 2\pi nx$, то есть из $|u_n(y)|$ при $y \geqslant \delta > 0$. Для каждого n все множители, входящие в оба слагаемых, при условиях теоремы имеют степенной характер при $n \to \infty$, кроме множителей $K_{\overline{p}}(\sqrt{s_n}y)$ и $K_{\overline{p}+1}(\sqrt{s_n}y)$, которые убывают экспоненциально. Таким образом, слагаемые ряда убывают экспоненциально, а значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(y)|$ сходится равномерно.

По аналогичным соображениям равномерно сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|v_n(y)|$.

Из равномерной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(y)|$ и ряда $\sum_{n=1}^{\infty}|v_n(y)|$ следует равномерная сходимость ряда (27), что завершает доказательство существования решения исследуемой задачи. □

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Лернер М. Е., Репин О. А.* Нелокальные краевые задачи в вертикальной полуполосе для обобщенного осесимметричного уравнения Гельмгольца // *Дифференциальные уравнения.*, 2001. Т. 37, № 11. С. 1562–1564; англ. пер.: *Lerner M. E., Repin O. A.* Nonlocal boundary value problems in a vertical half-strip for a generalized axisymmetric Helmholtz equation // *Differ. Equ.*, 2001. Vol. 37, no. 11. Pp. 1640–1642.

2. *Моисеев Е. И.* О разрешимости одной нелокальной краевой задачи // *Дифференциальные уравнения*, 2001. Т. 37, № 11. С. 1565–1567; англ. пер.: *Moiseev E. I.* Solvability of a nonlocal boundary value problem // *Differ. Equ.*, 2001. Vol. 37, no. 11. Pp. 1643–1646.

3. *Валитов И. Р.* Решение нелокальной задачи для вырождающегося эллиптического уравнения спектральным методом / В сб.: *Спектральная теория дифференциальных операторов и родственные проблемы*: Тр. международной научной конф-ции. Т. 1. Уфа: Гилем, 2003. С. 100–110. [*Valitov I. R.* Solution of a nonlocal problem for a elliptic equation by the spectral method / In: *The Spectral Theory of Differential Operators and Related Problems*: Proc. of the International Scientific Conference. Vol. 1. Ufa: Gilem, 2003. Pp. 100–110].

4. *Сабитов К. Б., Сидоренко О. Г.* Об однозначной разрешимости нелокальной задачи для вырождающегося эллиптического уравнения спектральным методом / В сб.: *Спектральная теория дифференциальных операторов и родственные проблемы*: Тр. международной научной конф-ции. Т. 1. Уфа: Гилем, 2003. С. 213–219. [*Sabitov K. B., Sidorenko O. G.* On the unique solvability of nonlocal problems for degenerate elliptic equations by the spectral method / In: *The Spectral Theory of Differential Operators and Related Problems*: Proc. of the International Scientific Conference. Vol. 1. Ufa: Gilem, 2003. Pp. 213–219].

5. *Маричев О. И., Килбас А. А., Репин О. А.* Краевые задачи для уравнений в частных производных с разрывными коэффициентами. Самара: СГЭУ, 2008. 275 с. [*Marichev O. I. Kilbas A. A.; Repin O. A.* Boundary value problems for partial differential equations with discontinuous coefficients. Samara: SGÉU, 2008. 275 pp.]

6. *Плещинский Н. Б.* Модели и методы волноводной электродинамики. Казань: КГУ, 2008. 103 с. [*Pleschinskiy N. B.* Models and methods of waveguide electrodynamics. Kazan: KGU, 2008. 103 pp.]

7. *Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G.* Higher transcendental functions. Vol. II / ed. H. Bateman. New York – Toronto – London: McGraw-Hill Book Co, Inc., 1953. 396 pp.; русск. пер.: *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. В 3-х т. Т. 2: Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М.: Наука, 1974. 295 с.

8. *Olver F. W. J.* Asymptotics and special functions / Computer Science and Applied Mathematics. Vol. XVI. New York – London: Academic Press, 1974. 572 pp.; русск. пер.: *Олвер Ф.* Асимптотика и специальные функции. М.: Наука, 1990. 528 с.

9. *Моисеев Е. И.* О решении спектральным методом одной нелокальной краевой задачи // *Дифференциальные уравнения*, 1999. Т. 35, № 8. С. 1094–1100; англ. пер.: *Moiseev E. I.* The solution of a nonlocal boundary value problem by the spectral method // *Differ. Equ.*, 1999. Vol. 35, no. 8. Pp. 1105–1112.

Поступила в редакцию 01/XII/2010;
в окончательном варианте — 15/VIII/2011.

MSC: 35J05; 35J25, 35B30

ON ONE NON-LOCAL PROBLEM FOR AXISYMMETRIC HELMHOLTZ EQUATION

A. A. Abashkin

Samara State University of Architecture and Civil Engineering,
194, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443001, Russia.

E-mail: samcocaa@rambler.ru

Non-local boundary problem for the axisymmetric Helmholtz equation is explored. The uniqueness of the solution is proved by the spectral method. The conditions of solvability are found. The solution of the problem is constructed in the form of the biorthogonal series.

Key words: *Helmholtz equation, Bessel functions, non-local boundary problem, Riesz basis.*

Original article submitted 01/XII/2010;
revision submitted 15/VIII/2011.

Anton A. Abashkin, Postgraduate Student, Dept. of High Mathematics.