Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2011. № 3 (24). С. 42–51

Функциональный анализ

УДК 517.984

О СУЩЕСТВЕННОМ СПЕКТРЕ ОДНОГО МОДЕЛЬНОГО ОПЕРАТОРА, АССОЦИИРОВАННОГО С СИСТЕМОЙ ТРЁХ ЧАСТИЦ НА РЕШЁТКЕ

Т. Х. Расулов[1,2]

[1] Бухарский государственный университет,
физико-математический факультет,
Узбекистан, 200100, Бухара, ул. Мухаммад Икбол, 11.
[2] Университет Берна, научно-философский факультет,
Швейцария, CH-3012, Берн.

E-mail: rth@mail.ru

Рассматривается модельный оператор H, ассоциированный с системой трёх одинаковых частиц на трёхмерной решётке $\mathbb{Z}^3$. Описано местоположение существенного спектра оператора H через спектр соответствующей модели Фридрихса, т. е. выделены двухчастичная и трёхчастичная ветви существенного спектра оператора H. Доказано, что существенный спектр этого оператора состоит из объединения не более чем трёх отрезков. Показано появление двухчастичных ветвей по обе стороны трёхчастичной ветви существенного спектра H. Кроме того, получен аналог уравнения Фаддеева, а также его симметризованный вариант, для собственных функций оператора H.

Ключевые слова: *модельный оператор, модель Фридрихса, класс Гильберта—Шмидта, уравнения Фаддеева, существенный спектр.*

Введение. Существенный спектр многочастичных операторов в евклидовом пространстве достаточно хорошо изучен во многих работах, см. например [1–3]. Системы трёх частиц на решётке были рассмотрены в работах [4–7] и исследован их существенный спектр. В частности, в работе [5] доказано, что существенный спектр трёхчастичного оператора Шрёдингера на решётке состоит из объединения не более чем конечного числа отрезков, даже в том случае, когда соответствующий двухчастичный оператор Шрёдингера на решётке имеет бесконечное число собственных значений.

В настоящей работе рассматривается модельный оператор H, ассоциированный с системой трёх одинаковых частиц на решётке. Выделены двухчастичная и трёхчастичная ветви существенного спектра оператора H. Доказано, что существенный спектр этого оператора состоит из объединения не более чем трёх отрезков. Отметим, что появление двухчастичных ветвей по обе стороны трёхчастичной ветви существенного спектра H, играет важную роль при изучении конечности или бесконечности частей дискретного спектра, расположенных там, а также на лакунах существенного спектра.

Расулов Тулкин Хусенович (к.ф.-м.н., доц.), доцент, каф. алгебры и анализа[1]; докторант, математический институт[2].

Следует отметить, что двухчастичная и трёхчастичная ветви существенного спектра трёхчастичного непрерывного оператора Шрёдингера [1–3] представляют собой полубесконечные прямые и пересекаются. В данном случае, в отличие от непрерывного случая, двухчастичная и трёхчастичная ветви существенного спектра модельного оператора H заполняют отрезки конечной длины и они могут не пересекаться, т. е. возникает лакуна. Поэтому в решётчатом случае необходимо изучать ветви существенного спектра по обе стороны трёхчастичной ветви, от которого зависит существование двустороннего эффекта Ефимова. В работах [4–8] доказано, что решётчатые операторы не имеют частей существенного и дискретного спектра правее трёхчастичной ветви. В этих работах изучение расположения существенного спектра основано на монотонности определителя Фредгольма модели Фридрихса. В данном случае, в отличие от предыдущих работ, определитель Фредгольма не монотонен, метод исследования основан на числе собственных значений модели Фридрихса.

1. Модельный оператор. Пусть $\mathcal{T}^3 = (-\pi;\pi]^3$ — трёхмерный куб с соответствующим отождествлением противоположных граней, $L_2(\mathcal{T}^3)$ — гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определённых на $\mathcal{T}^3$, и $L_2^{\mathrm{s}}((\mathcal{T}^3)^2)$ — гильбертово пространство квадратично-интегрируемых, симметричных (комплекснозначных) функций, определённых на $(\mathcal{T}^3)^2$.

Рассмотрим модельный оператор H, действующий в гильбертовом пространстве $L_2^{\mathrm{s}}((\mathcal{T}^3)^2)$ по формуле

$$H = H_0 - K_1 - K_2,$$

где операторы H_0 и K_i, $i = 1, 2$ определяются по формулам:

$$(H_0 f)(p,q) = w(p,q)f(p,q),$$

$$(K_1 f)(p,q) = \int K(q,s)f(p,s)ds, \quad (K_2 f)(p,q) = \int K(p,s)f(s,q)ds.$$

Здесь

$$K(p,q) = \varphi_1(p)\varphi_1(q) - \varphi_2(p)\varphi_2(q),$$

$\varphi_i(\cdot)$ $(i = 1, 2)$ — вещественнозначная непрерывная функция на $\mathcal{T}^3$ и $w(\cdot,\cdot)$ — вещественнозначная симметричная непрерывная функция на $(\mathcal{T}^3)^2$. Здесь и в дальнейшем интеграл без указания пределов всюду означает интегрирование по всей области изменения переменных интегрирования.

В этих предположениях оператор H является ограниченным и самосопряжённым в гильбертовом пространстве $L_2^{\mathrm{s}}((\mathcal{T}^3)^2)$.

2. Некоторые спектральные свойства модели Фридрихса. В этом пункте рассматривается модель Фридрихса $h(p)$, $p \in \mathcal{T}^3$, действующая в $L_2(\mathcal{T}^3)$ как

$$h(p) = h_0(p) - k, \tag{1}$$

где операторы $h_0(p)$, $p \in \mathcal{T}^3$ и k определяются по правилам

$$(h_0(p)f)(q) = w(p,q)f(q), \quad (kf)(q) = \int K(q,s)f(s)ds$$

и изучаются два свойства этого оператора, которые понадобятся при доказательстве основного результата работы.

Обозначим через $\sigma(\cdot)$, $\sigma_{\rm ess}(\cdot)$ и $\sigma_{\rm disc}(\cdot)$ соответственно спектр, существенный спектр и дискретный спектр ограниченного самосопряжённого оператора.

Оператор возмущения k оператора $h_0(p)$, $p\in\mathcal{T}^3$ является самосопряжённым двумерным оператором. Следовательно, из известной теоремы Г. Вейля [1] о сохранении существенного спектра при возмущениях конечного ранга вытекает, что существенный спектр $\sigma_{\rm ess}(h(p))$ оператора $h(p)$, $p\in\mathcal{T}^3$ совпадает с существенным спектром оператора $h_0(p)$, $p\in\mathcal{T}^3$. Известно, что $\sigma_{\rm ess}(h_0(p))=[m(p);M(p)]$, где числа $m(p)$ и $M(p)$ определяются по равенствам

$$m(p)=\min_{q\in\mathcal{T}^3}w(p,q),\quad M(p)=\max_{q\in\mathcal{T}^3}w(p,q).$$

Из последних двух фактов следует, что $\sigma_{\rm ess}(h(p))=[m(p);M(p)]$.

При каждом фиксированном $p\in\mathcal{T}^3$ определим функцию

$$\Delta(p;z)=\left(1-\int\frac{\varphi_1^2(s)ds}{w(p,s)-z}\right)\left(1+\int\frac{\varphi_2^2(s)ds}{w(p,s)-z}\right)+\left(\int\frac{\varphi_1(s)\varphi_2(s)ds}{w(p,s)-z}\right)^2$$

(детерминант Фредгольма, ассоциированный с оператором $h(p)$, $p\in\mathcal{T}^3$), регулярную в $\mathbb{C}\setminus[m(p);M(p)]$.

Установим связь между собственными значениями оператора $h(p)$, $p\in\mathcal{T}^3$ и нулями функции $\Delta(p;\,\cdot\,)$. Верна следующая

Лемма 2.1. *При каждом фиксированном $p\in\mathcal{T}^3$ число $z\in\mathbb{C}\setminus\sigma_{\rm ess}(h(p))$ является собственным значением оператора $h(p)$ тогда и только тогда, когда $\Delta(p;z)=0$.*

Доказательство. Пусть число $z\in\mathbb{C}\setminus\sigma_{\rm ess}(h(p))$ — собственное значение оператора $h(p)$, $p\in\mathcal{T}^3$ и пусть $f\in L_2(\mathcal{T}^3)$ — соответствующая собственная функция, т. е., уравнение

$$w(p,q)f(q)-\int[\varphi_1(q)\varphi_1(s)-\varphi_2(q)\varphi_2(s)]f(s)ds=zf(q)\tag{2}$$

имеет ненулевое решение $f\in L_2(\mathcal{T}^3)$.

Заметим, что для любых $z\in\mathbb{C}\setminus\sigma_{\rm ess}(h(p))$ и $q\in\mathcal{T}^3$ имеет место соотношение $w(p,q)-z\neq0$, $p\in\mathcal{T}^3$. Тогда из уравнения (2) для f имеем

$$f(q)=\frac{\varphi_1(q)C_1-\varphi_2(q)C_2}{w(p,q)-z},\tag{3}$$

где

$$C_i=\int\varphi_i(s)f(s)ds.\tag{4}$$

Подставляя выражение (3) для f в равенство (4), получим, что уравнение (2) имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда система уравнений

$$\left(1-\int\frac{\varphi_1^2(s)ds}{w(p,s)-z}\right)C_1+\int\frac{\varphi_1(s)\varphi_2(s)ds}{w(p,s)-z}\,C_2=0,$$

$$-\int \frac{\varphi_1(s)\varphi_2(s)ds}{w(p,s)-z}\, C_1 + \left(1 + \int \frac{\varphi_2^2(s)ds}{w(p,s)-z}\right) C_2 = 0$$

имеет ненулевое решение $(C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2$, т. е. когда $\Delta(p; z) = 0$. $\Box$

Из леммы 2.1 вытекает, что

$$\sigma(h(p)) = \sigma_{\text{disc}}(h(p)) \cup [m(p); M(p)], \tag{5}$$

где

$$\sigma_{\text{disc}}(h(p)) = \{z \in \mathbb{C} \setminus [m(p); M(p)] : \Delta(p\,; z) = 0\}, \quad p \in \mathcal{T}^3.$$

Для любого ограниченного самосопряжённого оператора A, действующего в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, обозначим через $\mathcal{H}_A(z)$ такое подпространство, что $(Af, f) < \lambda\|f\|$ для любого $f \in \mathcal{H}_A(z)$, и положим

$$N(\lambda, A) = \sup_{\mathcal{H}_A(z)} \dim \mathcal{H}_A(z).$$

Число $N(\lambda, A)$ равно бесконечности, если $\lambda > \min \sigma_{\text{ess}}(A)$, и если число $N(\lambda, A)$ конечно, то оно равно числу собственных значений оператора A (с учётом кратности), меньших чем λ.

Лемма 2.2. *Для любого $p \in \mathcal{T}^3$ оператор $h(p)$ имеет не более чем по одному простому собственному значению, лежащему левее $m(p)$ и правее $M(p)$.*

Доказательство. Сперва вводим оператор k_i, $i = 1, 2$, действующий в $L_2(\mathcal{T}^3)$ как

$$(k_i f)(q) = \varphi_i(q) \int \varphi_i(s) f(s) ds, \quad i = 1, 2.$$

Тогда оператор k можно записать в виде $k = k_1 - k_2$. Положим $h_1(p) = h_0(p) - k_1$. Так как оператор k_i $(i = 1, 2)$ неотрицательный, легко можно показать, что $h(p) \geqslant h_1(p)$ и, следовательно, $\mathcal{H}_{h(p)}(z) \subset \mathcal{H}_{h_1(p)}(z)$, $z \leqslant m(p)$. Это означает, что

$$N(z, h(p)) \leqslant N(z, h_1(p)), \quad z \leqslant m(p). \tag{6}$$

Так как определитель Фредгольма

$$\Delta_1(p; z) = 1 - \int \frac{\varphi_1^2(s)ds}{w(p,s)-z}$$

оператора $h_1(p)$ монотонно убывает на полуоси $(-\infty, m(p))$, имеем, что

$$N(m(p), h_1(p)) \leqslant 1,$$

следовательно, в силу неравенства (6) верно $N(m(p), h(p)) \leqslant 1$. По обозначению это означает, что для любого $p \in \mathcal{T}^3$ оператор $h(p)$ имеет не более чем одно простое собственное значение, лежащее левее $m(p)$.

Аналогично можно показать, что $n(-M(p), -h(p)) \leqslant 1$. $\Box$

3. Аналог уравнения Фаддеева для собственных функций оператора $\boldsymbol{H}$. В этом пункте получен аналог уравнения Фаддеева для собственных функций оператора H, который играет важную роль при исследовании спектра этого оператора. Часть построений и рассуждений в п. 3 и 4 аналогичны тем, что содержатся в работе [9], и в этом случае мы ограничились соответствующей ссылкой.

Положим
$$m=\min_{p,q\in\mathcal{T}^3} w(p,q),\quad M=\max_{p,q\in\mathcal{T}^3} w(p,q),$$
$$\sigma_{\rm two}(H)=\bigcup_{p\in\mathcal{T}^3}\sigma_{\rm disc}(h(p)),\quad \sigma_{\rm three}(H)=[m;M].$$

Пусть $L_2^{(2)}(\mathcal{T}^3)$ — гильбертово пространство двухкомпонентных вектор-функций $f=(f_1,f_2)$, $f_\alpha\in L_2(\mathcal{T}^3)$, $\alpha=1,2$. При каждом $z\in\mathbb{C}\setminus\sigma_{\rm three}(H)$ операторные матрицы $A(z)$ и $K(z)$ действуют в пространстве $L_2^{(2)}(\mathcal{T}^3)$ по формуле
$$A(z)=\begin{pmatrix} A_{11}(z) & A_{12}(z)\\ A_{21}(z) & A_{22}(z)\end{pmatrix}\quad \text{и}\quad K(z)=\begin{pmatrix} K_{11}(z) & K_{12}(z)\\ K_{21}(z) & K_{22}(z)\end{pmatrix},$$
где $A_{ij}(z):L_2(\mathcal{T}^3)\to L_2(\mathcal{T}^3)$, $i,j=1,2$, $z\in\mathbb{C}\setminus\sigma_{\rm three}(H)$ — оператор умножения на функцию $a_{ij}(p;z)$:
$$a_{11}(p;z)=1-\int\frac{\varphi_1^2(s)ds}{w(p,s)-z},\quad a_{22}(p;z)=1+\int\frac{\varphi_2^2(s)ds}{w(p,s)-z},$$
$$a_{12}(p;z)=-a_{21}(p\,;z)=\int\frac{\varphi_1(s)\varphi_2(s)ds}{w(p,s)-z},$$
а операторы $K_{ij}(z):L_2(\mathcal{T}^3)\to L_2(\mathcal{T}^3)$, $i,j=1,2$, $z\in\mathbb{C}\setminus\sigma_{\rm three}(H)$ — интегральные операторы с ядрами $K_{ij}(p,s;z)$:
$$K_{11}(p,s;z)=\frac{\varphi_1(p)\varphi_1(s)}{w(p,s)-z},\quad K_{12}(p,s;z)=-\frac{\varphi_1(s)\varphi_2(q)}{w(p,s)-z},$$
$$K_{21}(p,s;z)\equiv -K_{12}(s,p;z)\quad K_{22}(p,s;z)=-\frac{\varphi_2(p)\varphi_2(s)}{w(p,s)-z}.$$

Заметим, что при каждом $z\in\mathbb{C}\setminus\sigma_{\rm three}(H)$ операторы $K_{ij}(z)$ $(i,j=1,2)$ принадлежат классу Гильберта—Шмидта, следовательно, $K(z)$ является компактным оператором.

Лемма 3.1. *При каждом $z\in\mathbb{C}\setminus(\sigma_{\rm two}(H)\cup\sigma_{\rm three}(H))$ оператор $A(z)$ является ограниченным, обратимым; обратный оператор $A^{-1}(z)$ определён по формуле*
$$A^{-1}(z)=\begin{pmatrix} B_{11}(z) & B_{12}(z)\\ B_{21}(z) & B_{22}(z)\end{pmatrix},$$
где $B_{ij}(z):L_2(\mathcal{T}^3)\to L_2(\mathcal{T}^3)$, $i,j=1,2$, $z\in\mathbb{C}\setminus(\sigma_{\rm two}(H)\cup\sigma_{\rm three}(H))$ — оператор умножения на функцию $b_{ij}(p;z)$:
$$b_{11}(p;z)=\frac{a_{22}(p;z)}{\Delta(p;z)},\quad b_{12}(p;z)=-\frac{a_{12}(p;z)}{\Delta(p;z)},$$

$$b_{21}(p;z) = -\frac{a_{21}(p;z)}{\Delta(p;z)}, \quad b_{22}(p;z) = \frac{a_{11}(p;z)}{\Delta(p;z)}.$$

Лемма 3.1 доказывается аналогично соответствующей лемме из работы [9].

Так как при каждом $z \in \mathbb{C} \setminus (\sigma_{\text{two}}(H) \cup \sigma_{\text{three}}(H))$ оператор $A(z)$ обратим, то для таких z мы определим оператор вида $T(z) = A^{-1}(z)K(z)$.

Следующая лемма устанавливает связь между собственными значениями операторов H и $T(z)$.

Лемма 3.2. *Число $z \in \mathbb{C} \setminus (\sigma_{\text{two}}(H) \cup \sigma_{\text{three}}(H))$ является собственным значением оператора H тогда и только тогда, когда оператор $T(z)$ имеет собственное значение, равное единице, и их кратности совпадают.*

Доказательство. Пусть $z \in \mathbb{C} \setminus (\sigma_{\text{two}}(H) \cup \sigma_{\text{three}}(H))$ — собственное значение оператора H и $f \in L_2^{\mathrm{s}}((\mathcal{T}^3)^2)$ — соответствующая собственная функция, т. е. уравнение $Hf = zf$ или уравнение

$$(w(p,q) - z)f(p,q) - \int [\varphi_1(q)\varphi_1(s) - \varphi_2(q)\varphi_2(s)]f(p,s)ds - \\ - \int [\varphi_1(p)\varphi_1(s) - \varphi_2(p)\varphi_2(s)]f(s,q)ds = 0 \quad (7)$$

имеет нетривиальное решение $f \in L_2^{\mathrm{s}}((\mathcal{T}^3)^2)$.

Так как $z \notin \sigma_{\text{three}}(H)$, из уравнения (7) для f имеем:

$$f(p,q) = \frac{\varphi_1(q)g_1(p) - \varphi_2(q)g_2(p) + \varphi_1(p)g_1(q) - \varphi_2(p)g_2(q)}{w(p,q) - z}, \quad (8)$$

где

$$g_i(p) = \int \varphi_i(s)f(p,s)ds, \quad i = 1,2. \quad (9)$$

Подставляя выражение (8) для f в равенство (9), получим, что система уравнений

$$a_{11}(p;z)g_1(p) + a_{12}(p;z)g_2(p) = \varphi_1(p)\int \frac{\varphi_1(s)g_1(s)}{w(p,s) - z}ds - \varphi_2(p)\int \frac{\varphi_1(s)g_2(s)}{w(p,s) - z}ds;$$

$$a_{21}(p;z)g_1(p) + a_{22}(p;z)g_2(p) = \varphi_1(p)\int \frac{\varphi_2(s)g_1(s)}{w(p,s) - z}ds - \varphi_2(p)\int \frac{\varphi_2(s)g_2(s)}{w(p,s) - z}ds$$

или уравнение

$$A(z)g = K(z)g, \quad g = (g_1, g_2) \in L_2^{(2)}(\mathcal{T}^3) \quad (10)$$

имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда уравнение (10) имеет нетривиальное решение и линейные подпространства, порождённые решениями уравнений (7) и (10), имеют одинаковые размерности.

По лемме 3.1 при каждом $z \in \mathbb{C} \setminus (\sigma_{\text{two}}(H) \cup \sigma_{\text{three}}(H))$ оператор $A(z)$ обратим и, следовательно, уравнение $g = A^{-1}(z)K(z)g$, т. е. уравнение $g = T(z)g$, имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда уравнение (10) имеет нетривиальное решение. Здесь также линейные подпространства, порождённые решениями уравнений (10) и $g = T(z)g$, имеют одинаковые размерности. $\square$

Замечание 3.1. Заметим, что уравнение $T(z)g = g$ обычно называется аналогом уравнения Фаддеева для собственных функций оператора H.

Видно, что при каждом $z < \min(\sigma_{\text{two}}(H) \cup \sigma_{\text{three}}(H))$ оператор $A(z)$ является положительным и, следовательно, существует его положительный квадратный корень $A^{-\frac{1}{2}}(z)$. Для таких z определим оператор $\hat{T}(z) = A^{-\frac{1}{2}}(z)K(z)\times \times A^{-\frac{1}{2}}(z)$, являющийся симметризованным вариантом уравнения Фаддеева для собственных функций оператора H.

Следующая лемма доказывается аналогично лемме 3.2 и устанавливает связь между собственными значениями операторов H и $\hat{T}(z)$.

Лемма 3.3. *Число $z < \min(\sigma_{\text{two}}(H) \cup \sigma_{\text{three}}(H))$ является собственным значением оператора H тогда и только тогда, когда оператор $\hat{T}(z)$ имеет собственное значение, равное единице, и их кратности совпадают.*

4. Существенный спектр оператора $\boldsymbol{H}$. В этом пункте, пользуясь утверждениями п. 2 и 3, а также критерием Вейля и теоремой о спектре разложимых операторов, докажем теорему, которая описывает местоположение существенного спектра оператора H.

Теорема 4.1. *Для существенного спектра $\sigma_{\text{ess}}(H)$ оператора H имеет место равенство*

$$\sigma_{\text{ess}}(H) = \bigcup_{p\in\mathcal{T}^3} \sigma_{\text{disc}}(h(p)) \cup [m; M]. \tag{11}$$

Более того, множество $\sigma_{\text{ess}}(H)$ состоит из объединения не более чем трёх отрезков.

Доказательство. Сначала докажем равенство (11). Включение $\sigma_{\text{three}}(H) \subset \sigma_{\text{ess}}(H)$ доказывается аналогично доказанному в работе [10].

Докажем, что $\sigma_{\text{two}}(H) \subset \sigma_{\text{ess}}(H)$. Пусть $z_0 \in \sigma_{\text{two}}(H)$ — произвольная точка. Возможны два случая: 1) $z_0 \in \sigma_{\text{three}}(H)$, 2) $z_0 \notin \sigma_{\text{three}}(H)$. Если $z_0 \in \sigma_{\text{three}}(H)$, то, как отмечено выше, $z_0 \in \sigma_{\text{ess}}(H)$. Пусть $z_0 \in \sigma_{\text{two}}(H) \setminus \sigma_{\text{three}}(H)$ — произвольная точка. Тогда существует точка $p_0 \in \mathcal{T}^3$ такая, что $\Delta(p_0; z_0) = 0$. Отсюда следует, что система однородных линейных уравнений

$$a_{11}(p; z)l_1 + a_{12}(p; z)l_2 = 0, \quad a_{21}(p; z)l_1 + a_{22}(p; z)l_2 = 0 \tag{12}$$

имеет бесконечное число решений в $\mathbb{C}^2$. Легко можно проверить, что существует ненулевое решение $l = (l_1, l_2) \in \mathbb{C}^2$ системы (12), удовлетворяющее следующему условию: $\Delta(p_0; z_0) = 0$ и функция $l_1\varphi_1(\,\cdot\,) - l_2\varphi_2(\,\cdot\,)$ отлична от нуля.

Систему уравнений (12) можно записать в виде

$$A(p_0; z_0)l = 0, \quad l = (l_1, l_2) \in \mathbb{C}^2. \tag{13}$$

Пусть

$$V_n(p_0) = \left\{p \in \mathcal{T}^3 : \frac{1}{n+1} < \|p - p_0\| < \frac{1}{n}\right\}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$\chi_{V_n(p_0)}(\cdot)$ — характеристическая функция множества $V_n(p_0)$ и $\mu(V_n(p_0))$ — Лебегова мера множества $V_n(p_0)$.

Выбираем ортогональную систему $\{\tilde{f}_n\}$ следующим образом:

$$\tilde{f}_n(p,q) = \frac{\varphi_1(p)\psi_1^{(n)}(q) + \varphi_1(q)\psi_1^{(n)}(p) - \varphi_2(p)\psi_2^{(n)}(q) - \varphi_2(q)\psi_2^{(n)}(p)}{w(p,q) - z_0},$$

где

$$\psi_i^{(n)}(p) = l_i c_n(p)\chi_{V_n}(p)(\mu(V_n(p_0)))^{-1/2}, \quad i = 1, 2.$$

Здесь $\{c_n\} \subset L_2(\mathcal{T}^3)$ — ортонормальная система, которая находится из условия ортогональности $\{\tilde{f}_n\}$, т. е.

$$(\tilde{f}_n, \tilde{f}_m) = \frac{2}{\sqrt{\mu(V_n(p_0))}\sqrt{\mu(V_m(p_0))}} \int_{V_n(p_0)} \int_{V_m(p_0)} c_n(p) c_m(q) \times$$
$$\times \frac{l_1^2\varphi_1(p)\varphi_1(q) - 2l_1l_2\varphi_1(p)\varphi_2(q) + l_2^2\varphi_2(p)\varphi_2(q)}{(w(p,q) - z_0)^2} dpdq = 0,\ n \neq m. \quad (14)$$

Существование $c_n(p)$ вытекает из следующего предложения.

Лемма 4.1. *Существует ортонормальная система* $\{c_n\} \subset L_2(\mathcal{T}^3)$, *удовлетворяющая условиям* $\operatorname{supp} c_n \subset V_n(p_0)$ *и* (14).

Лемма 4.1 доказывается аналогично соответствующему предложению из работы [9].

Легко можно проверить, что

$$\|\tilde{f}_n\|^2 \geqslant \frac{M}{\mu(V_n(p_0))}, \quad M = \frac{4\|l_1\varphi_1 - l_2\varphi_2\|^2}{\max\limits_{p,q\in\mathcal{T}^3} |w(p,q) - z_0|^2}, \quad (15)$$

при всех $n \in \mathbb{N}$.

Положим $f_n = \tilde{f}_n / \|\tilde{f}_n\|_{L_2^{\mathrm{s}}((\mathcal{T}^3)^2)}$. Очевидно, что $\{f_n\}$ — ортонормальная система.

Рассмотрим $(H - z_0)f_n$ и оценим его норму:

$$\|(H - z_0)f_n\|_{L_2^{\mathrm{s}}((\mathcal{T}^3)^2)} \leqslant \|A(z_0)\psi^{(n)}\|_{L_2^{(2)}(\mathcal{T}^3)} + \|K(z_0)\psi^{(n)}\|_{L_2^{(2)}(\mathcal{T}^3)},$$

где

$$\psi^{(n)} = \left(\frac{\psi_1^{(n)}}{\|f_n\|_{L_2^{\mathrm{s}}((\mathcal{T}^3)^2)}}, \frac{\psi_2^{(n)}}{\|f_n\|_{L_2^{\mathrm{s}}((\mathcal{T}^3)^2)}} \right).$$

Из определения $\psi^{(n)}$ и неравенства (15) вытекает, что

$$\|\psi^{(n)}\|_{L_2^{(2)}(\mathcal{T}^3)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{M}} \|l\|_{\mathbb{C}^2}^2. \quad (16)$$

Так как для любых $n \neq m$ носители функции $\psi^{(n)}$ не пересекаются, из неравенства (16) следует, что $\{\psi^{(n)}\} \subset L_2^{(2)}(\mathcal{T}^3)$ — ограниченная ортогональная система.

Из компактности оператора $K(z_0)$ вытекает, что

$$\|K(z_0)\psi^{(n)}\|_{L_2^{(2)}(\mathcal{T}^3)} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Далее оценим $\|A(z_0)\psi^{(n)}\|_{L_2^{(2)}(\mathcal{T}^3)}$. Используя неравенство Шварца, получим

$$\|A(z_0)\psi^{(n)}\|^2_{L_2^{(2)}(\mathcal{T}^3)} \leqslant C \sup_{p\in V_n(p_0)} \|A(p;z_0)l\|^2_{\mathbb{C}^2}\,.$$

Из непрерывности функции $A(\,\cdot\,;z_0)$ на $\mathcal{T}^3$ и из равенства (13) следует, что

$$\sup_{p\in V_n(p_0)} \|A(p;z_0)l\|_{\mathbb{C}^2} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Таким образом, для ортонормальной последовательности $\{f_n\}$ верно

$$\|(H-z_0)f_n\|_{L_2^{\mathrm{s}}((\mathcal{T}^3)^2)} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

и, следовательно, в силу критерия Вейля справедливо $z_0 \in \sigma_{\mathrm{ess}}(H)$. Из произвольности точки $z_0 \in \sigma_{\mathrm{two}}(H)$ следует, что $\sigma_{\mathrm{two}}(H) \subset \sigma_{\mathrm{ess}}(H)$. Итак, мы доказали включение $\sigma_{two}(H) \cup \sigma_{\mathrm{three}}(H) \subset \sigma_{\mathrm{ess}}(H)$.

После того как мы получили компактное уравнение Фаддеева для собственной функции (см. п. 3), обратное включение $\sigma_{\mathrm{ess}}(H) \subset \sigma_{\mathrm{two}}(H)\cup\sigma_{\mathrm{three}}(H)$ следует из общей теории Фредгольма [1] (см. также [6, 7, 9]).

В силу леммы 2.2 для любого $p \in \mathcal{T}^3$ оператор $h(p)$ имеет не более чем одно простое собственное значение, лежащее левее m и правее M. Тогда в силу теоремы о спектре разложимых операторов из равенства (1) вытекает, что множество $\sigma_{\mathrm{two}}(H)$ состоит из объединения не более чем двух отрезков, следовательно, множество $\sigma_{\mathrm{ess}}(H)$ состоит из объединения не более чем трёх отрезков. $\square$

Введём новые подмножества существенного спектра оператора H.

Определение 4.1. Множества $\sigma_{\mathrm{two}}(H)$ и $\sigma_{\mathrm{three}}(H)$ называются соответственно двухчастичной и трёхчастичной ветвями существенного спектра оператора H.

Замечание 4.1. Отметим, что множество $\sigma_{\mathrm{two}}(H)$ состоит из объединения не более чем двух отрезков, которые расположены в обеих частях множества $\sigma_{\mathrm{three}}(H)$ (см. доказательство теоремы 4.1).

Работа поддержана Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG), грант № TR368/6-1.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 4: Анализ операторов. М.: Мир, 1982. 430 с. [*Reed M., Simon B.* Methods of modern mathematical physics. Vol. IV: Analysis of operators. Moscow: Mir, 1982. 430 pp.]
2. *Жислин Г. М* Исследование спектра оператора Шрёдингера для системы многих частиц // *Труды Моск. матем. об-ва*, 1960. Т. 9. С. 81–120. [*Zhislin G. M.* Discussion of the spectrum of the Schrödinger operator for systems of many particles // *Trudy Moskov. Mat. Obshch.*, 1960. Vol. 9. Pp. 81–120].
3. *Hunziker W.* On the spectra of Schrödinger multi-particle Hamiltonians // *Helv. Phys. Acta*, 1966. Vol. 39. Pp. 451–462.

4. *Albeverio S., Lakaev S. N., Muminov Z. I.* Schrödinger operators on lattices. The Efimov effect and discrete spectrum asymptotics // *Ann. Inst. Henri Poincare*, 2004. Vol. 5, no. 4. Pp. 743–772.
5. *Albeverio S., Lakaev S. N., Muminov Z. I.* On the structure of the essential spectrum for the three-particle Schrödinger operators on lattices // *Math. Nachr.*, 2007. Vol. 280, no. 7. Pp. 699–716.
6. *Albeverio S., Lakaev S. N., Muminov Z. I.* On the number of eigenvalues of a model operator associated to a system of three-particles on lattices // *Russ. J. Math. Phys.*, 2007. Vol. 1, no. 4. Pp. 377–387.
7. *Albeverio S., Lakaev S. N., Djumanova R. Kh.* The essential and discrete spectrum of a model operator associated to a system of three identical quantum particles // *Rep. Math. Phys.*, 2009. Vol. 63, no. 3. Pp. 359–380.
8. *Расулов Т. Х.* Асимптотика дискретного спектра одного модельного оператора, ассоциированного с системой трёх частиц на решётке // *ТМФ*, 2010. Т. 163, № 1. С. 34–44; англ. пер.: *Rasulov T. Kh.* Asymptotics of the discrete spectrum of a model operator associated with a system of three particles on a lattice // *Theoret. and Math. Phys.*, 2010. Vol. 163, no. 1. Pp. 429–437.
9. *Расулов Т. Х.* Уравнение Фаддеева и местоположение существенного спектра модельного оператора нескольких частиц // *Изв. вузов. Матем.*, 2008. № 12. С. 59–69; англ. пер.: *Rasulov T. Kh.* The Faddeev equation and the location of the essential spectrum of a model multi-particle operator // *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2008. Vol. 52, no. 12. Pp. 50–59.
10. *Эшкабилов Ю. Х.* Об одном дискретном “трёхчастичном” операторе Шрёдингера в модели Хаббарда // *ТМФ*, 2006. Т. 149, № 2. С. 228–243; англ. пер.: *Eshkabilov Yu. Kh.* A discrete “three-particle” Schrödinger operator in the Hubbard model // *Theoret. and Math. Phys.*, 2006. Vol. 149, no. 2. Pp. 1497–1511.

Поступила в редакцию 03/V/2010;
в окончательном варианте — 07/VII/2011.

MSC: 81Q10; 35P20, 47N50

ON THE ESSENTIAL SPECTRUM OF A MODEL OPERATOR ASSOCIATED WITH THE SYSTEM OF THREE PARTICLES ON A LATTICE

T. Kh. Rasulov[1,2]

[1] Bukhara State University, Physics and Mathematics Faculty,
11, Muhammad Ikbol, Bukhara, 200100, Uzbekistan.
[2] University of Bern, Faculty of Sciences,
5, Sidlerstrasse, Bern, CH-3012, Switzerland.

E-mail: rth@mail.ru

A model operator H associated with the system of three-identical particles on a lattice $\mathbb{Z}^3$ is considered. The location of the essential spectrum of H is described by the spectrum of the corresponding Friedrichs model, that is, the two-particle and three-particle branches of the essential spectrum of H are singled out. It is proved that the essential spectrum of H consists of no more than three bounded closed intervals. An appearance of two-particle branches on the both sides of the three-particle branch is shown. Moreover, we obtain an analogue of the Faddeev equation and its symmetric version, for the eigenfunctions of H.

Key words: *model operator, Friedrichs model, Hilbert–Schmidt class, Faddeev equation, essential spectrum.*

Original article submitted 03/V/2010;
revision submitted 07/VII/2011.

Tulkin Kh. Rasulov (Ph. D. (Phys. & Math.)), Associate Professor, Dept. of Algebra and Analysis[1]; Doctoral Candidate, Mathematical Institute[2].