Краткие сообщения

Дифференциальные уравнения

УДК 517.956.3

ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В СЛУЧАЕ ХАРАКТЕРИСТИК С УГЛОВЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ОДНОГО ЗНАКА

Е. А. Козлова

Самарский государственный технический университет,
443100, Россия, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mail: `leni2006@mail.ru`

Рассмотрена задача граничного управления для гиперболического уравнения, характеристики которого имеют угловые коэффициенты одного знака. В явном виде построены управляющие функции. Для различных промежутков времени получены условия, при которых управление возможно.

Ключевые слова: *гиперболическое уравнение, граничное управление, задача Коши.*

Постановка задачи. Пусть задано уравнение в частных производных

$$u_{tt} + 2bu_{xt} + cu_{xx} = 0, \tag{1}$$

где постоянные b, c удовлетворяют соотношению $b^2 - c > 0$. В этом случае уравнение (1) является гиперболическим [1] и имеет два семейства характеристик:

$$x - (b - \sqrt{b^2 - c})t = C_1 \quad \text{и} \quad x - (b + \sqrt{b^2 - c})t = C_2.$$

Обозначим $k_1 = b - \sqrt{b^2 - c}$, $k_2 = b + \sqrt{b^2 - c}$. Далее будем считать, что $k_2 > k_1 > 0$, то есть характеристики имеют угловые коэффициенты одного знака. Зададим для уравнения (1) начальные условия

$$u(x,0) = \varphi_0(x), \quad u_t(x,0) = \psi_0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{2}$$

и финальные условия

$$u(x,T) = \varphi_1(x), \quad u_t(x,T) = \psi_1(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \tag{3}$$

Необходимо построить в прямоугольнике $Q = [0,l] \times [0,T]$ решение рассматриваемой задачи (1)–(3) и выписать в явном виде граничные управления

$$\mu(t) = u(0,t), \quad \nu(t) = u(l,t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{4}$$

Елена Александровна Козлова, аспирант, каф. прикладной математики и информатики.

Уравнение (1) описывает малые колебания гибкого стержня [2]. Рассматриваемая задача граничного управления была исследована в работах [3, 4] для волнового уравнения ($b = 0$, $c = 1$).

Решение задачи управления. Пусть $\gamma = (k_2 - k_1)^{-1}$. Прямые $t = 0$, $t = T$ и характеристики $x - k_1 t = -k_1 T$, $x - k_2 t = l - k_2 T$, $x - k_2 t = 0$, $x - k_1 t = l$ образуют две треугольные области $\Delta_1 = \{k_2 t \leqslant x \leqslant k_1 t + l, 0 \leqslant t \leqslant l\gamma\}$ и $\Delta_2 = \{-k_1(T - t) \leqslant \leqslant x \leqslant l - k_2(T - t), T - l\gamma \leqslant t \leqslant T\}$. При $T \leqslant l/k_2$ верно $Q \subset \Delta_1 \cup \Delta_2$, поэтому достаточно построить $u(x, t)$ в двух данных областях, чтобы найти $\mu(t)$ и $\nu(t)$.

В треугольнике Δ_1 задача Коши (1), (2) имеет следующее решение:

$$u(x,t) = \gamma\Big(k_2\varphi_0(x - k_1 t) - k_1\varphi_0(x - k_2 t) + \int_{x-k_2 t}^{x-k_1 t} \psi_0(z)dz\Big). \tag{5}$$

В области Δ_2 решением задачи (1), (3) является функция

$$u(x,t) = \gamma\Big(k_2\varphi_1(x + k_1(T - t)) - k_1\varphi_1(x + k_2(T - t)) - \int_{x+k_1(T-t)}^{x+k_2(T-t)} \psi_1(z)dz\Big). \tag{6}$$

Следует заметить, что при любом T задача (1)–(3) будет иметь решение только для таких начальных и финальных данных, которые удовлетворяют некоторым условиям. Наличие этого ограничения связано с тем, что неизвестная функция $u(x, t)$ должна принимать на двух параллельных характеристиках $x - k_2 t = 0$ и $x - k_2 t = l - k_2 T$ значения, определенные (5), (6) при соответствующих подстановках. Вид решения поставленной задачи и условия его существования зависят от величины T. Рассмотрим следующие случаи: $T \leqslant l/k_2$, $l/k_2 < T \leqslant l/k_1$ и $T > l/k_1$.

Пусть время управления мало: $T \leqslant \frac{l}{k_2}$. Области Δ_1 и Δ_2 имеют общую часть, в которой решения задачи (1), (2) и задачи (1), (3) должны совпадать, чтобы управление было возможным. Тогда функции $\mu(t)$ и $\nu(t)$ (4) существуют, если при $k_2 T \leqslant x \leqslant l$ выполняются условия

$$\varphi_1(x) = \gamma\Big(k_2\varphi_0(x - k_1 T) - k_1\varphi_0(x - k_2 T) + \int_{x-k_2 T}^{x-k_1 T} \psi_0(z)dz\Big),$$

$$\psi_1(x) = \gamma\Big(-k_1 k_2\varphi_0'(x - k_1 T) + k_1 k_2\varphi_0'(x - k_2 T) - k_1\psi_0(x - k_1 T) + k_2\psi_0(x - k_2 T)\Big),$$

а при $0 \leqslant x \leqslant (k_2 - k_1)T$ —

$$k_2\varphi_0(x) - k_1\varphi_0(0) + \int_0^x \psi_0(z)dz = k_2\varphi_1(x + k_1 T) - k_1\varphi_1(k_2 T) - \int_{x+k_1 T}^{k_2 T} \psi_1(z)dz.$$

Теперь достаточно воспользоваться формулами (5) и (6), чтобы найти $u(x, t)$ во всей области Q и построить граничные управления:

$$\mu(t) = \gamma\Big(k_2\varphi_1(k_1(T - t)) - k_1\varphi_1(k_2(T - t)) - \int_{k_1(T-t)}^{k_2(T-t)} \psi_1(z)dz\Big), \tag{7}$$

$$\nu(t) = \gamma\Big(k_2\varphi_0(l - k_1 t) - k_1\varphi_0(l - k_2 t) + \int_{l-k_2 t}^{l-k_1 t} \psi_0(z)dz\Big). \tag{8}$$

Для времени $l/k_2 < T \leqslant l/k_1$ данных (2), (3) недостаточно для определения $u(x, t)$. Продолжим начальные условия (2) на интервал $[l - k_2 T, 0)$:

$$u(x,0) = \begin{cases} \tilde{\varphi}_0(x), & l - k_2 T \leqslant x < 0, \\ \varphi_0(x), & 0 \leqslant x \leqslant l, \end{cases} \qquad u_t(x,0) = \begin{cases} \tilde{\psi}_0(x), & l - k_2 T \leqslant x < 0, \\ \psi_0(x), & 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

Это позволит в расширенной области $\widetilde{\Delta}_1 = \{k_2(T-t)+l \leqslant x \leqslant k_1 t + l, 0 \leqslant t \leqslant$ $\leqslant k_2T/(k_1+k_2)\}$ построить решение задачи Коши и найти $u(x,t)$ в Q. Введём две вспомогательные функции:

$$F(x) = -\gamma\biggl(k_1\tilde{\varphi}_0(x) + \int_x^0 \tilde{\psi}_0(z)dz\biggr), \quad G(x) = \gamma\biggl(k_2\tilde{\varphi}_0(x) - \int_x^0 \tilde{\psi}_0(z)dz\biggr).$$

Условия разрешимости задачи управления в данном случае имеют вид

$$G(x) + F(l-k_2T) = \gamma\biggl(k_2\varphi_1(x+k_1T) - k_1\varphi_1(l) - \int_{x+k_1T}^{l} \psi_1(z)dz\biggr) \tag{9}$$

для $(l-k_2T)k_1/k_2 \leqslant x < 0$ и

$$k_2\varphi_0(x) + \int_0^x \psi_0(z)dz + (k_2-k_1)F(l-k_2T) = k_2\varphi_1(x+k_1T) - k_1\varphi_1(l) - \int_{x+k_1T}^{l} \psi_1(z)dz$$

для $0 \leqslant x \leqslant l - k_1T$. Подставляя в (5), (6) $x=0$ и $x=l$, получаем, что управления $\mu(t)$ при $T - l/k_2 \leqslant t \leqslant T$ и $\nu(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant l/k_2$ определяются формулами (7) и (8) соответственно, а на оставшейся части отрезка $[0,T]$ представляются выражениями

$$\mu(t) = G(-k_1t) + F(-k_2t), \qquad 0 \leqslant t < T - l/k_2, \tag{10}$$

$$\nu(t) = \gamma\biggl(k_2\varphi_0(l-k_1t) + \int_0^{l-k_1t} \psi_0(z)dz\biggr) + F(l-k_2t), \qquad l/k_2 < t \leqslant T. \tag{11}$$

Для времени $T > l/k_1$ задача решается, как и в предыдущем случае, с помощью продолжения начальных условий на промежуток $[l-k_2T, 0)$. Условие разрешимости имеет вид (9) для $(l-k_2T)k_1/k_2 \leqslant x \leqslant l - k_1T$, управляющая функция на левом конце определяется формулами (7), (10), а на правом — формулами (8) при $0 \leqslant t \leqslant l/k_2$, (11) при $l/k_2 < t \leqslant l/k_1$ и имеет вид

$$\nu(t) = G(l-k_1t) + F(l-k_2t)$$

при $l/k_1 < t \leqslant T$.

Задача о приведении в наперед заданное состояние первоначально покоящегося объекта. Важными частными случаями задачи управления (1)–(3) являются задача об успокоении и задача о приведении в наперед заданное состояние первоначально покоящегося объекта. Для обеих задач можно воспользоваться приведенными выше результатами, положив $\varphi_1(x) = 0$, $\psi_1(x) = 0$ в первом случае и $\varphi_0(x) = 0$, $\psi_0(x) = 0$ — во втором, но для задачи о приведении в наперед заданное состояние из состояния покоя более естественным является другой подход: для достаточно больших T продолжать не начальные, а финальные условия.

Приведём полученные результаты. При $T \leqslant l/k_2$ имеют место следующие условия разрешимости:

$$\begin{aligned} &\varphi_1(x) = 0, \quad \psi_1(x) = 0, && k_2T \leqslant x \leqslant l, \\ &k_2\varphi_1(x+k_1T) - \int_{x+k_1T}^{k_2T} \psi_1(z)dz = 0, && 0 < x \leqslant k_2T - k_1T. \end{aligned}$$

При их выполнении граничное управление на левом конце определяется (7), а на правом оно равно нулю.

Далее, при $l/k_2 < T \leqslant l/k_1$ продолжаем финальные условия непрерывно на промежуток $(l, k_2T]$:

$$u(x,T) = \begin{cases} \varphi_1(x), & 0 \leqslant x \leqslant l, \\ \tilde{\varphi}_1(x), & l < x \leqslant k_2T, \end{cases} \qquad u_t(x,T) = \begin{cases} \psi_1(x), & 0 \leqslant x \leqslant l, \\ \tilde{\psi}_1(x), & l < x \leqslant k_2T. \end{cases}$$

Вводим вспомогательные функции

$$F_1(x) = -\gamma\Big(k_1\tilde{\varphi}_1(x) - \int_l^x \tilde{\psi}_1(z)dz\Big), \quad G_1(x) = \gamma\Big(k_2\tilde{\varphi}_1(x) + \int_l^x \tilde{\psi}_1(z)dz\Big).$$

Получаем условие управления для $0 \leqslant x \leqslant (1 - k_1/k_2)l$:

$$k_2\varphi_1(x + k_1T) - k_1\varphi_1(k_2T) - \int_{x+k_1T}^{k_2T} \psi_1(z)dz = 0. \tag{12}$$

Управляющая функция $\mu(t)$ при $0 \leqslant t < T - l/k_2$ определяется соотношением

$$\mu(t) = \gamma\Big(k_2\varphi_1(k_1(T-t)) - \int_{k_1(T-t)}^{l} \psi_1(z)dz\Big) + F_1(k_2(T-t)), \tag{13}$$

а при $T - l/k_2 \leqslant t \leqslant T$ — формулой (7); $\nu(t) = 0$ при $0 \leqslant t \leqslant l/k_2$,

$$\nu(t) = G_1(l + k_1(T-t)) + F_1(l + k_2(T-t)) \tag{14}$$

при $l/k_2 < t \leqslant T$.

Для большого $T > l/k_1$ условием разрешимости является равенство (12) при $0 \leqslant x \leqslant (1 - k_1/k_2)l$, управление на левом конце при $0 \leqslant t < T - l/k_1$ имеет вид

$$\mu(t) = G_1(k_1(T-t)) + F_1(k_2(T-t)),$$

при $T - l/k_1 < t \leqslant T - l/k_2$ оно определяется (7), а при $T - l/k_2 \leqslant t \leqslant T$ — (13). Управление на правом конце равно нулю при $0 \leqslant t \leqslant l/k_2$ и (14) при $l/k_2 < t \leqslant T$.

Заключение. В настоящей работе задача управления (1)–(3) решена для любого времени T, получены условия, при которых рассматриваемое управление возможно, функции $\mu(t)$ и $\nu(t)$ построены в явном виде. Для решения задачи в случае большого T введены продолжения начальных условий (2) на необходимый интервал и определены соотношения, которым должны удовлетворять данные функции.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с. [*Bitsadze A. V.* Some classes of partial differential equations. Moscow: Nauka, 1981. 448 pp.]
2. *Светлицкий В. А.* Механика гибких стержней и нитей. М.: Машиностроение, 1978. 224 с. [*Svetlitskii V. A.* Mechanics of Flexible Rods and Filaments. Moscow: Mashinostroenie, 1978. 224 pp.]
3. *Ильин В. А.* Волновое уравнение с граничным управлением на двух концах за произвольный промежуток времени // *Дифференц. уравнения*, 1999. Т. 35, № 11. С. 1517–1534; англ. пер.: *Il'in V. A.* A wave equation with a bounded control on two ends for an arbitrary time interval // *Differ. Equ.*, 1999. Vol. 35, no. 11. Pp. 1535–1552.
4. *Ильин В. А.* Граничное управление процессом колебаний на двух концах в терминах обобщённого решения волнового уравнения с конечной энергией // *Дифференц. уравнения*, 2000. Т. 36, № 11. С. 1513–1528; англ. пер.: *Il'in V. A.* Boundary control of oscillations on two ends in terms of the generalized solution of the wave equation with finite energy // *Differ. Equ.*, 2000. Vol. 36, no. 11. Pp. 1659–1675.

Поступила в редакцию 19/XII/2011;
в окончательном варианте — 19/II/2012.

MSC: 35L51; 93C20, 35B37

CONTROL PROBLEM FOR THE HYPERBOLIC EQUATION WITH THE CHARACTERISTICS HAVING THE ANGULAR COEFFICIENTS OF THE SAME SIGN

E. A. Kozlova

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia.

E-mail: leni2006@mail.ru

The boundary control problem for the hyperbolic equation is considered for the case, when the angular coefficients of characteristics have the same sign. The control functions are constructed in an explicit form. The conditions of controllability are found for different periods of control.

Key words: *hyperbolic equation, boundary control, Cauchy problem.*

Original article submitted 19/XII/2011;
revision submitted 19/II/2012.

Elena A. Kozlova, Postgraduate Student, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science.

УДК 517.956

АНАЛОГ ФОРМУЛЫ ДАЛАМБЕРА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С НЕКРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Ю. О. Яковлева

Самарский государственный технический университет,
443100, Россия, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mail: julia.yakovleva@mail.ru

Для дифференциального уравнения третьего порядка гиперболического типа с некратными характеристиками рассмотрена задача Коши. Получено решение, являющееся аналогом формулы Даламбера, позволяющее описать процесс распространения начального отклонения, начальной скорости и начального ускорения некоторой колебательной системы.

Ключевые слова: *гиперболическое дифференциальное уравнение третьего порядка, некратные характеристики, задача Коши, формула Даламбера.*

Целью данной работы является построение решения задачи Коши для одного дифференциального уравнения гиперболического типа третьего порядка во всей плоскости (x, y).

Рассмотрим гиперболическое дифференциальное уравнение третьего порядка

$$u_{xxy} - u_{xyy} = 0. \tag{1}$$

Юлия Олеговна Яковлева, аспирант, каф. прикладной математики и информатики.