MSC: 35L51; 93C20, 35B37

CONTROL PROBLEM FOR THE HYPERBOLIC EQUATION WITH THE CHARACTERISTICS HAVING THE ANGULAR COEFFICIENTS OF THE SAME SIGN

E. A. Kozlova

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia.

E-mail: leni2006@mail.ru

The boundary control problem for the hyperbolic equation is considered for the case, when the angular coefficients of characteristics have the same sign. The control functions are constructed in an explicit form. The conditions of controllability are found for different periods of control.

Key words: *hyperbolic equation, boundary control, Cauchy problem.*

Original article submitted 19/XII/2011;
revision submitted 19/II/2012.

Elena A. Kozlova, Postgraduate Student, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science.

УДК 517.956

АНАЛОГ ФОРМУЛЫ ДАЛАМБЕРА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С НЕКРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Ю. О. Яковлева

Самарский государственный технический университет,
443100, Россия, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mail: julia.yakovleva@mail.ru

Для дифференциального уравнения третьего порядка гиперболического типа с некратными характеристиками рассмотрена задача Коши. Получено решение, являющееся аналогом формулы Даламбера, позволяющее описать процесс распространения начального отклонения, начальной скорости и начального ускорения некоторой колебательной системы.

Ключевые слова: *гиперболическое дифференциальное уравнение третьего порядка, некратные характеристики, задача Коши, формула Даламбера.*

Целью данной работы является построение решения задачи Коши для одного дифференциального уравнения гиперболического типа третьего порядка во всей плоскости (x, y).

Рассмотрим гиперболическое дифференциальное уравнение третьего порядка

$$u_{xxy} - u_{xyy} = 0. \tag{1}$$

Юлия Олеговна Яковлева, аспирант, каф. прикладной математики и информатики.

Известно [1–3], что характеристиками для (1) являются решения уравнения

$$(dy)^2 dx + dy(dx)^2 = 0,$$

то есть линии $x = C_1$, $y = C_2$, $x + y = C_3$. Уравнение (1) допускает следующую факторизацию:

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\,(v(x,y)) = 0,$$

где $v(x,y) = u_x - u_y$. Общее решение дифференциального уравнения первого порядка

$$u_x - u_y = F(x) + G(y)$$

имеет вид

$$u(x,y) = h(x+y) + \int_0^x F(t)dt + \int_0^y G(s)ds. \tag{2}$$

Таким образом, функция $u(x,y) = f(x) + g(y) + h(x+y)$, где $f,\ g \in C^1$, $h \in C^3$, является общим решением уравнения (1).

Задача Коши. Найти решение $u(x,y)$ уравнения (1) в плоскости (x,y), удовлетворяющее условиям на нехарактеристической линии $l = \{(x,y) : y = x,\ x \in \mathbb{R}\}$:

$$u(x,y)\Big|_{y=x} = \alpha(x), \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{y=x} = \beta(x), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\Big|_{y=x} = \gamma(x), \tag{3}$$

где n — нормаль к прямой l.

Ограничения на нехарактеристическую линию уравнения третьего порядка такие же, как и для уравнения второго порядка: эта линия не может дважды пересекать любую характеристику из любого другого семейства [1, 2].

Определим функции f, g и h таким образом, чтобы удовлетворялись начальные условия (3):

$$f(x) + g(x) + h(2x) = \alpha(x), \tag{4}$$

$$f'(x) - g'(x) = \beta(x), \tag{5}$$

$$f''(x) + g''(x) = \gamma(x). \tag{6}$$

Из (5) и (6) следует, что

$$f''(x) = \frac{\beta'(x) + \gamma(x)}{2}. \tag{7}$$

Интегрируя равенство (7), получим

$$f'(x) - f'(0) = \frac{1}{2}\beta(x) - \frac{1}{2}\beta(0) + \frac{1}{2}\int_0^x \gamma(s)ds.$$

После повторного интегрирования находим

$$f(x) = f(0) + f'(0)x - \frac{x}{2}\beta(0) + \frac{1}{2}\int_0^x \beta(t)dt + \frac{1}{2}\int_0^x \gamma(t)(x-t)dt. \tag{8}$$

Аналогично,

$$g(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{x}{2}\beta(0) - \frac{1}{2}\int_0^x \beta(t)dt + \frac{1}{2}\int_0^x \gamma(t)(x-t)dt. \tag{9}$$

Из (4), (8), (9) следует, что

$$h(x) = \alpha\Big(\frac{x}{2}\Big) - f\Big(\frac{x}{2}\Big) - g\Big(\frac{x}{2}\Big),$$

$$h(x) = \alpha\Big(\frac{x}{2}\Big) - f(0) - \frac{x}{2}f'(0) - g(0) - \frac{x}{2}g'(0) - \int_0^{x/2} \gamma(t)(x-t)dt.$$

Подставляя в (2) найденные значения f, g и h, получим

$$u(x,y) = \alpha\Big(\frac{x+y}{2}\Big) - \frac{1}{2}\int_x^y \beta(t)dt + \frac{1}{2}\int_0^x \gamma(t)(x-t)dt + \\ + \frac{1}{2}\int_0^y \gamma(t)(y-t)dt - \int_0^{(x+y)/2} \gamma(t)\Big(\frac{x+y}{2} - t\Big)dt. \quad (10)$$

Формулу (10) будем называть аналогом формулы Даламбера для уравнения третьего порядка. Аналогично тому, как это делается в [1] для волнового уравнения, можно сделать вывод о единственности решения поставленной задачи Коши.

Непосредственной подстановкой можно проверить, что (10) удовлетворяет уравнению (1) и начально-краевым условиям (3).

Пусть

$$\int_0^\xi \gamma(t)(\xi - t)dt = a(\xi), \quad \int_x^y \beta(t)dt = b(y) - b(x),$$

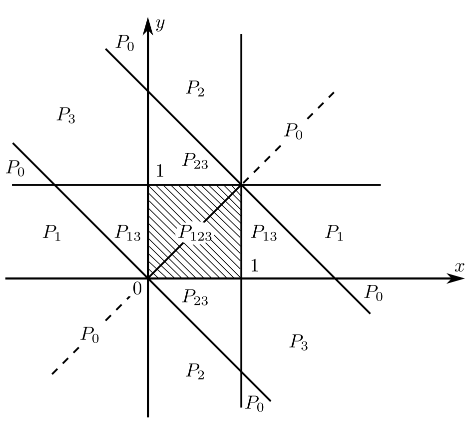
тогда решение (10) можно представить в виде суммы

$$u(x,y) = u_1(y) + u_2(x) + u_3(x,y),$$

где

$$u_1(y) = \frac{1}{2}\big(a(y) - b(y)\big), \quad u_2(x) = \frac{1}{2}\big(a(x) + b(x)\big), \quad u_3(x,y) = \alpha\Big(\frac{x+y}{2}\Big) - a\Big(\frac{x+y}{2}\Big).$$

Функция $u(x,y)$, определяемая формулой (10), представляет процесс распространения начального отклонения («начальной скорости» и «начального ускорения»). Наглядное представление о характере процесса распространения возмущений [1, 4] удобнее, на наш взгляд, показать на плоскости (x,y). Проведём характеристики через точки $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$; они разобьют плоскость на 17 областей.



На рисунке приведены область существования P_{123} задачи Коши (1), (3) при $x \in [0,1]$, области покоя P_0, а также области влияния P_i, P_{ij}, $i,j = 1,2,3$.

В областях P_1, P_2, P_3 решением соответственно являются волны $u_1(y)$, $u_2(x)$, $u_3(x,y)$. В областях P_{13}, P_{23} решением является сумма волн $u_1(y) + u_3(x,y)$, $u_2(x) + u_3(x,y)$ соответственно.

Если в условии (3) начальные функции задаются на конечном отрезке (например, $x \in [0,1]$), то из полученного процесса распространения волн нетрудно видеть, что конечность области зависимости решений от начальных данных P_{123} легко описывается в терминах характеристик уравнения [5].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с. [*Tihonov A. N., Samarskiy A. A.* Equations of mathematical physics. Moscow: Nauka, 1972. 735 pp.]
2. *Бицадзе А. В.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1982. 336 с. [*Bitsadze A. V.* Equations of mathematical physics. Moscow: Nauka, 1982. 336 pp.]
3. *Андреев А. А., Яковлева Ю. О.* Задача Гурса для одной системы гиперболических дифференциальных уравнений третьего порядка с двумя независимыми переменными // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2011. № 3(24). С. 35–41. [*Andreev A. A., Yakovleva J. O.* The Goursat problem for one hyperbolic system of the third order differential equations with two independent variables // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2011. no. 3(24). Pp. 35–41].
4. *Андреев А. А.* О корректности краевых задач для некоторых уравнений в частных производных с карлемановским сдвигом / В сб.: *Дифференциальные уравнения и их приложения*: Тр. второго международного семинара. Самара: Самар. ун-т, 1998. С. 5–18. [*Andreev A. A.* On the correctness of boundary value problems for some partial differential equations with a Carleman shift / In: *Differential Equations and Their Applications*: Proc. of the Second International Seminar. Samara: Samar. Un-t, 1998. Pp. 5–18].
5. *Егоров Ю. В.* Линейные дифференциальные уравнения главного типа. М.: Наука, 1984. 360 с. [*Egorov Yu. V.* Linear differential equations of principal type. Moscow: Nauka, 1984. 360 pp.]

Поступила в редакцию 20/VII/2009;
в окончательном варианте — 27/IX/2009.

MSC: 35L35

THE ANALOGUE OF D'ALEMBERT FORMULA FOR HYPERBOLIC DIFFERENTIAL EQUATION OF THE THIRD ORDER WITH NONMULTIPLE CHARACTERISTICS

J. O. Yakovleva

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia.

E-mail: `julia.yakovleva@mail.ru`

The Cauchy problem for the third order hyperbolic differential equation with nonmultiple characteristics is considered. The analogue of D'Alembert formula is obtained as a solution that allows describing the propagation of initial displacement, initial velocity and initial acceleration.

Key words: *hyperbolic differential equation of the third order, nonmultiple characteristics, Cauchy problem, D'Alembert formula.*

Original article submitted 20/VII/2009;
revision submitted 27/IX/2009.

Julia O. Yakovleva, Postgraduate Student, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science.