

УДК 517.977.56

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ ОБЪЕКТА С РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ НА ОСНОВЕ ПРИБЛИЖЕННОЙ КВАЗИАСИМПТОТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Н. В. Дилигенский, А. П. Ефимов

Самарский государственный технический университет,
443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mails: usat@samgtu.ru, a_efimov@newmail.ru

Рассмотрена возможность применения приближённых квазиасимптотических моделей при решении задачи быстрогодействия при нагреве. Для решения задачи быстрогодействия использовался численный алгоритм с применением экстраполирования минимизируемого поля сплайнами на каждой итерации. Показано, что такой подход к решению задачи быстрогодействия позволяет обеспечить достаточную точность определения предельно допустимой точности и длительностей интервалов управления для одно-, двух- и трёхинтервального управления.

Ключевые слова: задача быстрогодействия, квазиасимптотическая модель нагрева, погрешность модели, задача не дифференцируемой оптимизации, метод сплайновой аппроксимации.

Рассмотрим задачу оптимального по быстроддействию управления процессом нагрева стержня ограниченной длины с заданной точностью приближения к требуемой температуре, оцениваемой в равномерной метрике.

Уравнение динамики распределённого объекта конечной длины в канонической форме описывается одномерным параболическим уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 \leq \tau < \infty, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (1)$$

с граничным управляющим воздействием

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=1} = u(\tau), \quad (2)$$

условием адиабатичности

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad (3)$$

и начальным условием

$$T|_{\tau=0} = 0. \quad (4)$$

Здесь x — безразмерная (нормированная) пространственная координата по длине стержня; τ — безразмерное время (число Фурье); $T(x, \tau)$ — температурное поле в относительных единицах; $u(\tau)$ — управляющее воздействие,

Николай Владимирович Дилигенский (д.т.н., проф., засл. деятель науки РФ), зав. кафедрой, каф. управления и системного анализа в теплоэнергетике. *Александр Порфирьевич Ефимов* (к.т.н., доц.), доцент, каф. управления и системного анализа в теплоэнергетике.

представляющее собой относительную величину теплового потока на границе $x = 1$.

Ставится задача достижения в момент времени τ_k заданной температуры $T_3 = \text{const}$ с требуемой точностью ε :

$$\max_{x \in [0,1]} |T(\tau_k, x) - T_3| \leq \varepsilon \quad (5)$$

при минимальном значении критерия оптимальности

$$J = \int_0^{\tau_k} dt = \tau_k = \min_{u(\tau)} \quad (6)$$

в условиях заданных ограничений на величину управляющего теплового потока

$$u_{\min} \leq u(\tau) \leq u_{\max}. \quad (7)$$

Сформулированная задача (1)–(7) относится к задачам не дифференцируемой оптимизации. Она была всесторонне исследована в работах [1, 2], в которых был установлен ряд универсальных закономерностей алгоритмов управления и поведения оптимальных температурных распределений, приведённых ниже.

1. Установлено, что алгоритм оптимального управления $u^*(\tau)$ является кусочно-постоянной (релейной) функцией времени, попеременно принимающей свои предельно допустимые согласно (7) значения $u_{\min}$ и $u_{\max}$ с длительностями постоянства управления Δ_i : $\sum_{i=1}^n \Delta_i = \tau_k$.
2. Число n — число интервалов постоянства оптимального управления — однозначно определяется величиной допустимой требуемой точности ε из (5). При ужесточении требований (при уменьшении ε) число n возрастает. Другими словами, $n \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. При этом для каждого оптимального управления с фиксированным числом интервалов n существует предельно достижимая точность нагрева $\varepsilon^{(n)}$.
3. Оптимальные конечные температурные распределения $T(\tau_k, x)$ при любом ε обладают альтернансными свойствами: являются дифференцируемыми по x функциями, принимающими предельно допустимые согласно (5) значения $T_3 \pm \varepsilon$ в чередующихся на отрезке $[0, 1]$ максимумах и минимумах в точках $x_i^* \in [0, 1]$. Исходная задача не дифференцируемой оптимизации эквивалентна задаче решения системы уравнений

$$T(\tau_k, x)|_{x=x_i^*} = T_3 \pm \varepsilon; \quad i = 1, 2, \dots, R, \quad R = \begin{cases} n, & \varepsilon > \varepsilon^{(n)}; \\ n + 1, & \varepsilon = \varepsilon^{(n)}, \end{cases} \quad (8)$$

дополненной условиями

$$\frac{\partial T(\tau_k, x)}{\partial x} \Big|_{x=x_{i_\nu}^*} = 0; \quad x_{i_\nu}^* \in \{x_i^*\}, \quad \nu = 1, 2, \dots, R_1, \quad R_1 \leq R \quad (9)$$

для внутренних точек x_i^* экстремума конечного распределения температуры.

Система (8), (9) является замкнутой относительно неизвестных, к которым относятся длительности интервалов Δ_i и координаты локальных экстремумов $x_i^* \in [0, 1]$.

Разработанный точный аналитический альтернативный метод решения задачи оптимального управления (1)–(7) инвариантен по отношению к способу нахождения температурного состояния распределённого объекта $T(\tau_k, x)$. В работах [1, 2] использован точный метод расчёта температуры $T(\tau, x)$ в форме классического разложения по собственным функциям в виде сходящегося бесконечного ряда. При этом в расчётах численные значения параметров оптимального алгоритма $\{\Delta_i\}$, найденные на основе точных методов, в той или иной степени являются приближенными.

Рассмотрим возможность решения задачи (1)–(7) с использованием приближённого выражения для температурного поля в конце нагревания.

Авторами [3, 4] для решения задач теплопроводности вида (1)–(4) предложен метод построения аналитических квазиасимптотических решений, удовлетворительно описывающих температурные распределения краевых задач в области $0 \leq \tau < \infty$, $0 \leq x \leq 1$. Квазиасимптотические решения строятся путём сопряжения внутренних и внешних асимптотических представлений решения с помощью специально конструируемых мультипликаторов. Получаемые при таком подходе приближённые решения асимптотически совпадают с точными решениями задачи при больших и малых временах, а в промежуточной области имеют погрешность, которая может быть уменьшена путём увеличения числа учитываемых в разложениях членов рядов.

Так, квазиасимптотическое решение для задачи (1)–(4) при $u(\tau) = u_0 = \text{const}$, построенное путём квазисопряжения первых двух членов внутреннего и первых двух членов внешнего разложений, имеет следующий вид [3]:

$$\tilde{T}(x, \tau) = u_0 \left\{ 2\sqrt{\tau} \left[i \operatorname{erfc}\left(-\frac{1-x}{2\sqrt{\tau}}\right) + i \operatorname{erfc}\left(-\frac{1+x}{2\sqrt{\tau}}\right) \right] + 4\tau i^2 \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}}\right) + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{6}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}}\right) \right\}, \quad (10)$$

где $i^n \operatorname{erfc}(z)$ — итерированные интегралы дополнительной функции ошибок.

На рис. 1 представлены относительные погрешности δ квазиасимптотического решения (10) и его градиента. Видно, что погрешности асимптотически

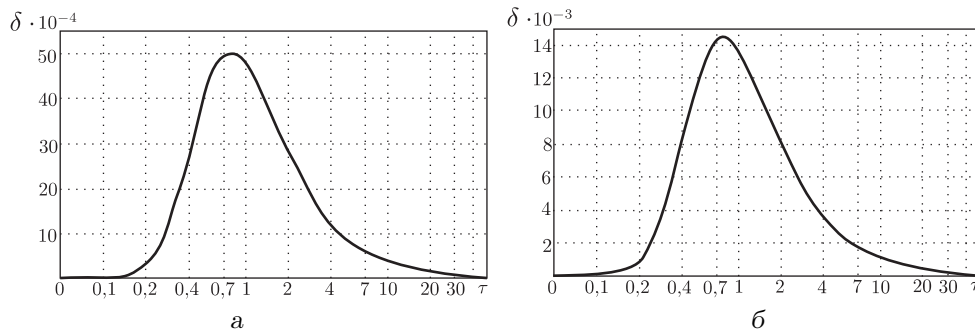


Рис. 1. Зависимость максимальной относительной ошибки (а) и относительной ошибки градиента (б) приближённого решения (10) от времени τ

уменьшаются при малых и при больших временах. Максимальная величина погрешности достигается при средних временах и составляет 0,5% для значения температуры и менее 1,5% для градиента температуры, что показывает вполне удовлетворительную эффективность квазиасимптотического решения (10).

Для сопоставления оптимизационных расчётов были решены задачи минимизации суммарного времени нагрева τ_k при релейном управлении мощностью для одно-, двух- и трёхинтервального управления на основе точного и приближенного (10) решений. При этом был использован разработанный в [5, 6] численный итерационный метод, использующий сплайновую аппроксимацию оптимизируемого поля на каждой итерации и ориентированный на минимизацию числа обращений к модели. Отметим, что в этом методе условия альтернанса при решении не использовались. Результаты расчётов приведены в таблице.

На рис. 2 приведены зависимости длительности временных интервалов управления от требуемой точности нагрева для одно- и двухинтервального оптимального алгоритма при $T_3 = 0,5$, полученные на основе точного и приближённого решений.

На рис. 3 приведены оптимальная траектория нагрева и конечное распределение температур по x для $\tau = \tau_k$ при точности нагрева $\varepsilon^{(1)} > \varepsilon > \varepsilon^{(2)}$ для квазиасимптотической модели. На рис. 4 приведены конечные распределения температур по x для $\tau = \tau_k$ при точностях нагрева $\varepsilon = \varepsilon^{(2)}$ (рис. 4, а) и $\varepsilon^{(2)} > \varepsilon > \varepsilon^{(3)}$ (рис. 4, б).

Результаты расчётов подтверждают обоснованные в [1, 2] альтернансные свойства оптимальных распределений конечных температур. Наблюдается удовлетворительное совпадение результатов определения предельно допустимой точности и длительностей интервалов управления, полученных с ис-

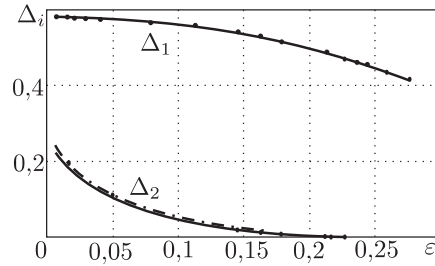


Рис. 2. Зависимость длительности временных интервалов управления от требуемой точности нагрева: сплошная линия — точное решение, штрихпунктирная линия — приближённое решение

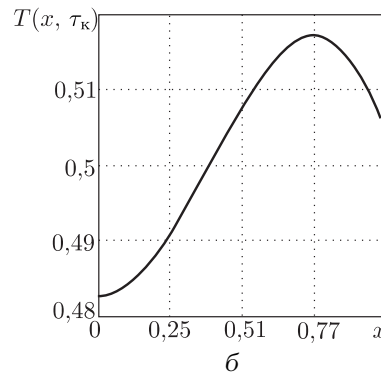
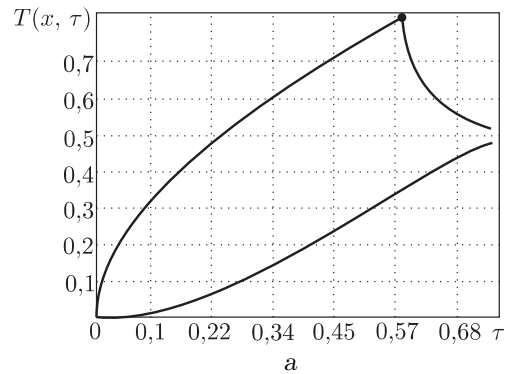


Рис. 3. Траектория нагрева (а) и конечное распределение температур (б) для случая $\varepsilon^{(1)} > \varepsilon > \varepsilon^{(2)}$

Результаты расчётов по точному и приближённому решениям

ε		Δ_1		Δ_2		$\Delta_3 \cdot 10^3$	
точное	приближённое	точное	приближённое	точное	приближённое	точное	приближённое
0,274	0,277	0,414	0,414	—	—	—	—
0,256	0,259	0,434	0,434	—	—	—	—
0,240	0,242	0,453	0,453	—	—	—	—
0,233	0,236	0,461	0,461	—	—	—	—
0,224	0,226	0,472	0,472	—	0,0	—	—
0,223	0,216	0,472	0,484	0,0	0,000385	—	—
0,210	0,213	0,487	0,486	0,000578	0,000578	—	—
0,174	0,178	0,519	0,519	0,00788	0,00788	—	—
0,109	0,113	0,558	0,558	0,0432	0,0432	—	—
0,0748	0,0787	0,568	0,567	0,0737	0,0737	—	—
0,0500	0,0500	0,572	0,573	0,105	0,110	—	—
0,0251	0,0288	0,576	0,577	0,151	0,151	—	—
0,0172	0,0206	0,578	0,578	0,173	0,173	—	—
0,0117	0,0149	0,579	0,580	0,193	0,193	—	—
0,00852	0,0115	0,580	0,580	0,207	0,207	—	—
0,00763	0,0105	0,580	0,581	0,212	0,212	0,0	0,0
0,00729	0,00745	0,580	0,582	0,214	0,228	0,0100	0,0
0,00685	0,00666	0,580	0,582	0,216	0,233	0,0500	0,0500
0,00648	0,00630	0,580	0,582	0,218	0,235	0,110	0,110

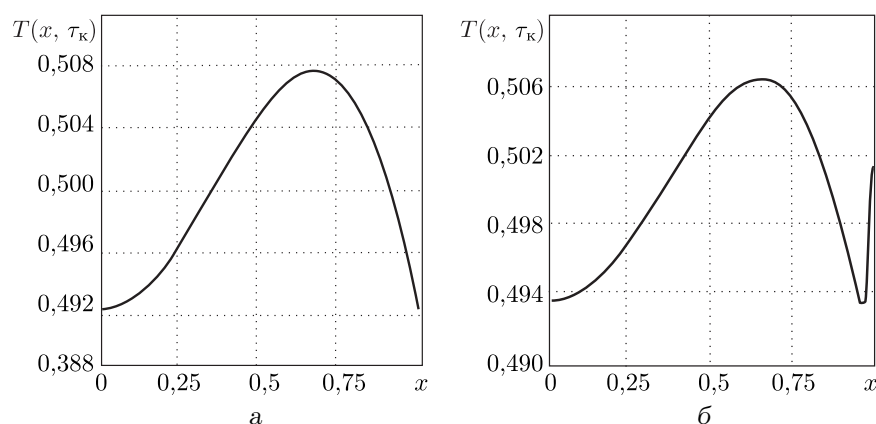


Рис. 4. Конечное распределение температур: а) случай $\varepsilon = \varepsilon^{(2)}$; б) случай $\varepsilon^{(2)} > \varepsilon > \varepsilon^{(3)}$

пользованием приближённого квазиасимптотического и точного решения для одно-, двух- и трёхинтервального управления.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Рапопорт Э. Я. Оптимизация процессов индукционного нагрева металла. М.: Металлургия, 1993. 279 с. [Rapoport É. Ya. Process optimization of induction heating of metal. Moscow: Metallurgiya, 1993. 279 pp.]
2. Рапопорт Э. Я. Альтернансный метод в прикладных задачах оптимизации. М.: Наука, 2000. 336 с. [Rapoport É. Ya. The alternance method in applied problems of optimization. Moscow: Nauka, 2000. 336 pp.]
3. Ефимов А. П. Метод построения равномерно-пригодных аппроксимаций решений нестационарных задач теплопроводности в телах конечных размеров // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Техн. науки, 2008. № 2(22). С. 196–200. [Efimov A. P. A method for constructing a uniformly suitable approximation of nonstationary heat conduction problems solutions in finite dimensions bodies // Vestn. Sam. Gos. Tekhn. Un-ta. Ser. Tekhn. Nauki, 2008. no. 2(22). Pp. 196–200].
4. Дилигенский Н. В., Ефимов А. П. Использование принципа дополнительности для конструирования систем математических моделей задач теплопроводности с требуемыми аппроксимативными свойствами / В сб.: Труды Третьей Российской национальной конференции по теплообмену. Т. 7. М.: МЭИ, 2002. С. 111–114. [Diligenskiy N. V., Efimov A. P. Using the principle of subsidiarity for the design of systems of mathematical models for heat conduction problems with the required approximation properties / In: Proceedings of the Third Russian National Conference on Heat Transfer. Vol. 7. Moscow: МЭИ, 2002. Pp. 111–114].
5. Ефимов А. П. Алгоритм сплайновой экстраполяции при решении задач полубесконечной оптимизации // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Техн. науки, 2009. № 2(24). С. 25–32. [Efimov A. P. Spline extrapolation algorithm for solving semi-infinite optimization // Vestn. Sam. Gos. Tekhn. Un-ta. Ser. Tekhn. Nauki, 2009. no. 2(24). Pp. 25–32].
6. Ефимов А. П. Применение алгоритма сплайновой экстраполяции при решении задач полубесконечной оптимизации // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Техн. науки, 2010. № 2(26). С. 44–51. [Efimov A. P. Application of spline extrapolation algorithm for solving semi-infinite optimization // Vestn. Sam. Gos. Tekhn. Un-ta. Ser. Tekhn. Nauki, 2010. no. 2(26). Pp. 44–51].

Поступила в редакцию 15/IX/2011;
в окончательном варианте — 21/XI/2011.

MSC: 49J20; 49M30

**SOLUTION OF NONDIFFERENTIABLE OPTIMIZATION PROBLEM
FOR OBJECT WITH DISTRIBUTED PARAMETERS BASED ON
QUASI-ASYMPTOTIC APPROXIMATE MODEL**

N. V. Diligenskiy, A. P. Efimov

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia.

E-mails: usat@samgtu.ru, a_efimov@newmail.ru

The possibility of approximate quasi-asymptotic models application is considered on an example of the solution of a time-optimal heating problem. To solve an optimal control problem the numerical algorithm has been used on the basis of spline extrapolation of the minimized field at each iteration. It is shown that this approach to the time-optimal control problem can provide with negligible error the determination of maximum admissible accuracy and interval durations for one-, two-, and three- stage control.

Key words: *time-optimal problem, quasi-asymptotic model of heating process, error of model, problem of nondifferentiable optimization, spline approximation method .*

Original article submitted 15/IX/2011;
revision submitted 21/XI/2011.

Nikolay V. Diligenskiy (Dr. Sci. (Techn.)), Head of Dept., Dept. of Management and Systems Analysis in Heat Power Industry. *Alexander P. Efimov* (Ph. D. (Techn.)), Associate Professor, Dept. of Management and Systems Analysis in Heat Power Industry.