УДК 517.956.2

О КОЛИЧЕСТВЕ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧАХ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА С РАЗРЫВНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

Д. К. Потапов

Санкт-Петербургский государственный университет,
198504, Россия, Санкт-Петербург, Университетский просп., 35.

E-mail: potapov@apmath.spbu.ru

Рассматривается проблема существования решений задач на собственные значения для уравнений эллиптического типа второго порядка с разрывными по фазовой переменной нелинейностями. Вариационным методом получены теоремы о количестве решений для исследуемых задач. В качестве приложения рассмотрена задача об отрывных течениях несжимаемой жидкости М. А. Гольдштика.

Ключевые слова: *краевые задачи, уравнения эллиптического типа, задачи на собственные значения, разрывная нелинейность, вариационный метод, количество решений.*

В работах [1–4] получены теоремы о существовании луча положительных собственных значений и оценке сверху величины бифуркационного параметра для уравнений эллиптического типа с разрывными по фазовой переменной нелинейностями. В работах [1, 2, 4] установлены достаточные условия существования нетривиального полуправильного решения [5] для таких задач. В данной работе рассматривается вопрос о количестве решений в задачах со спектральным параметром для уравнений эллиптического типа второго порядка с разрывными нелинейностями. Устанавливается существование полуправильных решений, поскольку при изучении ряда прикладных задач интерес представляют именно такие решения. Примером такой задачи может служить, например, задача об отрывных течениях несжимаемой жидкости М. А. Гольдштика [6].

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей Γ класса $\mathbf{C}_{2,\alpha}$, $0 < \alpha \leqslant 1$. Рассматривается вопрос существования решений краевой задачи

$$Lu(x) \equiv -\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + c(x)u(x) = \lambda g(x, u(x)), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$Bu\Big|_{\Gamma} = 0, \tag{2}$$

где L — равномерно эллиптический формально самосопряжённый дифференциальный оператор с коэффициентами $a_{ij} \in \mathbf{C}_{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, $c \in \mathbf{C}_{0,\alpha}(\overline{\Omega})$; λ — положительный параметр; функция $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ суперпозиционно измеримая и для почти всех $x \in \Omega$ сечение $g(x, \cdot)$ имеет на $\mathbb{R}$ разрывы только первого рода, $g(x, u) \in [g_-(x, u), g_+(x, u)]$ $\forall u \in \mathbb{R}$, $g_-(x, u) = \varliminf\limits_{\eta \to u} g(x, \eta)$, $g_+(x, u) = \varlimsup\limits_{\eta \to u} g(x, \eta)$; граничное условие (2) является либо условием Дирихле $u(x)|_\Gamma = 0$, либо условием Неймана $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_L}(x)|_\Gamma = 0$ с конормальной производной

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_L}(x) \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i} \cos(\mathbf{n}, x_j),$$

Дмитрий Константинович Потапов (к.ф.-м.н., доц.), доцент, каф. высшей математики.

$\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к границе Γ, $\cos(\mathbf{n}, x_j)$ — направляющие косинусы нормали $\mathbf{n}$, либо третьим краевым условием

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_L}(x) + \sigma(x)u(x)|_\Gamma = 0,$$

в котором функция $\sigma \in \mathbf{C}_{1,\alpha}(\Gamma)$ неотрицательна и не равна тождественно нулю на Γ. Пусть $X = \mathbf{H}^1_\circ(\Omega)$, если (2) — граничное условие Дирихле, и $X = \mathbf{H}^1(\Omega)$, если (2) — граничное условие Неймана или третье краевое условие. Краевой задаче (1), (2) поставим в соответствие функционал J^λ, определённый на X следующим образом:

$$J^\lambda(u) = J_1(u) - \lambda J_2(u),$$

где

$$J_1(u) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega a_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}dx + \frac{1}{2}\int_\Omega c(x)u^2(x)dx$$

в случае граничного условия Дирихле или Неймана;

$$J_1(u) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega a_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}dx + \frac{1}{2}\int_\Omega c(x)u^2(x)dx + \frac{1}{2}\int_\Gamma \sigma(s)u^2(s)ds$$

в случае третьего краевого условия;

$$J_2(u) = \int_\Omega dx\int_0^{u(x)} g(x,s)ds.$$

Определение 1. *Сильным решением* задачи (1), (2) называется функция $u \in \mathbf{W}^2_r(\Omega)$, $r > 1$, удовлетворяющая для почти всех $x \in \Omega$ уравнению (1) и для которой след $Bu(x)$ на Γ равен нулю.

Определение 2. *Полуправильным решением* задачи (1), (2) называется такое сильное ее решение u, значение которого $u(x)$ для почти всех $x \in \Omega$ является точкой непрерывности функции $g(x,\cdot)$.

Определение 3. *Собственным значением* задачи (1), (2) называется число λ такое, что существует сильное ненулевое решение u_λ этой задачи.

Определение 4. *Прыгающим разрывом* функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется такое $u \in \mathbb{R}$, что $f(u-) < f(u+)$, где $f(u\pm) = \lim\limits_{s\to u\pm} f(s)$.

Определение 5. Локально липшицева функция $f : E \to \mathbb{R}$ (E — вещественное банахово пространство) удовлетворяет (PS)-*условию*, если любая последовательность $(x_n) \subset E$, для которой множество значений $(f(x_n))$ ограничено и $m(x_n) = \inf\limits_{x^*\in\partial f(x_n)} ||x^*|| \to 0$ при $n \to \infty$, содержит сходящуюся подпоследовательность.

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия*:

1) *для любого* $u \in X$ *справедливо неравенство* $J_1(u) \geqslant 0$;

2) *для почти всех* $x \in \Omega$ *функция* $g(x,\cdot)$ *имеет только прыгающие разрывы*, $g(x,0) = 0$ *и* $|g(x,u)| \leqslant a(x)$ $\forall u \in \mathbb{R}$, *где* $a \in \mathbf{L}_q(\Omega)$, $q > 2n/(n+2)$, *фиксирована*;

3) *найдётся* $u_0 \in X$, *для которого справедливо неравенство* $J_2(u_0) > 0$;

4) *если пространство $N(L)$ решений задачи*

$$\begin{cases} Lu = 0, \\ Bu|_{\Gamma} = 0 \end{cases}$$

ненулевое (резонансный случай), то дополнительно

$$\lim_{u \in N(L), ||u|| \to +\infty} J_2(u) = -\infty.$$

Тогда существует $\lambda_* > 0$ такое, что для любого $\lambda > \lambda_*$ задача (1), (2) *имеет, по крайней мере, три сильных решения, причём, по крайней мере, одно из ненулевых решений является полуправильным.*

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* 1), 3), 4) *теоремы* 1 *и дополнительно условия*

1′) *для почти всех $x \in \Omega$ функция $g(x, \cdot)$ невозрастающая на $\mathbb{R}$ и для некоторой $a \in \mathbf{L}_{\frac{2n}{n+2}}(\Omega)$ справедливо неравенство $|g(x, u)| \leqslant a(x)\ \ \forall u \in \mathbb{R}$;*

2′) *для почти всех $x \in \Omega$ точки разрыва функции $g(x, \cdot)$ лежат на плоскостях $u = u_i$, $i \in I$ (I — не более чем счётно), и если $g(x, u_i-) > g(x, u_i+)$, то $g(x, u_i-)g(x, u_i+) > 0$ для любого $i \in I$.*

Тогда существует $\lambda_* > 0$ такое, что для любого $\lambda > \lambda_*$ задача (1), (2) *имеет, по крайней мере, одно ненулевое полуправильное решение.*

Доказательство теорем. В работах [1, 2] доказано, что при выполнении условий теорем 1, 2 существует число $\lambda_0 > 0$ такое, что для любого $\lambda > \lambda_0$ выполняется неравенство $\inf\limits_{v \in X} J^{\lambda}(v) < 0$, и найдётся $u_\lambda \in X$, для которого $J^{\lambda}(u_\lambda) = \inf\limits_{v \in X} J^{\lambda}(v)$, и любое такое u_λ является ненулевым полуправильным решением задачи (1), (2). Таким образом, найдется и некоторая константа $\lambda_* > 0$ такая, что для каждого $\lambda > \lambda_*$ существует, по крайней мере, одно ненулевое полуправильное решение u_λ задачи (1), (2). Теорема 2 доказана.

Наличие второго, тривиального, решения задачи (1), (2) в теореме 1 обуславливается условием 2) теоремы 1 ($g(x,0) = 0$ для почти всех $x \in \Omega$). При $\lambda > \lambda_*$ задача (1), (2) имеет, по крайней мере, ещё одно нетривиальное решение v_λ, которое может быть найдено с помощью теоремы о горном перевале [7]. Функция J^{λ} локально липшицева на X, что показывается стандартным способом, при этом используется условие 2) теоремы 1 ($|g(x, u)| \leqslant a(x)\ \forall u \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbf{L}_q(\Omega)$, $q > 2n/(n+2)$). В силу достаточного условия выполнения (PS)-условия (теорема 4.5 из работы [7]), примененного к уравнениям эллиптического типа с разрывными нелинейностями, функционал J^{λ} удовлетворяет (PS)-условию для любого $\lambda > 0$. Значит, функционал J^{λ} удовлетворяет условиям теоремы о горном перевале [7], следовательно, он имеет критическую точку $v_\lambda \in X$ такую, что

$$J^{\lambda}(v_\lambda) > 0,$$

где

$$J^{\lambda}(v_\lambda) = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{t \in [0,1]} J^{\lambda}(\gamma(t)), \quad \Gamma = \{\gamma \in \mathbf{C}([0,1], X) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = u_\lambda\}.$$

Итак, в условиях теоремы 1 функционал J^{λ} имеет, по крайней мере, три различные критические точки. Таким образом, в условиях теоремы 1 для любого $\lambda > \lambda_*$ существует, по крайней мере, три решения задачи (1), (2) (нулевое, $u_\lambda \neq 0$, $v_\lambda \neq 0$). Отметим, что решения u_λ и v_λ различны, поскольку $J^{\lambda}(u_\lambda) < 0$, а $J^{\lambda}(v_\lambda) > 0$. Теорема 1 доказана. □

В качестве приложения полученных результатов рассмотрим вопрос о количестве решений в задаче об отрывных течениях несжимаемой жидкости М. А. Гольдштика [6]. Рассматриваемый в данной работе класс задач включает задачу, исследуемую в работе [6], об отрывных течениях по схеме М. А. Лаврентьева [8]. До последнего времени интересный вопрос о количестве решений в задаче, описывающей течение по схеме М. А. Лаврентьева, оставался открытым. В работах [6, 9–12] установлено, что при значениях завихренности, превышающих некоторое значение, задача Гольдштика имеет, по крайней мере, одно нетривиальное решение. В работе [13] доказано существование второго нетривиального решения в задаче Гольдштика. В работе [11] показано, что для одномерного аналога модели Гольдштика количество решений исчерпывается найденными тремя. Согласно результатам данной работы (теорема 1) для плоской задачи Гольдштика количество решений, по крайней мере, три и, по крайней мере, одно из ненулевых решений полуправильное. Полуправильным также будет и тривиальное (нулевое) решение в задаче Гольдштика. Отметим, что в работах [6, 9, 10, 12, 13] полуправильные решения не рассматривались, а доказательство существования второго нетривиального решения в данной работе отлично от приведенного в работе [13].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Павленко В. Н., Потапов Д. К.* О существовании луча собственных значений для уравнений с разрывными операторами // *Сиб. матем. журн.*, 2001. Т. 42, № 4. С. 911–919; англ. пер.: *Pavlenko V. N., Potapov D. K.* Existence of a ray of eigenvalues for equations with discontinuous operators // *Siberian Math. J.*, 2001. Vol. 42, no. 4. Pp. 766–773.
2. *Потапов Д. К.* О существовании луча собственных значений для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями в критическом случае // *Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления*, 2004. № 4. С. 125–132. [*Potapov D. K.* On an existence of a ray of eigenvalues for equations of elliptic type with discontinuous nonlinearities in a critical case // *Vestn. St. Petersburg Univ. Ser. 10*, 2004. no. 4. Pp. 125–132].
3. *Потапов Д. К.* Об одной оценке сверху величины бифуркационного параметра в задачах на собственные значения для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями // *Дифференц. уравнения*, 2008. Т. 44, № 5. С. 715–716; англ. пер.: *Potapov D. K.* On an upper bound for the value of the bifurcation parameter in eigenvalue problems for elliptic equations with discontinuous nonlinearities // *Differ. Equ.*, 2008. Vol. 44, no. 5. Pp. 737–739.
4. *Потапов Д. К.* О структуре множества собственных значений для уравнений эллиптического типа высокого порядка с разрывными нелинейностями // *Дифференц. уравнения*, 2010. Т. 46, № 1. С. 150–152; англ. пер.: *Potapov D. K.* On the eigenvalue set structure for higher-order equations of elliptic type with discontinuous nonlinearities // *Differ. Equ.*, 2010. Vol. 46, no. 1. Pp. 155–157.
5. *Красносельский М. А., Покровский А. В.* Правильные решения уравнений с разрывными нелинейностями // *Докл. АН СССР*, 1976. Т. 226, № 3. С. 506–509. [*Krasnosel'skiy M. A., Pokrovskiy A. V.* Regular solutions of equations with discontinuous nonlinearities // *Dokl. AN SSSR*, 1976. Vol. 226, no. 3. Pp. 506–509].
6. *Гольдштик М. А.* Математическая модель отрывных течений несжимаемой жидкости // *Докл. АН СССР*, 1962. Т. 147, № 6. С. 1310–1313. [*Gol'dshtik M. A.* A mathematical model of separated flows in an incompressible liquid // *Dokl. AN SSSR*, 1962. Vol. 147, no. 6. Pp. 1310–1313].
7. *Chang K. C.* Variational methods for non-differentiable functionals and their applications to partial differential equations // *J. Math. Anal. Appl.*, 1981. Vol. 80, no. 1. Pp. 102–129.
8. *Лаврентьев М. А.* Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа. М.: АН СССР, 1962. 136 с. [*Lavrent'ev M. A.* The variational method in boundary-value problems for systems of equations of elliptic type. Moscow: AN SSSR, 1962. 136 pp.]

9. *Вайнштейн И. И., Юровский В. К.* Об одной задаче сопряжения вихревых течений идеальной жидкости // *ПМТФ*, 1976. №5. С. 98–100; англ. пер.: *Vainshtein I. I., Yurovskii V. K.* Attachment of eddy flows of an ideal fluid // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1976. Vol. 17, no. 5. Pp. 678–679.
10. *Титов О. В.* Вариационный подход к плоским задачам о склейке потенциального и вихревого течения // *ПММ*, 1977. Т. 41, №2. С. 370–372; англ. пер.: *Titov O. V.* Variational approach for plane problems of matching potential and vortical flows // *J. Appl. Math. Mech.*, 1977. Vol. 41, no. 2. Pp. 365–368.
11. *Потапов Д. К.* Математическая модель отрывных течений несжимаемой жидкости // *Изв. РАЕН. Сер. МММИУ*, 2004. Т. 8, №3–4. С. 163–170. [*Potapov D. K.* A mathematical model of separated flows in an incompressible fluid // *Izv. RAEN. Ser. MMMIU*, 2004. Vol. 8, no. 3–4. Pp. 163–170].
12. *Вайнштейн И. И.* Дуальная задача к задаче М. А. Гольдштика с произвольной завихренностью // *Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ.*, 2010. Т. 3, №4. С. 500–506. [*Vainshtein I. I.* The dual problem to M. A. Goldshtik problem with arbitrary vorticity // *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, 2010. Vol. 3, no. 4. Pp. 500–506].
13. *Вайнштейн И. И.* Решение двух дуальных задач о склейке вихревых и потенциальных течений вариационным методом М. А. Гольдштика // *Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ.*, 2011. Т. 4, no. 3. Pp. 320–331. [*Vainshtein I. I.* Solution of two dual problems of gluing vorter and potential flows by M. A. Goldshtick variational method // *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, 2011. Vol. 4, no. 3. Pp. 320–331].

Поступила в редакцию 29/XI/2011;
в окончательном варианте — 17/II/2012.

MSC: 35J25; 35P30, 35J60, 35P15

ON NUMBER OF SOLUTIONS IN EIGENVALUE PROBLEMS FOR ELLIPTIC EQUATIONS WITH DISCONTINUOUS NONLINEARITIES

D. K. Potapov

St. Petersburg State University,
35, Universitetskiy prosp., St. Petersburg, 198504, Russia.

E-mail: potapov@apmath.spbu.ru

We study the existence of solutions of eigenvalue problems for elliptic equations of the second order with nonlinearity discontinuous with respect to a phase variable. Using the variational method, we receive the theorems on number of solutions for investigated problems. M. A. Gol'dshtik's problem on separated flows of incompressible fluid is considered as an appendix.

Key words: *boundary value problems, elliptic equations, eigenvalue problems, discontinuous nonlinearity, variational method, number of solutions.*

Original article submitted 29/XI/2011;
revision submitted 17/II/2012.

Dmitriy K. Potapov (Ph.D. (Phys. & Math.)), Associate Professor, Dept. of Higher Mathematics.