Математическое моделирование

УДК 517.958:536.2

ВЛИЯНИЕ ЛОЖНОГО ДНА НА НЕЛИНЕЙНУЮ ДИНАМИКУ ПРОЦЕССА ЗАМЕРЗАНИЯ ВОДЫ

И.Г. Низовцева, Д.В. Александров

Уральский государственный университет им. А. М. Горького, 620083, Екатеринбург, пр-т Ленина, 51.

E-mails: nizovtseva.irina@gmail.com, dmitri.alexandrov@usu.ru

Исследованы процессы структурно-фазовых переходов при замерзании солёной воды с образованием ложного дна. Сформулирована нелинейная математическая модель процесса тепло- и массопереноса, учитывающая наличие трёх движущихся границ фазового перехода и турбулентных течений жидкости в морской воде у поверхности ложного дна. Аналитически получены точные решения нелинейной модели с учётом временных зависимостей температуры и солёности воды на глубине и флуктуаций скорости трения; найдены распределения температуры и солёности воды, доля твёрдой фазы, законы движения границ фазового перехода «морская вода – двухфазная зона», «двухфазная зона – талая вода» и «талая вода – лёд». Определён тепловой поток на нижней границе ложсного дна, который может изменять своё направление при временных осцилляциях температуры морской воды и скорости трения. Показано, что структурные переходы в толще льда связаны с процессами эволюции ложсного дна.

Ключевые слова: кристаллизация, тепломассоперенос, задача Стефана, двухфазная зона, ложное дно.

Введение. При смешивании пресной и солёной воды, когда температура в месте смешения равна температуре фазового перехода, происходит образование слоя льда. В природе это явление наблюдается под массивом пакового льда в весенне-летний период времени и под ледовыми шельфами в течение арктического лета [1]. При нагревании солнечными лучами поверхности льда на ней образуется талая вода (по оценкам работы [2], в течение арктического лета 30-сантиметровое плавление льда происходит в области площадью в 10⁷ км²). Некоторое количество этой талой воды просачивается сквозь ледовую толщу и накапливается в полостях льда со стороны солёной морской воды, образуя так называемые подлёдные пруды [3]. В 1897 году Нансен, основываясь на своих наблюдениях, первым отмечал, что процесс теплопереноса от талой воды с температурой 0°С к морской воде Арктики с температурой −1,6°С является причиной прироста льда в течение полярного лета [4].

Многие авторы в своих работах отмечают (см., например, работы [3,5,6]), что при контакте талой и солёной воды в месте их соприкосновения образуется ледяной пласт толщины 2–10 см (этот пласт и является ложным дном).

Ирина Геннадьевна Низовцева (к.ф.-м.н.), научный сотрудник, лаб. математического моделирования физико-химических процессов в многофазных средах. Дмитрий Валерьевич Александров, д.ф.-м.н., профессор, каф. математической физики.

Также в этих работах отмечается, что в пространстве между ложным дном и находящимся над ним слоем льда находятся кристаллиты, что свидетельствует о наличии протяжённой области фазового перехода — зоны двухфазного состояния вещества. Имеются также и непосредственные наблюдения ложного дна в природе (см., например, работы [1,7]); подлёдные пруды могут быть весьма многочисленны, иметь горизонтальный размер несколько метров с толщиной ложного дна в несколько сантиметров. При этом пространство между ложным дном и лежащим над ним слоем льда заполнено растущими кристаллами и может достигать глубины в несколько десятков сантиметров. В работах [1,3], где изучалась временная эволюция ложного дна, показано, что горизонтально ориентированное ложное дно движется вверх по направлению к талой воде. При этом толщина ложного дна может увеличиваться со временем, а скорость его перемещения может составлять порядка нескольких сантиметров в день [1,3,6].

Ложное дно обычно образуется в подлёдных прудах талой воды, где талая вода является относительно защищённой от интенсивного перемешивания с солёной морской водой. Иногда ложное дно образуется под трещинами и небольшими разводьями во льду, где многолетний лёд оказывает подобную защиту от непосредственного перемешивания талой и солёной воды [7,8]. В природных условиях достаточно трудоёмкими являются непосредственные измерения характеристик подлёдных талых образований; кратко приведём имеющиеся экспериментальные данные. В работе [7] описываются данные по изучению структуры льда в широком Арктическом регионе. Здесь отмечается, что из 52-х проб льда, бравшихся для наблюдений из различных местоположений, восемь содержали ложное дно (с учётом среднего трёхлетнего возраста исследуемого льда, это давало оценку приблизительно 5-процентного покрытия льда ложным дном [7,8]). Далее, по данным работы [9], следы ложного дна были найдены в 22-х пробах льда из исследованных 57-ми в море Бофорта (с учётом среднего четырёхлетнего возраста исследуемого льда это давало оценку приблизительно 10-процентного покрытия льда ложным дном). В работе [3] приводятся данные о том, что подльдинные пруды и ложное дно покрывали приблизительно половину площади поверхности льда под дрейфующей станцией Charlie. Эта оценка, по-видимому, представляет собой верхнюю границу покрытия льда ложным дном. На основе данных, полученных с сонара, в работе [10] сделан вывод о том, что образование подлёдных прудов должно быть широкораспространённым явлением в Арктике, а в работе [11] показано, что над подлёдными прудами часто находятся поверхностные пруды, что подтверждает механизм образования ложного дна, изображенный на рис. 1 по данным работ [8,12].

Ложное дно достаточно часто наблюдалось в полевых экспериментах SHEBA [12,13]. При этом было отмечено, что начальное образование ложного дна обычно занимало пару часов; большие кристаллы льда претерпевали боковой рост от стенок, образуя поверхность ложного дна. Наблюдавшийся в полевых исследованиях процесс его образования протекал намного быстрее, чем в лабораторных исследованиях работы [1], которые ставились в условиях чисто вертикального роста льда. В некоторых местах в экспериментах SHEBA было зафиксировано образование сразу нескольких слоев ложного дна (от двух до четырёх), находящихся один под другим. Это происходило



Рис. 1. Схема процесса образования ложного дна по данным работ [1,7,8]. При увеличении температуры в весенне-летний период времени на поверхности образуются пруды талой воды (a), которая просачивается сквозь толщу льда и вступает в контакт с морской во водой (b). В месте контакта образуется тонкий слой льда — ложное дно, которое претерпевает рост в направлении атмосферы ((c) или (d)). Процесс образования ложного дна также возможен и в трещинах льда (справа на рисунках) [8], когда талая и солёная вода вступают в непосредственный контакт (механизм образования ложного дна аналогичен лабораторным экспериментам работы [1])

вследствие того, что талая вода проникала в подлёдные полости ниже ложного дна, приводя к образованию вторичного ложного дна, располагающегося ниже основного.

Исследования структуры льда при развитии ложного дна показывает, что его солёность имеет необычное С-образное распределение: возрастая от поверхности льда, концентрация соли достигает максимума, а затем снова убывает практически до нулевого значения [7]. Такое распределение солёности можно объяснить процессами вытеснения соли растущим льдом за счёт его замерзания сверху от границы с атмосферой и за счет миграции ложного дна снизу от границы с морской водой. Поскольку такое распределение наблюдается в молодых льдах, его нельзя объяснить диффузионными процессами соли во льду [7]. Регистрируемое же в этой работе увеличение пористости льда вблизи ложного дна свидетельствует о наличии протяженной области фазового перехода — двухфазной зоны. При этом структура льда ложного дна характеризуется как столбчато-гранулированная с образованием растущих пластинчатых образований льда со стороны ложного дна. Структура же располагающегося сверху льда характеризуется как столбчатая. Поэтому кристаллизация пресной воды (во встречных направлениях, сверху и снизу) будет приводить к образованию чередующихся областей льда со столбчатой и со столбчато-гранулированной структурами, регистрируемыми в полевых наблюдениях [7] (особенно, если происходит замерзание с несколькими слоями ложного дна, находящимися одно под другим). На этих данных в настоящей работе развита модель эволюции ложного дна при встречном замерзании льда от поверхности вследствие понижения температуры атмосферы.

В заключение этого раздела отметим основные факторы наличия ложного дна: аномальное поведение солености во льду, наличие структурного перехода во льду от одной ростовой формы к другой, запечатывание ледового дна и его топографическое выравнивание. Следует также отметить, что дренаж пресной воды через ледовую толщу и ее аккумулирование подо льдом играют важную роль при транспорте химических соединений и биологических организмов под лед с возможным последующим их вмораживанием благодаря росту ложного дна [14].

1. Математическая модель процесса. Рассмотрим процесс направленного затвердевания ложного дна с двухфазной зоной вдоль пространственной оси z и встречный ему фронтальный процесс замерзания льда от границы с атмосферой (рис. 2).

Замерзание льда вниз от границы z = 0 моделируется плоским фронтом, поскольку этот процесс идёт в условиях слабой солёности морской воды. Рассмотрим систему, когда в ней уже образовалась тонкая корочка ложного дна (в природе этот процесс может занимать несколько часов). Области a(t) < z < h(t), z < b(t) и b(t) < z < a(t) соответственно заполнены просочившейся талой водой, морской водой и ложным дном, представляющим собой двухфазный слой (здесь a(t) и b(t) — движущиеся границы «талая вода – двухфазная зона» и «двухфазная зона – морская вода» соответственно, а граница h(t) разделяет лёд и талую воду). Будем рассматривать двухфазную зону как квазиравновесную [15, 16]. Поскольку время релаксации температурного поля намного меньше всех остальных характерных времен процесса, будем описывать температурное поле в слое льда и двухфазной зоне линейными функциями пространственной координаты:

$$T_i(z,t) = T_{\text{atm}}(t) \left(1 - \frac{z}{h(t)}\right), \qquad h(t) < z < 0,$$
 (1)

$$T_m(z,t) = \frac{T_a(t)(z-b(t)) + T_b(t)(a(t)-z)}{a(t) - b(t)}, \quad b(t) < z < a(t),$$
(2)

где T_a и T_b — температуры на границах a и b, а $T_{\text{атм}}$ — температура на поверхности z = 0 (линейный вид температурного поля подтверждается лабораторными экспериментами [1]). Это означает, что распределения температуры и доли твёрдой фазы $\varphi(z,t)$ в двухфазной зоне претерпевают лишь незначительные изменения со временем. Теоретически этот вывод был продемонстрирован в работах [17,18] при изучении затвердевания молодого льда в трещинах многолетних льдов.

Учитывая, что распределение солёности в двухфазной зоне $S_m(z,t)$ также является практически линейной функцией z [1], а также слабые временные



Рис. 2. Схема процесса кристаллизации ложного дна вверх в направлении атмосферы при одновременном замерзании слоя льда вниз в направлении океана

и пространственные изменения доли твёрдой фазы в двухфазной зоне, будем использовать уравнение Шейла [19]:

$$\frac{\partial}{\partial t}((1-\varphi)S_m) = 0, \quad b(t) < z < a(t).$$
(3)

Уравнение (3) подразумевает, что вся соль вытесняется льдом в жидкую часть двухфазной зоны. Вследствие того, что двухфазная зона считается термодинамически равновесной, температура и солёность в ней связаны уравнением линии ликвидус:

$$T_m(z,t) = -mS_m(z,t), \quad b(t) < z < a(t),$$
(4)

где *m* — постоянный коэффициент наклона ликвидуса.

Лабораторные эксперименты работы [1] показывают, что потоки тепла и массы на границе a(t) со стороны пресной воды много меньше своих аналогов со стороны двухфазной зоны (ложного дна). Это позволяет записать граничные условия баланса тепла и массы при z = a(t) в следующем виде:

$$L_V \varphi_a \frac{da}{dt} = (k_i \varphi_a + k_w (1 - \varphi_a)) \frac{\partial T_m}{\partial z}, \qquad (5)$$

$$S_a \frac{da}{dt} = -D \frac{\partial S_m}{\partial z},\tag{6}$$

где L_V — скрытая теплота кристаллизации, D — коэффициент диффузии соли в воде, а k_i и k_w — коэффициенты теплопроводности льда и воды. Условие (6) означает, что скорость диффузионного отвода соли из двухфазной зоны в талую воду совпадает со скоростью движения границы a(t) (это предположение подтверждается лабораторными экспериментами [1], которые свидетельствуют о незначительной солёности в слое талой воды).

Поскольку скорость движения границы z = b(t) определяется турбулентными течениями жидкости в океане, запишем пограничные условия при z = b(t) в следующем виде [8, 20, 21]:

$$L_V \varphi_b \frac{db}{dt} = (k_i \varphi_b + k_w (1 - \varphi_b)) \frac{\partial T_m}{\partial z} + \alpha_h \rho_w c_{pw} u (T_\infty - T_b), \tag{7}$$

$$S_b \varphi_b \frac{db}{dt} = \alpha_s u (S_\infty - S_b), \tag{8}$$

где T_{∞} и S_{∞} — температура и солёность морской воды вдали от ложного дна; u — скорость трения; ρ_w и c_{pw} — плотность и теплоёмкость воды; α_h и α_s — коэффициенты турбулентного переноса тепла и массы. Отношение этих коэффициентов определяется через отношение коэффициентов температуропроводности (κ) и диффузии (D): $\alpha_h/\alpha_s = (\kappa/D)^n$, где 2/3 < n < 4/5 [22].

Для замыкания математической модели будем считать, что температура в талой воде близка к нулю, а на границе z = h(t) выполняется условие теплового баланса

$$k_i \frac{\partial T_i}{\partial z} = L_V \frac{dh}{dt}.$$
(9)

Сформулированная модель (1)–(9) представляет собой нелинейную систему уравнений и граничных условий с движущимися границами фазовых превращений. Перейдём теперь к вопросу построения аналитических решений этой модели.

2. Нелинейная динамика процесса. Для определения закона движения границы «лёд – талая вода» подставим распределение температуры (1) в граничное условие (9). После интегрирования получим

$$h(t) = -\sqrt{h^2(0) - \frac{2k_i}{L_V} \int_0^t T_{\text{atm}}(\tau) d\tau}.$$
 (10)

Выражение (10) имеет такую же структуру решения, как и законы замерзания молодого льда в трещинах, найденные в работах [17, 18, 23].

Интегрирование уравнения (3) даёт распределение доли твёрдой фазы в двухфазной зоне:

$$\varphi(z,t) = 1 - \frac{(1 - \varphi_b)T_b}{T_m(z,t)},\tag{11}$$

где $T_m(z,t)$ определяется выражением (2). Комбинируя граничные условия (5), (6) и принимая во внимание уравнение (4), находим долю твёрдой фазы на границе z = a(t):

$$\varphi_a(t) = \frac{KT_a(t)}{(K-1)T_a(t) - T_p}, \quad K = \frac{k_w}{k_i}, \quad T_p = \frac{DL_V}{k_i}.$$
 (12)

Подставляя теперь $\varphi_a(t)$ из (12) в (11) при z = a(t), выражаем температуру T_b на границе «двухфазная зона – океан» через температуру $T_a(t)$ на границе «двухфазная зона – талая вода»:

$$T_b(T_a(t)) = \frac{T_a^2(t) + T_a(t)T_p}{(\varphi_b - 1)((K - 1)T_a(t) - T_p)}.$$
(13)

Поскольку тепловой и концентрационный потоки пропорциональны в соответствии с выражением (4), можно получить систему уравнений для определения протяжённости ложного дна w(t) = a(t) - b(t) и температуры $T_a(t)$. Для этого приравняем производные db/dt из уравнений (7) и (8) и вычтем производные, стоящие в левых частях уравнений (5) и (7). В результате будем иметь:

$$a(t) - b(t) = S_1(T_a(t), t),$$
 (14)

$$\frac{d(a(t) - b(t))}{dt} = \frac{S_2(T_a(t))}{a - b} + S_3(T_a(t), t),$$
(15)

где

$$S_1(T_a(t),t) = -\frac{(k_i\varphi_b + k_w(1-\varphi_b))(T_a - T_b)T_b}{\alpha_s u L_V(T_b + mS_\infty) + \alpha_h \rho_w c_{pw} u(T_\infty - T_b)T_b},$$

$$S_2(T_a(t)) = \frac{(k_i\varphi_a + k_w(1-\varphi_a))(T_a - T_b)}{L_V\varphi_a}, \quad S_3(T_a(t),t) = \frac{\alpha_s u(T_b + mS_\infty)}{T_b\varphi_b}.$$

94

В этих выражениях аргументы функций S_1 , S_2 и S_3 могут зависеть от времени в явном виде (не только с помощью зависимости $T_a(t)$), если u, T_{∞} или S_{∞} зависят от времени.

Если значения параметров u, T_{∞} или S_{∞} постоянны (или когда эти параметры, зависящие от времени, заменены своими средними величинами), то Q_1, Q_2 и Q_3 зависят от времени только через функцию $T_a(t)$. Подставляя a(t) - b(t) из (14) в (15), находим явный вид обратной функции $t(T_a)$:

$$t(T_a) = \int_{T_{a0}}^{T_a} F(T_a) dT_a, \quad F(T_a) = \frac{dS_1(T_a)}{dT_a} \frac{S_1(T_a)}{S_2(T_a) + S_1(T_a)S_3(T_a)}.$$
 (16)

Начальная температура T_{a0} (определённая при t = 0) легко находится из решения алгебраического уравнения (14) при условии, что начальные координаты a(0) и b(0) известны.

Рассмотрим теперь более общую ситуацию, когда хотя бы одна из величин u, T_{∞} или S_{∞} зависит от времени. В этом случае можно получить задачу Коппи для определения функции $T_a(t)$. Итак, подставляя a(t) - b(t) из (14) в (15), имеем

$$\frac{dT_a(t)}{dt} = f(T_a, t), \quad T_a(0) = T_{a0}, \tag{17}$$

где $f(T_a, t)$ — известная функция. Начальное условие T_{a0} , как и ранее, определяется уравнением (14).

Найдём теперь законы движения границ «двухфазная зона – океан» и «талая вода – двухфазная зона». Интегрируя выражение (8), находим временную зависимость границы между двухфазной зоной и океаном:

$$b(t) = b(0) - \int_0^t \frac{\alpha_s u(T_b(T_a) + mS_\infty)}{T_b(T_a)\varphi_b} dt,$$
(18)

где $T_b(T_a)$ и $T_a(t)$ определяются соотношениями (13), (16) и (17). Закон движения границы между талой водой и двухфазной зоной следует из выражения (14) и записывается в виде

$$a(t) = b(t) + S_1(T_a(t), t).$$
(19)

Таким образом, найденные зависимости дают аналитическое решение рассматриваемой проблемы.

Сравним теперь развиваемую модель с данными полевых наблюдений AIDJEX (детали эксперимента см., например, в работе [8]) и SHEBA (детали эксперимента см., например, в работах [8, 12, 13]). Поскольку доля твёрдой фазы φ_b на нижней границе ложного дна близка к единице, в расчётах она принималась равной 0,99. На рис. 3 показано сравнение экспериментальных и расчётных значений положения нижней границы двухфазной зоны, полученные с помощью выражения (18) для скорости трения, изображенной по данным работы [8] для полевых наблюдений AIDJEX. Здесь же изображен тепловой поток $J = \alpha_h \rho_w c_{pw} u (T_{\infty} - T_b)$, идущий от границы «ложное дно – океан» в глубину океана (это направление соответствует отрицательным значениям потока). Из рисунка видно, что тепловой поток идёт от теплой пресной воды в сторону холодного океана. На рис. 4 изображены скорость трения,



Рис. 3. Скорость трения по данным эксперимента AIDJEX в соответствии с работой [8]. Координата $b_1(t) = b(t) - b(0)$ нижней границы двухфазной зоны (ложного дна) в соответствии с разбросом данных полевых наблюдений AIDJEX и развиваемой теорией. Тепловой поток J(t) на границе «солёная вода – ложное дно» в зависимости от времени. Расчёт произведен на основе соотношения (17), термофизические параметры, использованные при расчётах, брались по данным работ [1,8]



Рис. 4. Скорость трения u(t) по данным эксперимента SHEBA в соответствии с работой [8]. Протяжённость w(t) двухфазной зоны (ложного дна) и тепловой поток J(t) на границе «солёная вода — ложное дно» в зависимости от времени, a(0) - b(0) = 1 см

временные осцилляции толщины двухфазной зоны (ложного дна) и тепловой поток, рассчитанные в соответствии с выражениями (17)–(19) для полевых наблюдений SHEBA.

Отметим, что возрастающая функция w(t) становится убывающей после 207-го дня 1998 года. Причиной этого является внезапный приход шторма, который явился причиной существенного увеличения скорости u(t). Его приход также привёл к возрастанию солёности вблизи нижней границы двухфазной зоны, что явилось причиной ее плавления и уменьшения протяжённости ложного дна (двухфазной зоны). Возрастание солёности в эти моменты времени приводит к понижению температуры фазового перехода ($T_b = -mS_b$) и к тому, что температура T_b становится меньше температуры океана T_{∞} . Последнее приводит к изменению знака теплового потока Ј (тепловой поток в такие моменты времени направлен от океана в сторону ложного дна). Рассматриваемая теория показывает, что тепловой поток может быть направлен как вверх, так и вниз в различное время процесса в зависимости от амплитуды колебаний скорости трения со средней величиной -12.9 Br/m^2 для экспериментов AIDJEX и -5,6 Вт/м² для экспериментов SHEBA. При этом величина указанного потока оказывается сравнима с другими вкладами в результирующий тепловой поток (например, с потоком солнечной радиации или

с колебаниями потока скрытого тепла, который вызван замерзанием морской воды в трещинах льда). Более детально эти процессы обсуждаются в работах [24,25].

На рис. 5 изображена динамика положений границ фазового превращения при различных температурах поверхности z = 0, когда происходит встречное замерзание льда: кристаллизация системы снизу с мигрирующим и увеличивающимся по толщине ложным дном и затвердевание системы сверху во фронтальном режиме при уменьшении атмосферной температуры. Такой процесс приведет к полному сращиванию обоих вертикальных слоев льда (верхнего и нижнего) в момент времени встречи границ фазового перехода «лёд – талая вода» и «талая вода — ложное дно» (эти времена отмечены на рисунке для различных значений температуры на границе z = 0). При этом более низкие значения атмосферной температуры приводят к более быстрому протеканию процесса смерзания ледяных пластов.



Рис. 5. Координаты границ ложного дна a(t) и b(t) (штриховая и сплошная линии соответственно) и положения границы h(t) (штрих-пунктирные линии) при различных температурах $T_{\text{атм}}$ (цифры у кривых). Вертикальные линии показывают времена замерзания слоя льда (времена встречи границ a(t) и h(t))

Заключение. На рис. 3 работы [7] приведены пробы структуры образовавшегося льда с учётом процессов замерзания с ложным дном. Эти пробы демонстрируют, что эволюция ложного дна (двухфазной зоны) порождает столбчато-гранулированную структуру льда, а над талой водой находится слой льда чисто столбчатой структуры. При этом на различных глубинах наблюдаются структурные переходы от столбчатого к столбчато-гранулированному типу. Такие переходы могут сформироваться при завершении процессов смерзания пластов (рис. 5). Если принять во внимание, что в природе встречаются располагающиеся друг под другом мигрирующие структуры ложного дна, и быстроту протекания процессов кристаллизации (см., например, рис. 5), многие структурные переходы во льду можно интерпретировать как результат взаимодействия фазовых переходов (замерзание льда сверху и снизу во встречном направлении).

Работа частично выполнена при финансовой поддержке ФЦП «Научные и научнопедагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы и РФФИ (проекты №№ 10–01–96045, 11–01–00137).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- Martin S., Kauffman P. The evolution of under-ice melt ponds, or double diffusion at the freezing point // J. Fluid Mech., 1974. Vol. 64, no. 3. Pp. 507–528.
- 2. Unterstainer N. Natural desalination and equilibrium salinity profile of old sea ice / In: Physics of snow and ice. Vol. 1; ed. H. Oura. Hokkaido University, 1967. Pp. 569–577.
- Hanson A. M. Studies of the mass budget of Arctic pack-ice floes // J. Glaciology, 1965. Vol. 5, no. 41. Pp. 701–709.
- 4. Nansen F. Farthest North. New York: Harper & Brothers, 1897.
- 5. Зубов Н. Н. Льды Арктики. М.: Изд-во Главсевморпути, 1945. 360 с.; англ. пер.: Zubov N. N. Artic ice. San Diego, Calif.: U.S. Navy Electronics Laboratory, 1963. 491 pp.
- Unterstainer N., Badgley F. I. Preliminary results of thermal budget studies on Arctic pack ice during summer and autumn / In: Arctic sea ice. Washington: Nat. Acad. Sci., Nat. Res. Counc, 1958. Pp. 85–92.
- Eicken H. Structure of under-ice melt ponds in the central Arctic and their effect on, the sea-ice cover // Limnol. Oceanogr., 1994. Vol. 39, no. 3. Pp. 682–694.
- Notz D., McPhee M. G., Worster M. G., Maykut G. A., Schlünzen, K. H., Eicken H. Impact of underwater-ice evolution on Arctic summer sea ice // J. Geophys. Res., 2003. Vol. 108, no. C7, 3223. 12 pp.
- Jeffries M. O., Schwartz K., Morris K., Veazey A. D., Krouse H. R., Cushing S. Evidence for platelet ice accretion in Arctic sea ice development // J. Geophys. Res, 1995. Vol. 100, no. C6. Pp. 10,905–10,914.
- Wadhams P. The underside of Arctic sea ice imaged by sidescan sonar // Nature, 1988. Vol. 333. Pp. 161–164.
- Wadhams P., Martin S. Processes determining the bottom topography of multiyear Arctic sea ice / In: Sea ice properties and processes; eds. W. F. Weeks, S. F. Ackley. Hanover, 1990. Pp. 136–141.
- Eicken H., Krouse H. R., Kadko D., Perovich D. K. Tracer studies of pathways and rates of meltwater transport through Arctic summer sea ice // J. Geophys. Res., 2002. Vol. 107, no. C10, 8046. 20 pp.
- Perovich D. K. et al. Year on Ice Gives Climate Insights // EOS Trans. AGU, 1999. Vol. 80, no. 41. Pp. 481, 485–486.
- Gradinger R. Occurrence of an algal bloom under Arctic pack ice // MEPS, 1996. Vol. 131. Pp. 301–305.
- Hills R. N., Loper D. E., Roberts P. H. A thermodynamically consistent model of a mushy zone // Q. J. Mech. Appl. Math., 1983. Vol. 36, no. 4. Pp. 505–540.
- 16. Buyevich Yu. A., Alexandrov D. V., Mansurov V. V. Macrokinetics of crystallization. New York Wallingford: Begell House Inc., 2001. 183 pp.
- 17. Alexandrov D. V., Malygin A. P., Alexandrova I. V. Solidification of leads: approximate solutions of non-linear problem // Ann. Glaciol, 2006. Vol. 44, no. 1. Pp. 118–122.
- 18. Александров Д. В., Малыгин А. П. Аналитическое описание кристаллизации морской воды в трещинах льдов и их влияние на теплообмен между океаном и атмосферой // Докл. РАН, 2006. Т. 411, № 3. С. 390–394; англ. пер.: Alexandrov D. V., Malygin A. P. Analytical description of seawater crystallization in ice fissures and their influence on heat exchange between the ocean and the atmosphere // Doklady Earth Sciences, 2006. Vol. 411, no. 2. Pp. 1407–1411.
- Scheil E. Bemerkungen zur schichtkiistallbildung // Zeitschrift f
 ür Metallkunde, 1942. Vol. 34. Pp. 70–72.
- McPhee M. G. The upper Ocean / In: The Geophysics of Sea Ice / NATO ASI series. Series B, Physics, 146; ed. N. Untersteiner. New York: Plenum Press, 1986. Pp. 133–141.
- McPhee M. G., Maykut G. A., Morison J. H. Dynamics and Thermodynamics of the Ice/Upper Ocean System in the Marginal Ice Zone of the Greenland Sea // J. Geophys. Res., 1987. Vol. 92, no. C7. Pp. 7017–7031.

- Yaglom A. M., Kader B. A. Heat and mass transfer between a rough wall and turbulent fluid flow at high Reynolds and Péclet numbers // J. Fluid Mech., 1974. Vol. 62, no. 3. Pp. 601– 623.
- Alexandrov D. V., Aseev D. L., Nizovtseva I. G., Huang H.-N., Lee D. Nonlinear dynamics of directional solidification with a mushy layer. Analytic solutions of the problem // Int. J. Heat Mass Transfer, 2007. Vol. 50, no. 17–18. Pp. 3616–3623.
- Александров Д. В., Низовцева И. Г. Нелинейная динамика ложного дна при замерзании морской воды // Докл. РАН, 2008. Т. 419, № 2. С. 262–265; англ. пер.: Aleksandrov D. V., Nizovtseva I. G. Nonlinear dynamics of the false bottom during seawater freezing // Dokl. Earth Sci., 2008. Vol. 419, no. 2. Pp. 359–362.
- Alexandrov D. V., Nizovtseva I. G. To the theory of underwater ice evolution, or nonlinear dynamics of "false bottoms" // Int. J. Heat Mass Transfer, 2008. Vol. 51, no. 21–22. Pp. 5204–5208.

Поступила в редакцию $12/{\rm IX}/2010;$ в окончательном варианте — $12/{\rm VII}/2011.$

MSC: 86A05; 86A40, 76T99, 35Q79, 35Q35

AN INFLUENCE OF THE FALSE BOTTOM ON THE NONLINEAR DYNAMICS OF THE WATER FREEZING PROCESS

I. G. Nizovtseva, D. V. Aleksandrov

Ural State University,

51, Pr. Lenina, Ekaterinburg, 620083.

E-mails: nizovtseva.irina@gmail.com, dmitri.alexandrov@usu.ru

The current paper casts the light on the processes of structural-phase transitions during the freezing salt water, including the false bottom effects. A nonlinear mathematical model of heat and mass transfer was obtained. It takes into account the presence of three moving boundaries of phase transition and turbulent fluid flows from the ocean side by the surface of the false bottom. The exact analytical solutions of the nonlinear model were obtained — in their turn, they takes into account the time dependence of temperature and salinity at the depth and fluctuations of friction velocity. The distribution of temperature and salinity, the concentration of solids, the laws of motion of the boundaries of the phase transition, "salt water — the two-phase zone", "two-phase zone — melted water" and "melt-water — ice" were found. The heat flux at the lower boundary of a false bottom was specified. The latter can change its direction at the time oscillations of the sea water temperature and friction velocity. Also it was shown, that structural transitions in the ice thickness are strictly associated with the processes of evolution of a false bottom.

Key words: crystallization, heat and mass transfer, Stefan problem, two-phase zone, false bottom.

Original article submitted 12/IX/2010; revision submitted 12/VII/2011.

Irina G. Nizovtseva (Ph. D. (Phys. & Math.)), Researcher, Lab. of Mathematical Modeling of Physical and Chemical Processes in Multiphase Media. *Dmitriy V. Aleksandrov* (Dr. Sci. (Phys. & Math.)), Professor, Dept. of Mathematical Physics.