

УДК 517.958:531.72

АНАЛИЗ ПРОДУКТИВНОСТИ ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДОБЫВАЮЩИХ СКВАЖИН

П. В. Ротерс

Самарский государственный университет,
443011, Россия, Самара, ул. Академика Павлова, 1.

E-mail: roters@ssu.samara.ru

Представлена математическая модель, позволяющая анализировать продуктивность систем добывающих скважин. Система скважин моделируется плоской бесконечной двоякопериодической решёткой точечных стоков одинаковой мощности. Также дано аналитическое представление для форм-фактора Дитца, которое хорошо согласуется с результатами численного вычисления при помощи метода мнимых источников.

Ключевые слова: фильтрация, нефтедобыча, коэффициент продуктивности.

Для оценки производительности системы скважин используется так называемый коэффициент продуктивности (productivity index PI), который определяется отношением скорости притока к депрессии давления [1]:

$$PI = \frac{Q}{\bar{p} - p_w},$$

где Q — дебит скважины, \bar{p} — среднее давление в резервуаре, p_w — давление в стволе скважины.

Коэффициент продуктивности зависит только от гидродинамических характеристик резервуара и расположения скважин в нем.

В нефтяной инженерии резервуаров обычно используется формула, в которой среднее давление \bar{p} выражается через безразмерный коэффициент формы контура питания скважины C_A (Dietz shape factor) [1] следующим образом [2]:

$$\bar{p} - p_w = \frac{Q}{4\pi\chi} \ln \frac{4\Delta}{\gamma C_A r_w^2},$$

где $\gamma = e^c = 1,781$; $c = 0,577$ — постоянная Эйлера. Он позволяет определить среднее давление в области питания скважины в зависимости от геометрической формы этой области. В работе [2] величина коэффициента формы была вычислена для ряда решёток (прямоугольная, равнобедренно-треугольная, ромбическая) и сравнена с коэффициентом формы для идеального кругового контура.

Аналогично работам из области вихревой динамики [3, 4] для двоякопериодических систем скважин была построена математическая модель с привлечением эллиптических функций Вейерштрасса. Данная модель задает комплексный потенциал, являющийся двоякопериодической функцией, в виде

$$\varphi(z, \bar{z}) = \ln \sigma(z) + \frac{\alpha z^2}{2} - \frac{\pi}{2\Delta} z \bar{z},$$

где $\sigma(z)$ — сигма-функция Вейерштрасса, $\alpha = \pi/2 - 2\eta_1$, $\eta_1 = \zeta(\omega_1/2)$ — квазипериод дзета-функции Вейерштрасса, Δ — площадь ячейки для выбранного типа решётки. Подробное описание модели представлено в статье [5].

Вещественная часть данного потенциала определяет поле давления, а его производная — поле скоростей. Данная математическая модель позволила вычислить

Павел Вячеславович Ротерс, аспирант, каф. безопасности информационных систем.

распределения поля давления и поля скоростей в решётках произвольных конфигураций и определить контуры питания скважин, расположенных в узлах решётки.

В итоге для коэффициента продуктивности скважины было найдено явное выражение:

$$PI = 2 / \ln\left(\frac{4\Delta}{\gamma C_A r_w^2}\right), \tag{1}$$

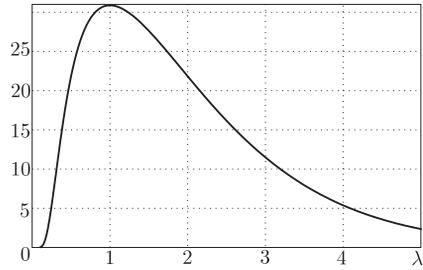
где r_w — радиус скважины.

Для одной скважины, расположенной в параллелограмме периодов, коэффициент формы может быть рассчитан следующим образом:

$$C_A(\tau) = \frac{16\pi^2}{\gamma} \operatorname{Im}\tau \left| (qq_1)^{1/6} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})^2 (1 - q_1^{2n})^2 \right|, \tag{2}$$

где $\tau = \omega_1/\omega_2 = \lambda e^{i\theta}$ — отношение периодов решётки, $q = e^{i\pi\tau}$, $q_1 = e^{-i\pi/\tau}$ — параметры Якоби. Результаты вычислений C_A для прямоугольных решёток представлены на графике (см. рисунок). Максимальное значение соответствует квадратной решётке.

В случае, когда в параллелограмме периодов расположены две скважины с одинаковым дебитом Q , коэффициент формы каждой из них может быть найден благодаря установленной зависимости:



Значения C_A для прямоугольных решёток, $\theta = \pi/2$

$$C_A^{(2)}(\tau) = \frac{\gamma R_{12}^2}{8 \Delta} \left(C_A^{(1)}(\tau) \right)^2,$$

где $C_A^{(2)}$ — коэффициент формы для одной из двух скважин, расположенных в параллелограмме периодов; $C_A^{(1)}$ — коэффициент формы для одной скважины в параллелограмме периодов с дебитом $2Q$; R_{12} — выражает расстояние между двумя скважинами:

$$\ln R_{12} = \operatorname{Re} \ln \left(\sigma(z_1 - z_2) - \frac{\alpha(z_1 - z_2)^2}{2} \right) - \frac{\pi}{2\Delta} |z_1 - z_2|^2.$$

Значения коэффициента C_A полностью совпали со значениями, вычисленными Дитцом и Писманом [6] путём численного суммирования бесконечных условно-сходящихся рядов для некоторых типов решёток. Результаты представлены в таблице.

Форма	C_A , Дитц [2]	C_A , Писман [6]	полученный C_A
	30,9	30,88	30,88
	31,6	—	31,54
	27,6	—	27,84
	22,6	21,84	21,84
	5,38	5,38	5,38
	2,36	2,36	2,36

Таким образом, полученное представление для коэффициента продуктивности (1), (2) позволяет анализировать производительность двоякопериодических систем добывающих скважин для решёток произвольных конфигураций.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Dake L. P.* The Practice of Reservoir Engineering / Developments in Petroleum Science. Vol. 36. Amsterdam: Elsevier, 2001. 570 pp.; русск. пер.: *Дейк Л. П.* Практический инжиниринг резервуаров. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008. 668 с.
2. *Dietz D. N.* Determination of Average Reservoir Pressure From Build-Up Surveys // *J. Pet. Technol.*, 1965. Vol. 27, no. 8. Pp. 955–959.
3. *O’Neil K. A.* On the Hamiltonian dynamics of vortex lattices // *J. Math. Phys.*, 1989. Vol. 30, no. 6. Pp. 1373–1381; русск. пер.: *О’Нейл К. А.* О гамильтоновой динамике вихревых решёток / В сб.: *Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей*; ред. А. В. Борисов, И. С. Мамаев, М. А. Соколовский. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. С. 336–353.
4. *Ткаченко В. К.* О вихревых решётках // *ЖЭТФ*, 1965. Т. 49, № 6(12). С. 1875–1883; англ. пер.: *Tkachenko V. K.* On vortex lattices // *Sov. Phys. JETP*, 1966. Vol. 22. Pp. 1282–1286.
5. *Астафьев В. И., Ротерс П. В.* Моделирование двоякопериодических систем добывающих скважин // *Вестн. СамГУ*, 2010. № 78 (4). С. 5–11. [*Astafiev V. I., Roters P. V.* Modeling of doubly-periodic system of producing wells // *Vestn. SamGU*, 2010. no. 78 (4). Pp. 5–11].
6. *Peaceman D. W.* Recalculation of Dietz Shape Factor for Rectangles: Document ID 21256-MS, 1990. 10 pp.

Поступила в редакцию 20/V/2011;
в окончательном варианте — 30/VI/2011.

MSC: 76S05

PRODUCTIVITY ANALYSIS OF DOUBLY-PERIODIC SYSTEMS OF PRODUCTION WELLS

P. V. Roters

Samara State University,
1, Academician Pavlov st., Samara, 443011, Russia.

E-mail: roters@ssu.samara.ru

The article presents a mathematical model, which allows to analyze the productivity of systems of production wells. System of wells is modeled by a flat infinite doubly periodic lattice of point sinks of equal power. Also an analytic representation for the Dietz’s shape factor is presented, which agrees with numerical calculations by the method of imaginary producing wells.

Key words: *filtration, oil production, productivity index.*

Original article submitted 20/V/2011;
revision submitted 30/VI/2011.