УДК 517.968.4

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ВЕСОВЫМИ ОПЕРАТОРАМИ ТИПА ПОТЕНЦИАЛА В ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА

С. Н. Асхабов

Чеченский государственный университет,
364907, Грозный, ул. А. Шерипова, 32.

E-mail: askhabov@yandex.ru

Методом монотонных операторов для различных классов нелинейных уравнений с весовыми операторами типа потенциала доказаны глобальные теоремы о существовании, единственности и оценках решений в пространствах Лебега.

Ключевые слова: *нелинейные уравнения, оператор типа потенциала, монотонный оператор.*

В вещественных пространствах $L_p(R^1) = L_p(-\infty, \infty)$, $1 < p < \infty$, рассматриваются нелинейные интегральные уравнения вида

$$u(x) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[a(x) - a(t)]\, F(t, u(t))}{|x-t|^{1-\alpha}} dt = f(x), \tag{1}$$

$$u(x) + F\left(x, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[a(x) - a(t)]\, u(t)}{|x-t|^{1-\alpha}} dt\right) = f(x), \tag{2}$$

для которых методом монотонных (по Браудеру—Минти) операторов (см., например, [1]) доказываются глобальные теоремы о существовании, единственности и оценках решений.

Для упрощения записей введём следующие обозначения:

$$L_p(R^1) = L_p, \quad \|\cdot\|_{L_p(R^1)} = \|\cdot\|_p, \quad p' = \frac{p}{p-1}, \quad \langle u, v\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\, v(x)\, dx,$$

$$(I^\alpha u)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t)\, dt}{|x-t|^{1-\alpha}}, \qquad (A^\alpha u)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[a(x) - a(t)]\, u(t)}{|x-t|^{1-\alpha}} dt.$$

В силу известной теоремы Харди—Литтлвуда (см., например, [1]) оператор типа потенциала I^α действует непрерывно из L_p в $L_{p/(1-\alpha p)}$, если $0 < \alpha < 1$ и $1 < p < 1/\alpha$, причём

$$\|I^\alpha u\|_{p/(1-\alpha p)} \leqslant \|I^\alpha\|_{p\to p/(1-\alpha p)} \|u\|_p \qquad \forall u \in L_p, \tag{3}$$

где $\|I^\alpha\|_{p\to p/(1-\alpha p)}$ есть норма оператора $I^\alpha : L_p \to L_{p/(1-\alpha p)}$.

Справедливы следующие (двойственные) леммы.

Лемма 1. *Пусть $0 < \alpha < 1$, $2/(1+\alpha) < p < 1/\alpha$ и $a \in L_{p/[p(1+\alpha)-2]}$. Тогда оператор A^α действует непрерывно из L_p в $L_{p'}$, причём*

$$\|A^\alpha u\|_{p'} \leqslant 2\, \|I^\alpha\|_{p\to p/(1-\alpha p)} \|a\|_{p/[p(1+\alpha)-2]} \|u\|_p, \tag{4}$$

$$\langle A^\alpha u, u\rangle = 0 \qquad \forall u(x) \in L_p. \tag{5}$$

Султан Нажмудинович Асхабов (д.ф.-м.н., доц.), декан, факультет математики и компьютерных технологий.

Лемма 2. *Пусть* $0 < \alpha < 1$, $1/(1-\alpha) < p < 2/(1-\alpha)$ *и* $a \in L_{p/[2-p(1-\alpha)]}$. *Тогда оператор* A^α *действует непрерывно из* $L_{p'}$ *в* L_p, *причём*

$$\|A^\alpha u\|_p \leqslant 2\,\|I^\alpha\|_{p/(1+\alpha\, p)\to p}\|a\|_{p/[2-p(1-\alpha)]}\|u\|_{p'}, \tag{6}$$

$$\langle A^\alpha u, u\rangle = 0 \qquad \forall u(x) \in L_{p'}. \tag{7}$$

Лемма 1 доказана в [3]. Докажем лемму 2.

Доказательство. Пусть $u \in L_{p'}$. Тогда, применяя неравенство Гёльдера с показателями $(1+\alpha\, p)/(p-1)$ и $(1+\alpha\, p)/[2-p(1-\alpha)]$, имеем

$$\|a\cdot u\|_{p/(1+\alpha\, p)} \leqslant \|a\|_{p/[2-p(1-\alpha)]}\|u\|_{p'}. \tag{8}$$

Итак, $a\cdot u \in L_{p/(1+\alpha\, p)}$. Так как $1 < p/(1+\alpha\, p) < 1/\alpha$ (первое неравенство равносильно условию, что $1/(1-\alpha) < p$, а второе — очевидно), согласно теореме Харди—Литтлвуда $I^\alpha(a\, u) \in L_p$, поскольку

$$\frac{\frac{p}{1+\alpha\, p}}{1-\frac{\alpha\, p}{1+\alpha\, p}} = p,$$

причём

$$\|I^\alpha(a\cdot u)\|_p \leqslant \|I^\alpha\|_{p/(1+\alpha\, p)\to p}\|a\cdot u\|_{p/(1+\alpha\, p)}.$$

Воспользовавшись оценкой (8), из последнего неравенства получаем

$$\|I^\alpha(a\cdot u)\|_p \leqslant \|I^\alpha\|_{p/(1+\alpha\, p)\to p}\|a\|_{p/[2-p(1-\alpha)]}\|u\|_{p'}. \tag{9}$$

Обозначим $I^\alpha u = v$. Так как $u \in L_{p'}$ и $1 < p' < 1/\alpha$ (первое неравенство очевидно, а второе равносильно условию, что $1/(1-\alpha) < p$), согласно теореме Харди—Литтлвуда $I^\alpha u \in L_q$, где

$$q = \frac{p'}{1-\alpha\, p'} = \frac{p}{p(1-\alpha)-1},$$

т. е. $v = I^\alpha u \in L_{p/[p(1-\alpha)-1]}$, $\forall u \in L_{p'}$, причём, в силу неравенства (3),

$$\|I^\alpha u\|_{p/[p(1-\alpha)-1]} \leqslant \|I^\alpha\|_{p/(p-1)\to p/[p(1-\alpha)-1]}\|u\|_{p'}. \tag{10}$$

Далее, применяя неравенство Гёльдера с показателями $1/[p(1-\alpha)-1]$ и $1/[2-p(1-\alpha)]$, имеем

$$\|a\cdot I^\alpha u\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |a(x)|^p|v(x)|^p dx\right)^{1/p} \leqslant \|a\|_{p/[2-p(1-\alpha)]}\|I^\alpha u\|_{p/[p(1-\alpha)-1]}.$$

Поэтому с учётом оценки (10) сразу получаем

$$\|a\cdot I^\alpha u\|_p \leqslant \|I^\alpha\|_{p/(p-1)\to p/[p(1-\alpha)-1]}\|a\|_{p/[2-p(1-\alpha)]}\|u\|_{p'}. \tag{11}$$

Так как $A^\alpha u = a\cdot I^\alpha u - I^\alpha(a\cdot u)$, из неравенств (9) и (11) следует, что оператор A^α действует непрерывно из $L_{p'}$ в L_p. Используя для оценки $\|A^\alpha u\|_p$ сначала неравенство Минковского, затем оценки (9), (11) и очевидное (см., например, [2, с. 247]) равенство $\|I^\alpha\|_{p\to p/(1-\alpha\, p)} = \|I^\alpha\|_{p/[p(1+\alpha)-1]\to p'}$ (поскольку I^α самосопряжённый оператор), легко получаем неравенство (6)).

Осталось доказать равенство (7). Так как оператор I^α является симметрическим

$$\langle A^\alpha u, u\rangle = \langle a\, I^\alpha u, u\rangle - \langle I^\alpha(a\, u), u\rangle = \langle I^\alpha u, a\, u\rangle - \langle a\, u, I^\alpha u\rangle = 0,$$

что и требовалось доказать. □

Приступим теперь к исследованию нелинейного уравнения (1), содержащего оператор A^α. Обозначим через L_p^+ множество всех неотрицательных функций из L_p. Всюду далее предполагается, что функция $F(x,\,t)$, порождающая оператор Немыцкого $Fu = F[x,\,u(x)]$, определена при $x \in \mathbb{R}^1$, $t \in \mathbb{R}^1$ и удовлетворяет условиям Каратеодори: она измерима по x при каждом фиксированном t и непрерывна по t почти для всех x.

Теорема 1. *Пусть $0 < \alpha < 1$, $1/(1-\alpha) < p < 2/(1-\alpha)$ и $a \in L_{p/[2-p(1-\alpha)]}$. Если нелинейность $F(x,\,t)$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) $|F(x,\,t)| \leqslant c(x) + d_1\,|t|^{p-1}$, *где* $c(x) \in L_{p'}^+$, $d_1 > 0$;

2) $F(x,\,t)$ *строго возрастает по t почти при каждом фиксированном x;*

3) $F(x,\,t)\cdot t \geqslant d_2|t|^p - D(x)$, *где* $D(x) \in L_1^+$, $d_2 > 0$,

то уравнение (1) имеет единственное решение $u^* \in L_p$ при любом $f \in L_p$. Кроме того, если условия 1) и 3) выполнены при $c(x) = D(x) = 0$, то справедлива оценка

$$\|u^*\|_p \leqslant d_1 d_2^{-1}\,\|f\|_p. \tag{12}$$

Доказательство. Из условий 1)–3) в силу теорем 2.1, 2.2 и оценки (2.3) из [1] вытекает, что оператор Немыцкого F, порождённый функцией $F(x,\,t)$, отображает пространство L_p на сопряжённое с ним пространство $L_{p'}$, непрерывен, строго монотонен и коэрцитивен. Поэтому в силу леммы 2.1 из [1] существует обратный оператор F^{-1}, отображающий $L_{p'}$ на L_p, хеминепрерывный, строго монотонный и коэрцитивный. Из леммы 2 вытекает, что оператор A^α действует из $L_{p'}$ в L_p, непрерывен и положителен. Значит, оператор $\Phi = F^{-1} + A^\alpha$ отображает $L_{p'}$ на L_p, хеминепрерывен, строго монотонен и коэрцитивен. Следовательно, по теореме Браудера—Минти (см. теорема 1.1 из [1]), уравнение $F^{-1}v + A^\alpha v = f$ имеет единственное решение $v^* \in L_{p'}$. Но тогда непосредственно проверяется, что $u^* = F^{-1}v^* \in L_p$ является решением уравнения $u + A^\alpha Fu = f$, т.е. данного уравнения (1), и это решение u^* является единственным в L_p (что легко доказывается методом от противного).

Осталось доказать оценку (12). Используя условия 1) и 3) при $c(x) = D(x) = 0$, равенство (7) и равенство $u^* + A^\alpha F u^* = f$, имеем

$$d_2\|u^*\|_p^p \leqslant \langle u^*, Fu^*\rangle = \langle u^* + A^\alpha F u^*, Fu^*\rangle = \langle f, Fu^*\rangle \leqslant$$
$$\leqslant d_1\|f\|_p\|Fu^*\|_{p'} \leqslant d_1\|f\|_p\|u^*\|_p^{p-1},$$

откуда непосредственно получаем оценку (12). □

Следствие 1.*Если $1/2 < \alpha < 3/4$ и $a \in L_{2/(2\alpha-1)}$, то при любом $f \in L_4$ уравнение*

$$u(x) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[a(x)-a(t)]\,u^3(t)}{|x-t|^{1-\alpha}}dt = f(x)$$

имеет единственное решение $u^* \in L_4$, причём $\|u^*\|_4 \leqslant \|f\|_4$.

Следствие 2.*Если $0 < \alpha < 1/4$ и $a \in L_{2/(1+2\alpha)}$, то при любом $f \in L_{4/3}$ уравнение*

$$u(x) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[a(x)-a(t)]\,u^{1/3}(t)}{|x-t|^{1-\alpha}}dt = f(x)$$

имеет единственное решение $u^* \in L_{4/3}$, причём $\|u^*\|_{4/3} \leqslant \|f\|_{4/3}$.

В следующей теореме, относящейся к нелинейному уравнению (2), условия на нелинейность $F(x,\, t)$ подбираются так, чтобы порождаемый ею оператор Немыцкого F действовал непрерывно из $L_{p'}$ в L_p и был строго монотонным и коэрцитивным.

Теорема 2. *Пусть* $0<\alpha<1$, $2/(1+\alpha)<p<1/\alpha$ *и* $a\in L_{p/[p(1+\alpha)-2]}$. *Если нелинейность* $F(x,\, t)$ *удовлетворяет следующим условиям*:

4) $|F(x,\, t)|\leqslant g(x)+d_3\,|t|^{1/(p-1)}$, *где* $g(x)\in L_p^+$, $d_3>0$;

5) $F(x,\, t)$ *строго возрастает по* t *почти при каждом фиксированном* x;

6) $F(x,\, t)\cdot t\geqslant d_4|t|^{p/(p-1)}-D(x)$, *где* $D(x)\in L_1^+$, $d_4>0$,

то уравнение (2) *имеет единственное решение* $u^*\in L_p$ *при любом* $f\in L_p$. *Кроме того, если условия* 4) *и* 6) *выполнены при* $g(x)=D(x)=0$, *то справедлива оценка*

$$\|u^*-f\|_p\leqslant\left(2\,d_3^pd_4^{-1}\|I^\alpha\|_{p\to p/(1-\alpha p)}\|a\|_{p/[p(1+\alpha)-2]}\|f\|_p\right)^{1/(p-1)}. \tag{13}$$

Доказательство. Из леммы 1 и условий 4)–6) вытекает, соответственно, что весовой оператор типа потенциала A^α действует из L_p в $L_{p'}$, непрерывен и положителен, а оператор Немыцкого F действует, наоборот, из $L_{p'}$ в L_p, непрерывен, строго монотонен и коэрцитивен. Значит, по лемме 2.1 из [1], существует хеминепрерывный, строго монтонный, коэрцитивный обратный оператор F^{-1}, действующий из L_p в $L_{p'}$.

Запишем данное уравнение (2) в операторном виде: $u+FA^\alpha u=f$. Полагая в нём $u=f-v$ и применяя затем к обеим частям получившегося уравнения оператор F^{-1}, приходим к уравнению $\Phi v=A^\alpha f$, где $\Phi v=F^{-1}v+A^\alpha v$. В силу указанных выше свойств операторов A^α и F^{-1} оператор Φ действует из L_p в $L_{p'}$, хеминепрерывен, строго монотонен и коэрцитивен. Следовательно, по теореме Браудера—Минти (см. теорему 1.1 из [1]), уравнение $\Phi v=A^\alpha f$ имеет единственное решение $v^*\in L_p$. Но тогда непосредственно проверяется, что уравнение $u+FA^\alpha u=f$, т.е. данное уравнение (2), имеет решение $u^*=f-v^*\in L_p$. Единственность этого решения u^* легко устанавливается методом от противного.

Осталось доказать оценку (13). Воспользуемся равенствами $u^*+FA^\alpha u^*=f$, $F^{-1}v^*+A^\alpha v^*=A^\alpha f$, где $u^*=f-v^*$. Положим $w=F^{-1}v^*$. Тогда $Fw=v^*$. Используя условия 4) и 6) при $g(x)=D(x)=0$, неравенство (4), равенство (5) и неравенство Гёльдера, имеем

$$\begin{aligned}d_4\|w\|_{p'}^{p'}&\leqslant\langle Fw,w\rangle=\langle v^*,F^{-1}v^*\rangle=\langle v^*,F^{-1}v^*\rangle+\langle v^*,A^\alpha v^*\rangle=\\&=\langle v^*,A^\alpha f\rangle\leqslant\|v^*\|_p\|A^\alpha f\|_{p'}\leqslant 2\,\|I^\alpha\|_{p\to p/(1-\alpha\,p)}\|a\|_{p/[p(1+\alpha)-2]}\|f\|_p\|v^*\|_p=\\&=2\,\|I^\alpha\|_{p\to p/(1-\alpha\,p)}\|a\|_{p/[p(1+\alpha)-2]}\|f\|_p\|Fw\|_p\leqslant\\&\leqslant 2\,d_3\|I^\alpha\|_{p\to p/(1-\alpha\,p)}\|a\|_{p/[p(1+\alpha)-2]}\|f\|_p\|w\|_{p'}^{p'-1},\end{aligned}$$

откуда

$$\|w\|_{p'}\leqslant 2d_3d_4^{-1}\|I^\alpha\|_{p\to p/(1-\alpha\,p)}\|a\|_{p/[p(1+\alpha)-2]}\|f\|_p. \tag{14}$$

Так как $\|f-u^*\|_p=\|v^*\|_p=\|Fw\|_p\leqslant\|w\|_{p'}^{p'-1}$, используя оценку (14) с учётом, что $p'-1=1/(p-1)$, получаем

$$\|u^*-f\|_p\leqslant d_3\left(2\,d_3d_4^{-1}\|I^\alpha\|_{p\to p/(1-\alpha p)}\|a\|_{p/[p(1+\alpha)-2]}\|f\|_p\right)^{1/(p-1)},$$

что равносильно доказываемой оценке (13). $\square$

Следствие 3.*Если* $0<\alpha<1/4$ *и* $a\in L_{2/(1+2\alpha)}$, *то при любом* $f\in L_4$ *уравнение*

$$u(x)+\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{[a(x)-a(t)]\,u(t)}{|x-t|^{1-\alpha}}dt\right)^{1/3}=f(x)$$

имеет единственное решение $u^* \in L_4$, *причём*

$$\|u^* - f\|_4 \leqslant \left(2\,\|I^\alpha\|_{4\to 4/(1-4\alpha)}\|a\|_{2/(1+2\alpha)}\|f\|_4\right)^{1/3}.$$

Следствие 4. *Если* $1/2 < \alpha < 3/4$ *и* $a \in L_{2/(2\alpha-1)}$, *то при любом* $f \in L_{4/3}$ *уравнение*

$$u(x) + \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{[a(x)-a(t)]\,u(t)}{|x-t|^{1-\alpha}}dt\right)^3 = f(x)$$

имеет единственное решение $u^* \in L_{4/3}$, *причём*

$$\|u^* - f\|_{4/3} \leqslant \left(2\,\|I^\alpha\|_{4/3\to 4/(3-4\alpha)}\|a\|_{2/(2\alpha-1)}\|f\|_{4/3}\right)^3.$$

Вопрос о приближённом решении уравнений (1) и (2) рассмотрен в [4].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Асхабов С. Н.* Нелинейные уравнения типа свёртки. М.: Физматлит, 2009. 304 с. [*Askhabov S. N.* Nonlinear equations of convolution type. Moscow: Fizmatlit, 2009. 304 pp.]
2. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2004. 570 с. [*Kolmogorov A. N., Fomin S. V.* Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis. Moscow: Fizmatlit, 2004. 570 pp.]
3. *Асхабов С. Н.* Об одном нелинейном уравнении с весовым оператором типа потенциала / В сб.: *Труды восьмой Всероссийской научной конференции с международным участием.* Часть 3: Дифференциальные уравнения и краевые задачи / Матем. моделирование и краев. задачи. Самара: СамГТУ, 2011. С. 24–27. [*Askhabov S. N.* On a nonlinear equation with a potential-type weighing operator / In: *Proceedings of the Eighth All-Russian Scientific Conference with international participation.* Part 3 / Matem. Mod. Kraev. Zadachi. Samara: SamGTU, 2011. Pp. 24–27].
4. *Асхабов С. Н.* Приближенное решение нелинейных уравнений с весовыми операторами типа потенциала // *Уфимск. матем. журн.*, 2011. Т. 3, № 4. С. 8–13. [*Askhabov S. N.* Approximate solution of nonlinear equations with weighted potential type operators // *Ufimsk. Mat. Zh.*, 2011. Vol. 3, no. 4. Pp. 8–13].

Поступила в редакцию 28/VI/2011;
в окончательном варианте — 27/VII/2011.

MSC: 45G10

NONLINEAR EQUATIONS WITH WEIGHTED POTENTIAL TYPE OPERATORS IN LEBESGUE SPACES

S. N. Askhabov

Chechen State University,
32, A. Sheripova st., Groznyi, 364907, Russia.

E-mail: askhabov@yandex.ru

By method of monotone operators, existence and uniqueness theorems are proved for some classes of nonlinear equations with weighted potential type operators in Lebesgue spaces.

Key words: *nonlinear equations, potential type operator, monotone operator.*

Original article submitted 28/VI/2011;
revision submitted 27/VII/2011.

Sultan N. Askhabov (Dr. Sci. (Phys. & Math.)), Dean of Faculty, Faculty of Mathematics and Computer Technology.