Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2011. № 3 (24). С. 108–116

УДК 517.962.24+519.246

ПРОБЛЕМА СХОДИМОСТИ ИТЕРАЦИОННОЙ ПРОЦЕДУРЫ В ЗАДАЧЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ СИСТЕМ С ТУРБУЛЕНТНЫМ ТРЕНИЕМ

В. Е. Зотеев, М. А. Романюк, А. А. Егорова

Самарский государственный технический университет,
443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mail: zoteev-ve@mail.ru

Рассматривается проблема сходимости итерационной процедуры уточнения коэффициентов разностного уравнения в численном методе определения параметров дифференциального оператора для систем с турбулентным трением. Сформулирована и доказана теорема о достаточном условии сходимости итерационной процедуры. При доказательстве теоремы используются свойства сжимающихся отображений и фундаментальных последовательностей. Как следствие, из теоремы получены формулы, описывающие априорную и апостериорную оценки погрешности приближений.

Ключевые слова: *системы с турбулентным трением, параметрическая идентификация, разностные уравнения, среднеквадратичное приближение.*

Достоверная оценка параметров дифференциального оператора на основе статистической обработки результатов наблюдений на выходе системы является важнейшей проблемой в математическом моделировании. Для дифференциальных операторов, описывающих динамические процессы в нелинейных диссипативных системах с турбулентным трением, эта проблема решается на основе стохастических разностных уравнений [1, 2]. При таком подходе задача сводится к среднеквадратичному оцениванию коэффициентов линейно-параметрической дискретной модели, эффективность которого обеспечивается итерационными процедурами уточнения её коэффициентов [1]. В [2] представлена система стохастических разностных уравнений

$$\begin{cases} y_0 - \dfrac{1}{\hat\omega^{(p)}}\sin\hat\omega^{(p)}t_0 = -\dfrac{t_0}{\hat\omega^{(p)}\tau}\sin(\hat\omega^{(p)}t_0)\lambda_1 + \varepsilon_0; \\ y_1 - \dfrac{1}{\hat\omega^{(p)}}\sin\left[\hat\omega^{(p)}(\tau+t_0)\right] = \\ \qquad\qquad = -\left[y_1 + \dfrac{t_0}{\hat\omega^{(p)}\tau}\sin\left[\hat\omega^{(p)}(\tau+t_0)\right]\right]\lambda_1 + (1+\lambda_1)\varepsilon_1; \\ y_k + y_{k-2} = \\ \qquad\qquad = \lambda_0 y_{k-1} - \lambda_1\left[(k-2)\,y_{k-2} - \lambda_0^{(p)}\,(k-1)\,y_{k-1} + k y_k\right] + \eta_k; \\ \eta_k = \left[1+(k-2)\,\lambda_1\right]\varepsilon_{k-2} - \lambda_0^{(p)}\left[1+(k-1)\,\lambda_1\right]\varepsilon_{k-1} + \left[1+k\lambda_1\right]\varepsilon_k, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad k = 2,3,\ldots,N-1, \end{cases} \tag{1}$$

описывающая результаты наблюдений y_k свободных колебаний системы с турбулентным трением. При среднеквадратичном оценивании коэффициентов

Владимир Евгеньевич Зотеев (д.т.н., доцент), профессор, каф. прикладной математики и информатики. *Мария Анатольевна Романюк*, ассистент, каф. прикладной математики и информатики. *Александра Арсеновна Егорова*, аспирант, каф. прикладной математики и информатики.

модели (1) используются две вложенные одна в другую итерационные процедуры, одна из которых служит для устранения смещения в оценках [1], а другая предназначена для уточнения оценок $\hat{\lambda}_0^{(p)}$ и $\hat{\omega}^{(p)} = \frac{1}{\tau}\arccos\frac{\hat{\lambda}_0^{(p)}}{2}$, $p = 0, 1, 2, \ldots$ [2]. Эта итерационная процедура описывается следующей рекуррентной формулой [2]:

$$\hat{\lambda}_0^{(p)} = (1+c)\,\hat{\lambda}_0^{(p-1)} - c\varphi(\hat{\lambda}_0^{(p-1)}), \quad p = 1, 2, 3, \ldots, \tag{2}$$

где $\varphi(\lambda_0)$ — непрерывно дифференцируемая функциональная зависимость, определяемая последовательным выполнением известных математических операций, связанных с вычислением и устранением смещения оценки вектора коэффициентов $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1)^\top$; c — параметр, величина которого выбирается таким образом, чтобы последовательность приближений $\hat{\lambda}_0^{(p)}$, $p = 0, 1, 2, \ldots$, сходилась при $p \to \infty$ к решению уравнения $\lambda_0 = \varphi(\lambda_0)$. Анализ и обеспечение сходимости итерационной процедуры (2) уточнения оценок $\hat{\lambda}_0^{(p)}$ и $\hat{\omega}^{(p)}$ является важнейшей задачей при разработке численных методов параметрической идентификации дифференциального оператора для систем с турбулентным трением.

Теорема (достаточное условие сходимости). *Пусть функция $\varphi(\lambda_0)$ определена и дифференцируема на отрезке $[\lambda_0^{(0)}, \lambda_0^{(0)}+l] \in (-2, 2)$, причём $|\varphi'(\lambda_0)| \leqslant M$, $\varphi'(\lambda_0) \neq 1$ и выполняется одно из следующих неравенств*:

$$0 \leqslant \varphi(\lambda_0^{(0)}) - \lambda_0^{(0)} \leqslant (1-M)\,l \quad \textit{при} \quad 0 < M < 1, \tag{3}$$

$$0 \leqslant \operatorname{sign}\big[1-\varphi'(\lambda_0)\big]\,\big[\varphi(\lambda_0^{(0)}) - \lambda_0^{(0)}\big] \leqslant ml \quad \textit{при} \quad \begin{cases} M > 1, \\ |\varphi'(\lambda_0) - 1| \geqslant m, \\ 0 < m < M. \end{cases} \tag{4}$$

Тогда числовая последовательность $\{\lambda_0^{(p)}\}_{p=0}^{\infty}$, описываемая формулой (2): $\lambda_0^{(p)} = (1+c)\lambda_0^{(p-1)} - c\varphi(\lambda_0^{(p-1)})$, *будет сходиться независимо от начального приближения $\lambda_0^{(0)} \in (-2, 2)$ при $p \to \infty$ к решению уравнения $\lambda_0 = \varphi(\lambda_0)$ при значениях параметра c, равных*

$$c = \begin{cases} -1, & \textit{если} \quad 0 < M < 1; \\ -\operatorname{sign}\,[1-\varphi'(\lambda_0)]\,\frac{1}{M+1}, & \textit{если} \quad \begin{cases} M > 1, \\ |\varphi'(\lambda_0) - 1| \geqslant m, \\ 0 < m < M. \end{cases} \end{cases} \tag{5}$$

Доказательство. Введём следующее обозначение: $\Phi(\lambda_0) = (1+c)\lambda_0 - c\varphi(\lambda_0)$. В этом случае итерационная формула (2) принимает вид

$$\lambda_0^{(p)} = \Phi(\lambda_0^{(p-1)}), \quad p = 1, 2, 3, \ldots.$$

Покажем, что последовательность $\{\lambda_0^{(p)}\}_{p=0}^{\infty}$ имеет предел, принадлежащий отрезку $[\lambda_0^{(0)}, \lambda_0^{(0)} + l] \in (-2, 2)$. В соответствии с (5) для $0 < M < 1$ имеем

$c=-1$. При этом из (2) получаем $\Phi(\lambda_0)\equiv\varphi(\lambda_0)$. Отсюда $|\Phi'(\lambda_0)|=|\varphi'(\lambda_0)|\leqslant \leqslant M<1$. При $M>1$ имеем $c=-\frac{1}{1+M}$, если $-M\leqslant\varphi'(\lambda_0)\leqslant 1-m<1$ или $c=\frac{1}{1+M}$, если $1<1+m\leqslant\varphi'(\lambda_0)\leqslant M$. В первом случае с учётом формулы (2) имеем $\Phi(\lambda_0)=\frac{M}{M+1}\lambda_0+\frac{1}{M+1}\varphi(\lambda_0)$ и, соответственно, $\Phi'(\lambda_0)= =\frac{M}{M+1}+\frac{1}{M+1}\varphi'(\lambda_0)$. Во втором случае, при $1<1+m\leqslant\varphi'(\lambda_0)\leqslant M$, получаем $\Phi(\lambda_0)=\frac{M+2}{M+1}\lambda_0-\frac{1}{M+1}\varphi(\lambda_0)$ и $\Phi'(\lambda_0)=\frac{M+2}{M+1}-\frac{1}{M+1}\varphi'(\lambda_0)$. Отсюда с учётом соотношения $0<m<M$ в обоих случаях имеем

$$\alpha=\max_{\lambda_0\in(-2,2)}\left|\Phi'(\lambda_0)\right|=\frac{1+M-m}{1+M}<1. \tag{6}$$

Используя неравенства (3) или (4), покажем, что последовательность $\{\lambda_0^{(p)}\}_{p=0}^{\infty}$ целиком расположена на отрезке $[\lambda_0^{(0)},\lambda_0^{(0)}+\rho]$, принадлежащем заданному отрезку $[\lambda_0^{(0)},\lambda_0^{(0)}+l]$:

$$\lambda_0^{(p)}\in[\lambda_0^{(0)},\lambda_0^{(0)}+\rho]\subset[\lambda_0^{(0)},\lambda_0^{(0)}+l],\quad p=0,1,2,\ldots,$$

где величина $\rho\leqslant l$ обеспечивает выполнение равенства

$$0\leqslant\varphi(\lambda_0^{(0)})-\lambda_0^{(0)}=(1-M)\,\rho \tag{7}$$

при значениях $M<1$, или выполнение равенства

$$0\leqslant\operatorname{sign}\left[1-\varphi'(\lambda_0)\right]\left[\varphi(\lambda_0^{(0)})-\lambda_0^{(0)}\right]=m\rho$$

при $M>1$. Последнее соотношение может быть представлено в виде

$$0\leqslant\varphi(\lambda_0^{(0)})-\lambda_0^{(0)}=m\rho=(1-\alpha)(1+M)\rho \text{ при } -M\leqslant\varphi'(\lambda_0)\leqslant 1-m<1, \tag{8}$$
$$0\leqslant\lambda_0^{(0)}-\varphi(\lambda_0^{(0)})=m\rho=(1-\alpha)(1+M)\rho \text{ при } 1<1+m\leqslant\varphi'(\lambda_0)\leqslant M. \tag{9}$$

Очевидно, что функция $\Phi(\lambda_0)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\lambda_0^{(0)},\lambda_0^{(0)}+\rho]$, следовательно, для любых $\lambda_0^{(p)}$, $\lambda_0^{(q)}\in[\lambda_0^{(0)},\lambda_0^{(0)}+\rho]$ она удовлетворяет условию Липшица:

$$|\Phi(\lambda_0^{(p)})-\Phi(\lambda_0^{(q)})|\leqslant\alpha|\lambda_0^{(p)}-\lambda_0^{(q)}|,\quad \alpha=\max_{[\lambda_0^{(0)},\lambda_0^{(0)}+\rho]}|\Phi'(\lambda_0)|<1.$$

Полагая $\lambda_0^{(p)}=\lambda_0$ и $\lambda_0^{(q)}=\lambda_0^{(0)}$, получаем

$$\Phi(\lambda_0^{(0)})-\alpha|\lambda_0-\lambda_0^{(0)}|\leqslant\Phi(\lambda_0)\leqslant\Phi(\lambda_0^{(0)})+\alpha|\lambda_0-\lambda_0^{(0)}|. \tag{10}$$

С учётом формул (5)–(9) имеем

$$\Phi(\lambda_0^{(0)})=\lambda_0^{(0)}-c\left[\varphi(\lambda_0^{(0)})-\lambda_0^{(0)}\right]=$$

$$= \begin{cases} \lambda_0^{(0)} + (1-M)\rho, & \text{если } M < 1; \\ \lambda_0^{(0)} + \operatorname{sign}^2\left[1-\varphi'(\lambda_0)\right] \frac{(1-\alpha)(1+M)}{1+M}\rho, & \text{если } M > 1. \end{cases}$$

Отсюда получаем

$$\Phi(\lambda_0^{(0)}) = \lambda_0^{(0)} + (1-\alpha)\rho. \tag{11}$$

Тогда, используя правую часть неравенства (10), при $0 < \alpha < 1$ можно получить

$$\Phi(\lambda_0) \leqslant \Phi(\lambda_0^{(0)}) + \alpha(\lambda_0 - \lambda_0^{(0)}) = \lambda_0^{(0)} + \rho - \alpha(\lambda_0^{(0)} + \rho - \lambda_0) \leqslant \lambda_0^{(0)} + \rho. \tag{12}$$

Так как $0 \leqslant \lambda_0^{(1)} - \lambda_0^{(0)} = \Phi(\lambda_0^{(0)}) - \lambda_0^{(0)} = (1-\alpha)\rho < \rho$, то очевидно выполнение следующих неравенств: $\lambda_0^{(0)} \leqslant \lambda_0^{(0)} + \rho$ и $\lambda_0^{(0)} \leqslant \lambda_0^{(1)} \leqslant \lambda_0^{(0)} + \rho$.

Методом математической индукции покажем, что неравенство

$$\lambda_0^{(0)} \leqslant \lambda_0^{(p)} \leqslant \lambda_0^{(0)} + \rho \tag{13}$$

выполняется при любом $p = 0, 1, 2, \ldots$, то есть последовательность $\{\lambda_0^{(p)}\}_{p=0}^{\infty}$ ограничена сверху и снизу.

Предположим, что неравенство (13) выполняется при $p = n-1$. Докажем, что оно будет выполняться и при $p = n$.

Используя левую часть неравенства (10) при $\lambda_0 = \lambda_0^{(n-1)}$, с учётом (11) получаем

$$\lambda_0^{(n)} = \Phi(\lambda_0^{(n-1)}) \geqslant \Phi(\lambda_0^{(0)}) - \alpha(\lambda_0^{(n-1)} - \lambda_0^{(0)}) \geqslant \\ \geqslant \lambda_0^{(0)} + (1-\alpha)\rho - \alpha(\lambda_0^{(n-1)} - \lambda_0^{(0)}). \tag{14}$$

Рассмотрим несколько случаев, соответствующих различным значениям M:

1) пусть $0 < M < 1/2$ и $\lambda_0^{(0)} \leqslant \lambda_0^{(n-1)} \leqslant \lambda_0^{(0)} + \rho$; отсюда $0 \leqslant \lambda_0^{(n-1)} - \lambda_0^{(0)} \leqslant \leqslant \rho$; тогда из (14) имеем $\lambda_0^{(n)} \geqslant \lambda_0^{(0)} + (1-\alpha)\rho - \alpha\rho = \lambda_0^{(0)} + (1-2\alpha)\rho = = \lambda_0^{(0)} + (1-2M)\rho \geqslant \lambda_0^{(0)}$, так как $1 - 2M \geqslant 0$ при $0 < M < 1/2$;
2) пусть $1/2 \leqslant M < 1$ и $\lambda_0^{(0)} \leqslant \lambda_0^{(n-1)} \leqslant \lambda_0^{(0)} + \frac{1-M}{M}\rho \leqslant \lambda_0^{(0)} + \rho$ (или $0 \leqslant \lambda_0^{(n-1)} - \lambda_0^{(0)} \leqslant \frac{1-M}{M}\rho$); тогда с учётом $\alpha = M$ из (14) получаем $\lambda_0^{(n)} \geqslant \lambda_0^{(0)} + (1-M)\rho - M\frac{1-M}{M}\rho = \lambda_0^{(0)}$;
3) пусть $1/2 \leqslant M < 1$ и $\lambda_0^{(0)} + \frac{1-M}{M}\rho \leqslant \lambda_0^{(n-1)} \leqslant \lambda_0^{(0)} + \rho$ (или $\frac{1-M}{M}\rho \leqslant \lambda_0^{(n-1)} - \lambda_0^{(0)} \leqslant \rho$), тогда имеем

$$|\lambda_0^{(n)} - \lambda_0^{(n-1)}| = |\Phi(\lambda_0^{(n-1)}) - \Phi(\lambda_0^{(n-2)})| \leqslant \alpha|\lambda_0^{(n-1)} - \lambda_0^{(n-2)}| \leqslant \\ \leqslant |\Phi(\lambda_0^{(n-2)}) - \Phi(\lambda_0^{(n-3)})| \leqslant \alpha^2|\lambda_0^{(n-2)} - \lambda_0^{(n-3)}| \leqslant \ldots \leqslant \\ \leqslant \alpha^{n-1}|\lambda_0^{(1)} - \lambda_0^{(0)}|;$$

отсюда для $0 < \alpha < 1$ с учётом равенства (11) получаем

$$|\lambda_0^{(n)} - \lambda_0^{(n-1)}| = \alpha^{n-1}|\Phi(\lambda_0^{(0)}) - \lambda_0^{(0)}| < \alpha^{-1}(1-\alpha)\rho; \tag{15}$$

тогда при $\alpha = M$ имеем $|\lambda_0^{(n)} - \lambda_0^{(n-1)}| < \frac{1-M}{M}\rho \leqslant \lambda_0^{(n-1)} - \lambda_0^{(0)}$; очевидно, что $\lambda_0^{(n)} - \lambda_0^{(n-1)} \geqslant -|\lambda_0^{(n)} - \lambda_0^{(n-1)}|$; отсюда $\lambda_0^{(n)} - \lambda_0^{(n-1)} > -\lambda_0^{(n-1)} + \lambda_0^{(0)}$ или $\lambda_0^{(n)} > \lambda_0^{(0)}$.

Рассмотрим теперь случаи, когда $M > 1$, при этом $\alpha = \frac{1+M-m}{1+M} < 1$:

4) пусть $\frac{1+M}{2} \leqslant m \leqslant M$ и $\lambda_0^{(0)} \leqslant \lambda_0^{(n-1)} \leqslant \lambda_0^{(0)} + \rho$, отсюда $0 \leqslant \lambda_0^{(n-1)} - \lambda_0^{(0)} \leqslant \rho$; из (14) следует

$$\lambda_0^{(n)} \geqslant \lambda_0^{(0)} + \Big(1 - 1 + \frac{m}{1+M}\Big)\rho - \frac{1+M-m}{1+M}(\lambda_0^{(n-1)} - \lambda_0^{(0)}) \geqslant$$
$$\geqslant \lambda_0^{(0)} + \frac{m}{1+M}\rho - \frac{1+M-m}{1+M}\rho = \lambda_0^{(0)} + \Big(\frac{2m}{1+M} - 1\Big)\rho \geqslant \lambda_0^{(0)},$$

так как $\frac{2m}{1+M} - 1 \geqslant 0$ при $\frac{1+M}{2} \leqslant m \leqslant M$;

5) пусть $0 < m < \frac{1+M}{2}$, при этом $\frac{m}{1+M-m}\rho < \rho$; рассмотрим случай, когда $\lambda_0^{(0)} \leqslant \lambda_0^{(n-1)} \leqslant \lambda_0^{(0)} + \frac{m}{1+M-m}\rho \leqslant \lambda_0^{(0)} + \rho$; отсюда получаем $0 \leqslant \lambda_0^{(n-1)} - \lambda_0^{(0)} \leqslant \frac{m}{1+M-m}\rho$; из (14) имеем

$$\lambda_0^{(n)} \geqslant \lambda_0^{(0)} + \left(1 - 1 + \frac{m}{1+M}\right)\rho - \frac{1+M-m}{1+M}\left(\lambda_0^{(n-1)} - \lambda_0^{(0)}\right) \geqslant$$
$$\geqslant \lambda_0^{(0)} + \frac{m}{1+M}\rho - \frac{1+M-m}{1+M}\frac{m}{1+M-m}\rho = \lambda_0^{(0)};$$

6) пусть $0 < m < \frac{1+M}{2}$, при этом $\frac{m}{1+M-m}\rho < \rho$; рассмотрим случай, когда $\lambda_0^{(0)} \leqslant \lambda_0^{(0)} + \frac{m}{1+M-m}\rho \leqslant \lambda_0^{(n-1)} \leqslant \lambda_0^{(0)} + \rho$, то есть $\frac{m}{1+M-m}\rho \leqslant \lambda_0^{(n-1)} - \lambda_0^{(0)} \leqslant \rho$; в соответствии с (15) имеем $\left|\lambda_0^{(n)} - \lambda_0^{(n-1)}\right| < \alpha^{-1}(1-\alpha)\rho = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\rho = \left(\frac{1+M}{1+M-m} - 1\right)\rho = \frac{m}{1+M-m}\rho$, следовательно,

$$|\lambda_0^{(n)} - \lambda_0^{(n-1)}| < \lambda_0^{(n-1)} - \lambda_0^{(0)};$$

отсюда, аналогично случаю 3, получаем $\lambda_0^{(n)} - \lambda_0^{(n-1)} > -\lambda_0^{(n-1)} + \lambda_0^{(0)}$ или $\lambda_0^{(n)} > \lambda_0^{(0)}$.

Таким образом, при выполнении условия $\lambda_0^{(n-1)} \geqslant \lambda_0^{(0)}$ вытекает левая часть неравенства (13) для $p = n$: $\lambda_0^{(n)} \geqslant \lambda_0^{(0)}$, то есть последовательность $\{\lambda_0^{(p)}\}_{p=0}^{\infty}$ ограничена снизу.

Пусть правая часть неравенства (13) выполняется при $p = n-1$: $\lambda_0^{(n-1)} \leqslant \lambda_0^{(0)} + \rho$. Тогда с учётом (12) при $\lambda_0 = \lambda_0^{(n-1)}$ имеем $\lambda_0^{(n)} = \Phi(\lambda_0^{(n-1)}) \leqslant \lambda_0^{(0)} + \rho$, то есть последовательность $\{\lambda_0^{(p)}\}_{p=0}^{\infty}$ ограничена сверху.

Отсюда по индукции следует, что все члены бесконечной последовательности удовлетворяют неравенству (13) , то есть $\lambda_0^{(p)} \in [\lambda_0^{(0)}, \lambda_0^{(0)} + \rho] \subset [\lambda_0^{(0)}, \lambda_0^{(0)} + l]$, $p = 0, 1, 2, \ldots$.

Покажем, что рассматриваемая последовательность $\{\lambda_0^{(p)}\}_{p=0}^{\infty}$ — фундаментальная. Учитывая полученные выше неравенства

$$|\lambda_0^{(n)} - \lambda_0^{(n-1)}| \leqslant \alpha^{n-1}|\lambda_0^{(1)} - \lambda_0^{(0)}|, \quad 0 < \alpha < 1$$

и соотношение $0 \leqslant \lambda_0^{(1)} - \lambda_0^{(0)} = (1-\alpha)\rho < \rho \leqslant l$, получаем

$$|\lambda_0^{(k+p)} - \lambda_0^{(k)}| \leqslant \sum_{n=k+1}^{k+p} |\lambda_0^{(n)} - \lambda_0^{(n-1)}| \leqslant \sum_{n=k+1}^{k+p} \alpha^{n-1}|\lambda_0^{(1)} - \lambda_0^{(0)}| \leqslant$$

$$\leqslant (1-\alpha)\rho \sum_{n=k+1}^{k+p} \alpha^{n-1} \leqslant (1-\alpha)l\alpha^k \frac{1-\alpha^p}{1-\alpha} < l\alpha^k,$$

где k и p — любые натуральные числа.

Так как $\alpha^k \to 0$ при $k \to \infty$, последовательность $\{\lambda_0^{(p)}\}_{p=0}^{\infty}$ удовлетворяет критерию Коши и, следовательно, существует $\lim\limits_{p\to\infty} \lambda_0^{(p)} = \bar{\lambda}_0$. Причём, если элементы последовательности $\{\lambda_0^{(p)}\}_{p=0}^{\infty}$ принадлежат отрезку $[\lambda_0^{(0)}, \lambda_0^{(0)} + l]$, то и $\bar{\lambda}_0 \in [\lambda_0^{(0)}, \lambda_0^{(0)} + l]$.

Таким образом, числовая последовательность $\{\lambda_0^{(p)}\}_{p=0}^{\infty}$, описываемая рекуррентной формулой (2), при выполнении условий теоремы имеет $\lim\limits_{p\to\infty} \lambda_0^{(p)} = \bar{\lambda}_0$, принадлежащий отрезку $[\lambda_0^{(0)}, \lambda_0^{(0)} + l]$.

Так как функция $\Phi(\lambda_0) = (1+c)\,\lambda_0 - c\varphi(\lambda_0)$ по условию теоремы непрерывна на отрезке $[\lambda_0^{(0)}, \lambda_0^{(0)} + l]$, можно перейти к пределу при $p \to \infty$, осуществив предельный переход справа под знаком функции $\Phi(\lambda_0^{(p)})$:

$$\lim_{p\to\infty} \lambda_0^{(p)} = \lim_{p\to\infty} \Phi\left(\lambda_0^{(p)}\right) = \lim_{p\to\infty} \left[(1+c)\,\lambda_0^{(p)} - c\varphi\left(\lambda_0^{(p)}\right)\right] =$$

$$= (1+c) \lim_{p\to\infty} \lambda_0^{(p)} - c\varphi\Big(\lim_{p\to\infty} \lambda_0^{(p)}\Big) = (1+c)\bar{\lambda}_0 - c\varphi(\bar{\lambda}_0).$$

Отсюда получаем $\bar{\lambda}_0 = \bar{\lambda}_0 + c(\bar{\lambda}_0 - \varphi(\bar{\lambda}_0))$. При $c \neq 0$ имеем, что $\bar{\lambda}_0 = \varphi\left(\bar{\lambda}_0\right)$, то есть предельное значение $\bar{\lambda}_0 \in [\lambda_0^{(0)}, \lambda_0^{(0)} + l]$ является корнем уравнения $\lambda_0 = \varphi(\lambda_0)$.

Пусть $\bar{\bar{\lambda}}_0 \in [\lambda_0^{(0)}, \lambda_0^{(0)} + l]$ также является решением уравнения $\lambda_0 = \varphi(\lambda_0)$, то есть $\bar{\bar{\lambda}}_0 = \varphi(\bar{\bar{\lambda}}_0)$. Так как функция $\varphi(\lambda_0)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\lambda_0^{(0)}, \lambda_0^{(0)} + l]$, она удовлетворяет на $[\lambda_0^{(0)}, \lambda_0^{(0)} + l]$ условию Липшица с постоянной $M = \max\limits_{[\lambda_0^{(0)}, \lambda_0^{(0)}+l]} [\varphi'(\lambda_0)] \neq 1$. Следовательно, имеет место неравенство $|\bar{\lambda}_0 - \bar{\bar{\lambda}}_0| = |\varphi(\bar{\lambda}_0) - \varphi(\bar{\bar{\lambda}}_0)| \leqslant M|\bar{\lambda}_0 - \bar{\bar{\lambda}}_0|$. Отсюда получаем $|\bar{\lambda}_0 - \bar{\bar{\lambda}}_0|(1-M) \leqslant 0$. Так как по условию теоремы $M \neq 1$, неравенство выполняется только при $\bar{\lambda}_0 = \bar{\bar{\lambda}}_0$. Единственность решения уравнения $\lambda_0 = \varphi(\lambda_0)$ на отрезке $[\lambda_0^{(0)}, \lambda_0^{(0)} + l]$ установлена. $\square$

Следствие. *Априорная и апостериорная оценки погрешности n-ного приближения описываются соответственно следующими формулами*:

$$|\bar{\lambda}_0 - \lambda_0^{(n)}| \leqslant \rho M^n, \tag{16}$$

$$|\bar{\lambda}_0 - \lambda_0^{(n)}| \leqslant \frac{M}{1-M}|\lambda_0^{(n)} - \lambda_0^{(n-1)}| \tag{17}$$

при $0 < M < 1$ *и* $\rho = \frac{\varphi(\lambda_0^{(0)}) - \lambda_0^{(0)}}{1-M} \leqslant l$ *или формулами*

$$|\bar{\lambda}_0 - \lambda_0^{(n)}| \leqslant \left(1 - \frac{m}{1+M}\right)^n \rho, \tag{18}$$

$$|\bar{\lambda}_0 - \lambda_0^{(n)}| \leqslant \frac{1+M-m}{1+M}|\lambda_0^{(n)} - \lambda_0^{(n-1)}| \tag{19}$$

при $\begin{cases} M > 1, \\ |\varphi'(\lambda_0) - 1| \geqslant m, \\ 0 < m < M \end{cases}$ *и* $\rho = \frac{\mathrm{sign}[1-\varphi'(\lambda_0)]\left[\varphi(\lambda_0^{(0)}) - \lambda_0^{(0)}\right]}{m} \leqslant l$.

Доказательство. Действительно, с учётом равенств $\bar{\lambda}_0 = \Phi(\bar{\lambda}_0)$ и $\lambda_0^{(n)} = \Phi(\lambda_0^{(n-1)})$ и непрерывной дифференцируемости функции $\Phi(\lambda_0)$ имеем

$$|\bar{\lambda}_0 - \lambda_0^{(n)}| = |\Phi(\bar{\lambda}_0) - \Phi(\lambda_0^{(n-1)})| \leqslant \alpha|\bar{\lambda}_0 - \lambda_0^{(n-1)}| = \\ = \alpha|\Phi(\bar{\lambda}_0) - \Phi(\lambda_0^{(n-2)})| \leqslant \alpha^2|\bar{\lambda}_0 - \lambda_0^{(n-2)}| \leqslant \ldots \leqslant \alpha^n|\bar{\lambda}_0 - \lambda_0^{(0)}|.$$

Так как $\bar{\lambda}_0 \in [\lambda_0^{(0)}, \lambda_0^{(0)} + \rho]$, можно записать, что $|\bar{\lambda}_0 - \lambda_0^{(0)}| \leqslant \rho$. Поэтому имеет место неравенство $|\bar{\lambda}_0 - \lambda_0^{(n)}| \leqslant \alpha^n \rho$.

Пусть $0 < M < 1$ и в соответствии с (7) $\rho = \frac{\varphi(\lambda_0^{(0)}) - \lambda_0^{(0)}}{1-M} \leqslant l$. Тогда при $\alpha = M < 1$ можно получить формулу априорной оценки погрешности (16).

Пусть $\begin{cases} M > 1, \\ |\varphi'(\lambda_0) - 1| \geqslant m, \\ 0 < m < M \end{cases}$ и в соответствии с формулами (8) и (9)

$$\rho = \frac{\mathrm{sign}\,[1-\varphi'(\lambda_0)]\left[\varphi(\lambda_0^{(0)}) - \lambda_0^{(0)}\right]}{m} \leqslant l.$$

Для этого случая $\alpha = \frac{1+M-m}{1+M}$ и можно получить формулу априорной оценки погрешности (18).

Для построения формул апостериорной оценки погрешности n-ного приближения воспользуемся соотношением

$$\bar{\lambda}_0 - \lambda_0^{(n-1)} = \lambda_0^{(n)} - \lambda_0^{(n-1)} + \Phi(\bar{\lambda}_0) - \Phi(\lambda_0^{(n-1)}),$$

из которого с учётом условия Липшица находим

$$|\bar{\lambda}_0 - \lambda_0^{(n-1)}| \leqslant |\lambda_0^{(n)} - \lambda_0^{(n-1)}| + \alpha|\bar{\lambda}_0 - \lambda_0^{(n-1)}|$$

или
$$|\bar{\lambda}_0 - \lambda_0^{(n-1)}| \leqslant \frac{1}{1-\alpha}|\lambda_0^{(n)} - \lambda_0^{(n-1)}|.$$
Так как $|\bar{\lambda}_0 - \lambda_0^{(n)}| \leqslant \alpha|\bar{\lambda}_0 - \lambda_0^{(n-1)}|$, можно записать, что
$$|\bar{\lambda}_0 - \lambda_0^{(n)}| \leqslant \frac{\alpha}{1-\alpha}|\lambda_0^{(n)} - \lambda_0^{(n-1)}|.$$

Пусть $0 < M < 1$. Тогда при $\alpha = M < 1$ можно получить формулу апостериорной оценки погрешности (17).

Пусть $\begin{cases} M > 1, \\ |\varphi'(\lambda_0) - 1| \geqslant m, \\ 0 < m < M. \end{cases}$ Для этого случая $\alpha = \frac{1+M-m}{1+M}$ и можно получить формулу апостериорной оценки погрешности (19). $\square$

Таким образом, рассмотрено достаточное условие сходимости итерационной процедуры уточнения коэффициентов разностного уравнения, предназначенной для повышения точности вычисления (почти в два раза [2]) параметров дифференциального оператора для систем с турбулентным трением. Следует отметить, и это очевидно, что область применения итерационной процедуры, описываемой формулой вида
$$x_k = (1+c)\,x_{k-1} - c\varphi\,(x_{k-1})\,,$$
в которой $\varphi(x)$ — непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a,b]$ функция и $\varphi'(\lambda_0) \leqslant M$, не ограничивается только задачей среднеквадратичного оценивания коэффициентов разностного уравнения. Алгоритм вычислений с использованием этой рекуррентной формулы может применяться в различных по физической природе задачах математического моделирования. Эта формула, обобщая при $c = 1$ известный метод итераций для значений $M < 1$, обеспечивает сходимость итерационной процедуры также для значений $M > 1$ за счёт выбора параметра c в соответствии с выражением (5).

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (проект РНП 2.1.1/14069).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Зотеев В. Е.* Параметрическая идентификация диссипативных механических систем на основе разностных уравнений / ред. В. П. Радченко. М.: Машиностроение-1, 2009. 344 с. [*Zoteev V. E.* Parametric identification of dissipative mechanical systems based on difference equations / ed. V. P. Radchenko. Moscow: Mashinostroenie-1, 2009. 344 pp.]
2. *Зотеев В. Е., Заусаева М. А., Егорова А. А.* Параметрическая идентификация дифференциальных операторов для систем с турбулентным трением на основе разностных уравнений // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2010. № 5(21). С. 125–133. [*Zoteev V. E., Zausaeva M. A., Egorova A. A.* Parametric identification of the differential operators for the systems with turbulent friction on the base of finite-difference equations // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2010. Vol. 5(21). Pp. 125–133].

Поступила в редакцию 04/IX/2011;
в окончательном варианте — 19/IX/2011.

MSC: 65C20; 65P40, 34C15, 37M05

PROBLEM OF ITERATIVE PROCEDURE CONVERGENCE IN PARAMETRIC IDENTIFICATION OF THE SYSTEMS WITH TURBULENT FRICTION

V. E. Zoteev, M. A. Romanyuk, A. A. Egorova

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia.

E-mail: zoteev-ve@mail.ru

The problem of convergence of iterative procedure for clarification of coefficients of the finite-difference equation in numerical technique for determination of the differential operator parameters for the systems with turbulent friction is considered. Theorem about a sufficient condition of iterative procedure convergence is defined and demonstrated. During theorem proving contracting mapping and fundamental sequence properties are used. As a corollary of the theorem formulas describing prior and posterior estimate of the approximation error are received.

Key words: *systems with turbulent friction, parametric identification, finite-difference equations, mean-square estimation.*

Original article submitted 04/IX/2011;
revision submitted 19/IX/2011.

Vladimir E. Zoteev (Dr. Sci. (Techn.)), Professor, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science. *Maria A. Zausaeva*, Assistant, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science. *Alexandra A. Egorova*, Postgraduate Student, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science.