Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2011. № 4 (25). С. 165–168

УДК 517.956.4

ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЁННОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА К РЕШЕНИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

С. М. Заикина

Самарский государственный технический университет,
443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.
E-mail: svetzai@inbox.ru

Рассмотрены некоторые краевые задачи для уравнений параболического типа. Приведены применения обобщённых интегральных преобразований для решения поставленных задач.

Ключевые слова: *дифференциальные уравнения, обобщённое интегральное преобразование Лапласа.*

Изучение таких физических явлений, как теплопроводность, диффузия и других, приводит к уравнениям параболического типа [1]. Будем считать, что изучаемые физические процессы характеризуются функцией двух независимых переменных $u(x,t)$ — температурой линейного проводника тепла, зависящей от времени t и координаты x.

1. Рассмотрим однородное уравнение параболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{a^2}{t^{m-1}}\frac{\partial u}{\partial t} + bu, \tag{1}$$

где a, b, $m \geqslant 1$ — вещественные константы.

Задача 1.*Найти решение уравнения* (1) *в области* $D: 0 < t < \infty,\ 0 < x < l$, *удовлетворяющее начальному условию*

$$u(x;+0) = \lim_{t\to 0} u(x,t) = 0, \quad 0 < x < l \tag{2}$$

и граничным условиям

$$\begin{aligned} u(+0;t) &= \lim_{x\to +0} u(x,t) = a_0(t), \quad 0 < t < \infty,\\ u(l-0;t) &= \lim_{x\to l-0} u(x,t) = a_1(t), \quad 0 < t < \infty. \end{aligned} \tag{3}$$

Применим к обеим частям уравнения (1) обобщённое интегральное преобразование Лапласа

$$L_m\{u(x,t);s\} \equiv \int_0^\infty t^{m-1}\exp(-s^m t^m)u(x,t)dt,$$

которое при $m=1$ совпадает с классическим преобразованием Лапласа [2]. В результате получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$U''_{xx} - (a^2 m s^m + b)U = 0, \tag{4}$$

которое уже содержит в себе заданные начальные условия, поэтому они учитываются в дальнейшем автоматически. Здесь $U(x,s) = L_m\{u(x,t);x,s\}$.

Граничные условия (3) примут вид

$$U(+0;s) = A_0(s), \quad U(l-0;s) = A_1(s), \tag{5}$$

Светлана Михайловна Заикина, аспирант, каф. прикладной математики и информатики.

где $A_0(s) = L_m\{a_0(t); s\}$, $A_1(s) = L_m\{a_1(t); s\}$.

Решая уравнение (4), получим общее решение в виде

$$U(x,s) = c_1 \exp\left(\sqrt{a^2 m s^m + b}x\right) + c_2 \exp\left(-\sqrt{a^2 m s^m + b}x\right), \tag{6}$$

если $a^2 m s^m + b > 0$.

Представим

$$U(x,s) = A_0(s)U_0(x,s) + A_1(s)U_1(x,s), \tag{7}$$

где $U_0(x;s)$ — частное решение уравнения (4), удовлетворяющее условиям $U_0(+0;s) = 1$, $U_0(l-0;s) = 0$, а $U_1(x;s)$ — частное решение уравнения (4), удовлетворяющее условиям $U_1(+0;s) = 0$, $U_1(l-0;s) = 1$. Тогда

$$U_0(x,s) = \frac{\operatorname{sh}(l-x)\sqrt{a^2 m s^m + b}}{\operatorname{sh} l\sqrt{a^2 m s^m + b}}, \quad U_1(x,s) = \frac{\operatorname{sh} x\sqrt{a^2 m s^m + b}}{\operatorname{sh} l\sqrt{a^2 m s^m + b}}.$$

Искомое решение уравнения (4), удовлетворяющее граничным условиям (5), будет иметь вид (7). Определим оригинал, соответствующий изображению $U(x,s)$.

Сначала рассмотрим предельный случай $l = \infty$. Тогда $U_1(x,s) = 0, U_0(x,s) = \exp\left(-x\sqrt{a^2 m s^m + b}\right)$, т. е. $U(x,s) = A_0(s)\exp\left(-x\sqrt{a^2 m s^m + b}\right)$.

Применяя формулу обращения для преобразования L_m [3], найдём оригинал

$$u(x,t) = \frac{m}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\left[A_0(s^{1/m})\exp\left(-x\sqrt{a^2 m s^m + b}\right)\right]\exp\left(st^m\right)ds.$$

Если l — конечно, то применяя формулу обращения к (7), получим

$$u(x,t) = \frac{m}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\left[A_0(s^{1/m})U_0(x,s^{1/m}) + A_1(s^{1/m})U_1(x,s^{1/m})\right]\exp\left(st^m\right)ds.$$

Единственность решения задачи доказывается методом от противного. Допустим, что существуют два решения уравнения (1): $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$, которые удовлетворяют начальному условию (2) и граничным условиям (3). Тогда функция $z(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ является решением уравнения (1), удовлетворяет нулевому начальному условию и нулевым граничным условиям. Образ функции $z(x,t)$ будет удовлетворять уравнению (4) и нулевым условиям (5). Учитывая (6) и нулевые условия (5), получим $Z = 0$.

Задача 2.*Найти решение уравнения* (1) *в области* $D: 0 < t < \infty$, $0 < x < l$, *удовлетворяющее начальному условию*

$$u(x;+0) = \lim_{t\to 0} u(x,t) = u_0(x), \quad 0 < x < l$$

и граничным условиям

$$\begin{aligned} u(+0;t) &= \lim_{x\to+0} u(x,t) = 0, \quad 0 < t < \infty, \\ u(l-0;t) &= \lim_{x\to l-0} u(x,t) = 0, \quad 0 < t < \infty. \end{aligned} \tag{8}$$

После применения к уравнению (1) преобразования L_m получим неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение.

$$U''_{xx} - \left(a^2 m s^m + b\right)U(x,s) = -a^2 u_0(x). \tag{9}$$

Рассмотрим частный случай, когда $u_0(x) = \sin wx$. Тогда, решая уравнение (9), будем иметь

$$U(x,s) = c_1 \exp\left(x\sqrt{a^2 m s^m + b}\right) + c_2\left(-x\sqrt{a^2 m s^m + b}\right) + \frac{a^2}{w^2 + a^2 m s^m + b}\sin wx.$$

Граничные условия (8) примут вид

$$U(+0;s)=0, \quad U(l-0;t)=0, \tag{10}$$

и частным решением уравнения (9), удовлетворяющим условиям (10), будет

$$U(x,s)=-\frac{a^2\sin wl}{2\,(w^2+a^2ms^m+b)\,\mathrm{sh}\,l\sqrt{a^2ms^m+b}}\exp\bigl(x\sqrt{a^2ms^m+b}\bigr)+$$
$$+\frac{a^2\sin wl}{2\,(w^2+a^2ms^m+b)\,\mathrm{sh}\,l\sqrt{a^2ms^m+b}}\exp\bigl(-x\sqrt{a^2ms^m+b}\bigr)+\frac{a^2\sin wl}{w^2+a^2ms^m+b}.$$

Тогда оригинал

$$u(x,t)=\frac{m}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\Bigl[-\frac{a^2\sin wl}{2\,(w^2+a^2ms+b)\,\mathrm{sh}\,l\sqrt{a^2ms+b}}\exp\bigl(x\sqrt{a^2ms+b}\bigr)+$$
$$+\frac{a^2\sin wl}{2\,(w^2+a^2ms+b)\,\mathrm{sh}\,l\sqrt{a^2ms+b}}\exp\bigl(-x\sqrt{a^2ms+b}\bigr)+\frac{a^2\sin wl}{w^2+a^2ms+b}\Bigr]\exp\bigl(st^m\bigr)ds.$$

Можно показать, что $\lim\limits_{t\to 0}u(x;t)=\lim\limits_{s\to\infty}ms^mU(x;s)=u_0(x)=\sin wx$. Действительно [3], $\lim\limits_{t\to 0}u(x;t)=\lim\limits_{s\to\infty}ms^mU(x;s)$, если $0<x<l$. Вычислим

$$\lim_{s\to\infty}ms^mU(x;s)=\lim_{s\to\infty}\left[\frac{\sin wl\exp(x\sqrt{a^2ms^m+b})}{\exp(l\sqrt{a^2ms^m+b})-\exp(-l\sqrt{a^2ms^m+b})}+\sin wx\right]=$$
$$=\sin wl\lim_{s\to\infty}\exp\left(s^{m/2}\sqrt{a^m+b/s^m}(x-l)\right)+\sin wx=\sin wx.$$

Аналогично можно рассмотреть и другие частные случаи: когда $u_0(x)=cx+d$ и $u_0(x)=\exp\alpha x$. Здесь c, d, a — вещественные константы.

2. Рассмотрим теперь неоднородное уравнение параболического типа

$$t^{m-1}\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=a^2\frac{\partial u}{\partial t}+bt^{m-1}u+f(x,t), \tag{11}$$

где a, b — вещественные константы.

Задача 3. *Найти решение уравнения* (11) *в области* $D_1: x>0,\ t>0$, *удовлетворяющее начальному условию* $\lim\limits_{t\to 0}u(x,t)=0$ *и граничному условию*

$$u(+0;t)=\lim_{x\to+0}u(x,t)=A_0, \quad A_0=\mathrm{const},\ t>0. \tag{12}$$

Рассмотрим случай, когда $f(x,t)=cxt^\alpha$ (c, α — вещественные константы). Применяя к (11) преобразование L_m, получим

$$U''_{xx}-(a^2ms^m+b)U=c\frac{\Gamma\left(\alpha/m+1\right)x}{ms^{m+\alpha}}. \tag{13}$$

Решая обыкновенное неоднородное дифференциальное уравнение (13), получим

$$U(x,s)=c_1\exp\bigl(\sqrt{a^2ms^m+b}x\bigr)+c_2\exp\bigl(-\sqrt{a^2ms^m+b}x\bigr)-\frac{c\Gamma\left(\alpha/m+1\right)x}{ms^{m+\alpha}\left(a^2ms^m+b\right)}.$$

Граничное условие (12) для изображения примет вид

$$U(0,s) = A_0/(ms^m). \tag{14}$$

Учитывая (14) и равенство $\lim\limits_{t\to 0} u(x,t) = \lim\limits_{s\to\infty} ms^m U(x,s) = 0$, получим

$$U(x,s) = \frac{A_0}{ms^m}\exp\bigl(-\sqrt{a^2ms^m+b}x\bigr) - \frac{c\Gamma\,(\alpha/m+1)\,x}{ms^{m+\alpha}\,(a^2ms^m+b)}x.$$

Применяя формулу обращения для L_m, находим

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\left[\frac{A_0}{s}\exp\bigl(-\sqrt{a^2ms+b}x\bigr) - \frac{c\Gamma\,(\alpha/m+1)}{s^{(m+\alpha)/m}\,(a^2ms+b)}x\right]\exp\bigl(st^m\bigr)ds.$$

Единственность решения задачи доказывается методом от противного.

Аналогично можно рассмотреть задачи и с другими граничными условиями: $u(+0;t) = A_0\exp(-\beta t^m)$, $u(+0;t) = A_0\sin wt^m$, $u(+0;t) = A_0\cos wt^m$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 11-01-97021-р-поволжье-а).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 736 с. [*Tihonov A. N.; Samarskiy A. A.* The equations of mathematical physics. Moscow: Nauka, 1972. 735 pp.]
2. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Физматгиз, 1961. 524 с.; англ. пер.: *Ditkin V. A., Prudnikov A. P.* Integral Transforms and Operational Calculus. Oxford: Pergamon Press, 1965. 529 pp.
3. *Репин О. А., Заикина С. М.* Некоторые новые обобщенные интегральные преобразования и их применение в теории дифференциальных уравнений // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2011. № 2(23). С. 8–16. [*Repin O. A., Zaikina S. M.* Some new generalized integral transformations and their application in differential equations theory // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2011. no. 2(23). Pp. 8–16].

Поступила в редакцию 13/X/2011;
в окончательном варианте — 26/XI/2011.

MSC: 35A22; 44A10, 35K55

APPLICATION OF THE GENERALIZED INTEGRAL LAPLACE TRANSFORM TO SOLVING DIFFERENTIAL EQUATIONS

S. M. Zaikina

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia.

E-mail: svetzai@inbox.ru

We consider some boundary value problems for parabolic equations. The solutions were obtained with the generalized Laplace integral transform.

Key words: *differential equations, generalized Laplace integral transform.*

Original article submitted 13/X/2011;
revision submitted 26/XI/2011.

Svetlana M. Zaikina, Postgraduate Student, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science.