Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2011. № 3 (24). С. 129–135

УДК 530.12

ТОЧНЫЕ КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ФАНТОМНЫХ ПОЛЕЙ*

***С. В. Червон*[1], *О. Г. Панина*[2]**

[1] Ульяновский государственный педагогический университет им. И. Н. Ульянова,
432000, Ульяновск, пл. 100-летия со дня рождения В. И. Ленина, 4.
[2] Самарский государственный аэрокосмический университет им. ак. С. П. Королёва
(национальный исследовательский университет),
443086, Самара, Московское ш., 34.

E-mails: chervon.sergey@gmail.com, panina.ph@gmail.com

Рассматривается приложение метода суперпотенциала к решению задач космологии с фантомными полями. Найдены классы точных решений и установлены периоды времени с преобладанием тёмной энергии.

Ключевые слова: *космология, фантомное поле, поля тёмного сектора, точные решения.*

Введение. Вопрос формирования и преобладания полей тёмного сектора вызывает особый интерес и в различных моделях трактуется с различных теоретических позиций. Как правило, поле тёмной энергии считается преобладающим последние 5 млрд лет, что приводит к ускоренному расширению на современном этапе, замеченному в 1998 году. Стандартная модель не может объяснить природу тёмного вещества, преобладающего во Вселенной. Также актуальной проблемой наблюдательной космологии является ускоренное расширение Вселенной, для объяснения которого за последнее десятилетие построено большое количество теоретических моделей, среди которых присутствуют и модели с фантомными полями. Фантомные поля по отдельности или во взаимодействии с другими полями тёмного сектора используются многими авторами для построения космологических моделей [1].

Рассмотренная в настоящей работе модель с тёмной энергией, представленной фантомными скалярными полями, приводит к космологическим решениям на инфляционной стадии развития Вселенной (в период её ускоренного расширения).

Фантомное поле является скалярным полем, имеет отрицательную кинетическую энергию и описывается уравнением состояния $w = p/\rho$. Для разных сред параметр уравнения состояния w имеет разное значение. По известному w мы можем идентифицировать какое-либо из полей тёмного сектора. Фантомное поле имеет уравнение состояния $w \leqslant -1$, при котором плотность среды со временем увеличивается, антигравитация возрастает, Вселенная будет ускоренно расширяться и скорость расширения достигнет бесконечной величины за конечное время — произойдет Большой Разрыв (Big Rip).

Сергей Викторович Червон (д.ф.-м.н., проф.), профессор, каф. физики. *Ольга Геннадьевна Панина*, ассистент, каф. физики.

* *Настоящая работа докладывалась на Второй Международной конференции «Математическая физика и её приложения», проходившей в Самаре с 29 августа по 4 сентября 2010 г.*

Лагранжиан фантомного поля имеет вид [2, 3]

$$\mathcal{L}_{ph} = -\frac{1}{2}\phi,_{\mu}\phi,^{\mu} - V(\phi). \qquad (1)$$

Действие для фантомного поля записывается следующим образом:

$$S_{ssf} = \int d^4x\sqrt{-g}\left(\frac{R}{2\kappa} + \mathcal{L}_{ph}\right). \qquad (2)$$

Будем рассматривать фантомное поле ϕ во Вселенной с пространственно-плоской метрикой Фридмана—Робертсона—Уокера с линейным элементом $ds^2 = dt^2 - a^2(t)d\vec{r}^2$, где $a(t)$ — масштабный фактор, $\vec{r}$ — радиус-вектор в пространстве координат. Масштабный фактор характеризует пространственный размер Вселенной на конкретном временном этапе. Тензор энергии-импульса (ТЭИ) имеет вид $T^{\mu}_{\nu} = \mathrm{diag}(\rho, -p, -p, -p)$, где плотность энергии ρ положительна, а давление p отрицательно. Предполагая, что скаляное поле ϕ зависит только от космологического времени t, имеем

$$\rho = -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad p = -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi), \qquad (3)$$

т. е. мы рассматриваем динамическую эволюцию скалярного поля (здесь и далее точка наверху означает производную по времени t).

Варьируя действие (2) по полю ϕ, получаем динамическое уравнение фантомного поля [2]:

$$\ddot{\phi} - 3H(t)\dot{\phi} - \frac{\partial V(\phi)}{\partial\phi} = 0, \qquad (4)$$

которое вместе с уравнениями Эйнштейна [3] для фантомного поля

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3}\left(-\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)\right), \quad \dot{H}(t) = 4\pi G\dot{\phi}^2 \qquad (5)$$

образует самосогласованную систему динамических уравнений. Здесь G — гравитационная постоянная; $H(t)$ — параметр Хаббла, связывающий скорость удаления космологического объекта с его расстоянием до наблюдателя. Параметр Хаббла связан с масштабным фактором $a(t)$ соотношением $H(t) = \dot{a}(t)/a(t)$. Уравнения записаны в используемой в космологии естественной системе единиц, в которой $c = \hbar = 1$.

На сегодняшний день существует небольшое количество решений для фантомных полей, в основном эти решения приближённые, так как получены численно. Поэтому задача поиска точных решений в этой области является актуальной.

1. Метод суперпотенциала для фантомных полей. Точные решения системы уравнений (4) и (5) получить достаточно сложно. Эффективным при выполнении этой задачи является метод суперпотенциала в космологии. Суперпотенциал для фантомного поля строится по аналогии с методом построения для обычного скалярного поля [4]. Определяем суперпотенциал Υ как

$$\Upsilon(\phi) = V(\phi) - \frac{1}{2}U^2(\phi), \qquad U(\phi) = \dot{\phi};$$

тогда уравнение фантомного поля принимает вид

$$3H(t)U(\phi) + \frac{\partial \Upsilon(\phi)}{\partial \phi} = 0.$$

Физический потенциал V выражается через суперпотенциал Υ следующим образом:

$$V(\phi) = \Upsilon(\phi) + \frac{1}{2}U^2(\phi). \tag{6}$$

Математически такая подстановка означает замену переменных в исходном полевом уравнении (4). Далее можно получить выражение для суперпотенциала в квадратурах:

$$\Upsilon(\phi) = \frac{3}{4M_P^2}\left(\int U(\phi)d\phi\right)^2, \tag{7}$$

где M_P — масса Планка, в космологии $1/M_P^2 = 8\pi G$. Уравнения Эйнштейна (5) можно привести к виду

$$H^2(t) = \frac{1}{3M_P^2}\Upsilon(\phi), \quad H(t) = \frac{1}{2M_P^2}\int U(\phi)d\phi. \tag{8}$$

Теперь можно продолжить поиск решений с заданным типом эволюции фантомного поля. Рассмотрим несколько случаев, отличающихся видом зависимости скалярного поля ϕ от времени: будем задавать вид зависимости $\phi(t)$ и путём подстановки его в выражения (6)–(8) получать соответствующее космологическое решение.

Для логарифмической эволюции фантомного поля $\phi = A\ln(\lambda t)$ (A, λ — произвольные постоянные) из выражения (7) находим

$$\Upsilon = \frac{3}{4M_p^2}\left(C_1 - \frac{A^2}{t}\right)^2.$$

Далее находим параметр Хаббла и масштабный фактор, используя (8):

$$H = \frac{1}{2M_p^2}\left(C_1 - \frac{A^2}{t}\right), \quad a(t) = C_2 t^{-\frac{A^2}{2M_p^2}} e^{\frac{C_1}{2M_p^2}t}.$$

Здесь C_1, C_2 — постоянные интегрирования. Знание масштабного фактора даёт возможность описать геометрию пространства-времени. Затем из соотношения (6) находим физический потенциал:

$$V(\phi) = \frac{3}{4M_p^2}\left(C_1 - A^2\lambda e^{-\phi/A}\right)^2 + \frac{A^2\lambda^2}{2}e^{-2\phi/A}.$$

Далее можно исследовать динамику полученного решения, найти кинетическую энергию фантомного поля, рассмотреть его уравнение состояния, которое будет иметь такой вид:

$$w = \frac{K - V(\phi)}{K + V(\phi)}. \tag{9}$$

Здесь K — кинетическая энергия фантомного поля; она отрицательна, поскольку $K = -\dot{\phi}^2/2 < 0$.

Приведём несколько решений для разного вида зависимости $\phi(t)$, полученных аналогичным образом. Решение для степенной эволюции фантомного поля $\phi = At^l$ (l — постоянная, $l \neq 0$, $l \neq 1/2$):

$$\Upsilon = \frac{3}{4M_p^2}\left(C_1 + \frac{A^2 l^2}{2l-1}t^{2l-1}\right)^2,$$

$$H = \frac{1}{2M_p^2}\left(C_1 + \frac{A^2 l^2}{2l-1}t^{2l-1}\right), \quad a(t) = \sqrt{\frac{A^2 l}{2(2l-1)M_p^2}t^{2l} + \frac{C_1}{M_p^2} + C_2},$$

$$V(\phi) = \frac{3}{4M_p^2}\left(C_1 + \frac{A^2 l^2}{2l-1}\left(\frac{\phi}{A}\right)^{\frac{2l-1}{l}}\right)^2 + \frac{1}{2}A^2 l^2\left(\frac{\phi}{A}\right)^{\frac{2l-2}{l}}.$$

В случае $l = 1/2$ получим:

$$\Upsilon = \frac{3}{4M_p^2}\left(C_1 + \frac{A^2}{4}\ln t\right)^2,$$

$$H = \frac{1}{2M_p^2}\left(C_1 + \frac{A^2}{4}\ln t\right), \quad a(t) = C_2 e^{B_1 t} t^{\frac{A^2}{8M_p^2}t}, \quad B_1 = \frac{1}{2M_p^2}\left(C_1 - \frac{A^2}{4}\right),$$

$$V(\phi) = \frac{3}{4M_p^2}\left(C_1 + \frac{A^2}{2}\ln\left(\frac{\phi}{A}\right)\right)^2 + \frac{A^4}{8\phi^2}.$$

Это решение очень интересное и, насколько известно авторам, оно никогда не рассматривалось в литературе.

Решение для экспоненциальной эволюции фантомного поля $\phi = Ae^{-\lambda t}$:

$$\Upsilon = \frac{3}{4M_p^2}\left(C_1 - \frac{A^2\lambda}{2}e^{-2\lambda t}\right)^2,$$

$$H = \frac{1}{2M_p^2}\left(C_1 - \frac{A^2\lambda}{2}e^{-2\lambda t}\right), \quad a(t) = C_2 e^{\frac{C_1}{2M_p^2}t}\exp\left(\frac{A^2}{8M_p^2}e^{-2\lambda t}\right),$$

$$V(\phi) = \frac{3}{4M_p^2}\left(C_1 - \frac{\lambda}{2}\phi^2\right)^2 + \frac{\lambda^2}{2}\phi^2. \qquad (10)$$

Решение для эволюции фантомного поля типа $\phi = A\ln(\mathrm{th}(\lambda t))$:

$$\Upsilon = \frac{3}{4M_p^2}\left(C_1 - A^2\lambda\left(\mathrm{th}\,\lambda t + \frac{1}{\mathrm{th}\,\lambda t}\right)\right)^2,$$

$$H = \frac{1}{2M_p^2}\left(C_1 - A^2\lambda\left(\mathrm{th}\,\lambda t + \frac{1}{\mathrm{th}\,\lambda t}\right)\right),$$

$$a(t) = \sqrt{2C_1 t + C_2 - \frac{A^2}{M_p^2}\ln\left(\frac{e^{2\lambda t} - e^{-2\lambda t}}{4}\right)},$$

$$V(\phi) = \frac{3}{4M_p^2}\left(C_1 - 2A^2\lambda \operatorname{ch}\frac{\phi}{A}\right)^2 - 2A^2\lambda^2 \operatorname{sh}^2\frac{\phi}{A}.$$

Решение для эволюции фантомного поля типа $\phi = A\ln(\operatorname{tg}(\lambda t))$:

$$\Upsilon = \frac{3}{4M_p^2}\left(C_1 + A^2\lambda\left(\operatorname{tg}\lambda t - \frac{1}{\operatorname{tg}\lambda t}\right)\right)^2,$$

$$H = \frac{1}{2M_p^2}\left(C_1 + A^2\lambda\left(\operatorname{tg}\lambda t - \frac{1}{\operatorname{tg}\lambda t}\right)\right),$$

$$a(t) = \sqrt{2C_1 t + C_2 + \frac{A^2}{M_p^2}\ln\left(\operatorname{tg}\lambda t + \frac{1}{\operatorname{tg}\lambda t}\right)},$$

$$V(\phi) = \frac{3}{4M_p^2}\left(C_1 + 2A^2\lambda \operatorname{sh}\frac{\phi}{A}\right)^2 + 2A^2\lambda^2 \operatorname{ch}^2\frac{\phi}{A}.$$

Решение для эволюции фантомного поля типа $\phi = A\operatorname{sh}^{-1}(\lambda t)$:

$$\Upsilon = \frac{3}{4M_p^2}\left(C_1 - \frac{A^2\lambda}{3}(\operatorname{ch}\lambda t(\operatorname{ch}^2\lambda t + 2))\right)^2,$$

$$H = \frac{1}{2M_p^2}\left(C_1 - \frac{A^2\lambda}{3}(\operatorname{ch}\lambda t(\operatorname{ch}^2\lambda t + 2))\right),$$

$$a(t) = \sqrt{2C_1 t + C_2 + \frac{A^2}{3M_p^2}\left(\frac{2e^{2\lambda t}}{(e^{2\lambda t}-1)^2} + \ln\left(\frac{2}{e^{2\lambda t}-1}\right) + \lambda t\right)},$$

$$V(\phi) = \frac{3}{4M_p^2}\left(C_1 - \frac{\lambda}{3A}\phi^3\left(1 + \frac{A^2}{\phi^2}\right)^{3/2}\right) + \frac{\lambda^2}{2A^2}\phi^4\left(1 + \frac{A^2}{\phi^2}\right).$$

Решение для эволюции фантомного поля типа $\phi = A\sin^{-1}(\lambda t)$:

$$\Upsilon = \frac{3}{4M_p^2}\left(C_1 - \frac{A^2\lambda}{3}\operatorname{ctg}^3\lambda t\right)^2,$$

$$H = \frac{1}{2M_p^2}\left(C_1 - \frac{A^2\lambda}{3}\operatorname{ctg}^3\lambda t\right),$$

$$a(t) = \sqrt{2C_1 t + C_2 + \frac{A^2}{6M_p^2}(\operatorname{ctg}^2\lambda t + 2\ln(\sin\lambda t))},$$

$$V(\phi) = \frac{3}{4M_p^2}\left(C_1 - \frac{\lambda}{3A}\phi^3\left(1 - \frac{A^2}{\phi^2}\right)^{3/2}\right)^2 + \frac{\lambda^2}{2A^2}\phi^4\left(1 - \frac{A^2}{\phi^2}\right).$$

2. Графическое представление результатов. В качестве примера проанализируем свойства и физические следствия одного из полученных решений. Для экспоненциальной эволюции фантомного поля зависимость физического потенциала от фантомного поля задается формулой (10). Положим значения всех произвольных постоянных, входящих в (10), равными единице, тогда потенциал поля будет иметь вид, представленный на рис. 1.

Потенциал имеет два ненулевых минимума, которые соответствуют минимальному значению энергии поля, т. е. речь идёт о наиболее выгодном энергетическом состоянии поля — основном состоянии, которое получается вырожденным.

График зависимости параметра w из уравнения состояния (9) от времени (см. рис. 2) подтверждает предположение о том, что рассматриваемое скалярное поле тёмного сектора ϕ является фантомным полем, поскольку $w < -1$ при неотрицательном значении космологического времени t.

При выборе других значений произвольных постоянных форма графиков может немного меняться, поэтому нами исследован один из возможных случаев. Значения произвольных постоянных могут быть определены с использованием данных наблюдательной космологии.

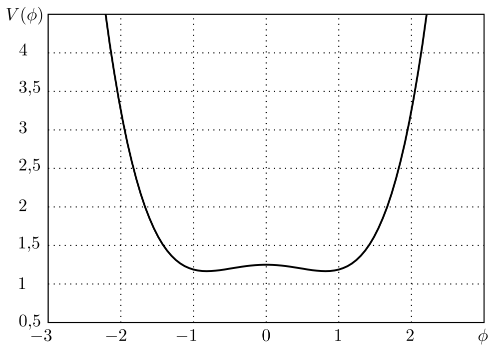

Рис. 1. Потенциал поля $V(\phi)$ в случае экспоненциальной эволюции фантомного поля ϕ

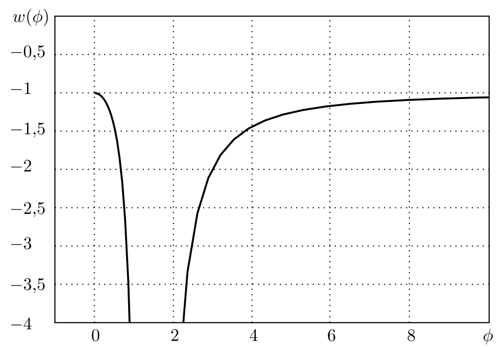

Рис. 2. Уравнение состояния $w(t)$ фантомного поля ϕ

Заключение. Метод суперпотенциала является универсальным и упрощает процесс нахождения точных решений для заданного типа полей тёмного сектора. Из более подробного анализа всех приведённых выше решений можно сделать вывод, что исследуемое скалярное поле является фантомным и относится к полям тёмного сектора, что соответствует теоретическим предположениям.

В работе получены новые классы потенциалов в фантомной космологии, что является важным для дальнейшего исследования фантомных полей.

Работа осуществлена при частичной финансовой поддержке по программе Российско-Индийского сотрудничества РФФИ (проект № 08-02-91307–ИНД_а) и ДСТ (проект № RUS P/84–DST). Работа одного из авторов, О. Г. П., частично поддержана грантами АВЦП (3341, 10854) и контрактами ФЦП (2173, 5163).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Copeland E. J., Sami M., Tsujikawa S.* Dynamics of dark energy // *IJMPD*, 2006. Vol. 15, no. 11. Pp. 1753–1935, arXiv: hep-th/0603057.
2. *Frolov A., Kofman L., Starobinsky A.* Prospects and problems of tachyon matter cosmology // *Phys. Let. B*, 2002. Vol. 545, no. 1–2. Pp. 8–16, arXiv: hep-th/0204187.
3. *Wald R. M.* General Relativity. London: University of Chicago Press, 1984. 506 pp.

4. *Червон С. В., Сами М.* Точные решения космологической инфляции на бране Рандалл–Сандрум // *Электронный научный журнал «Исследовано в России»*, 2009, 088. С. 1151–1160, `http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2009/088.pdf`. [*Chervon S. V., Sami M.* Exact solutions of cosmological inflation on the brane Randall–Sandrum // *Élektronniy nauchniy zhurnal "Issledovano v Rossii"*, 2009, 088. Pp. 1151–1160].

MSC: 83F05, 83E15

THE EXACT COSMOLOGICAL SOLUTIONS FOR PHANTOM FIELDS

***S. V. Chervon*[1], *O. G. Panina*[2]**

[1] I. N. Ul'yanov's Ul'yanovsk State Pedagogical University,
4, pl. 100-letiya so dnya rozhdeniya V. I. Lenina, Ul'yanovsk, 432000, Russia.
[2] S. P. Korolyov Samara State Aerospace University
(National Research University),
34, Moskovskoe sh., Samara, 443086, Russia.

E-mails: `chervon.sergey@gmail.com`, `panina.ph@gmail.com`

The application of the method of super-potential to solution of the problems of cosmology with phantom fields is examined. The classes of exact solutions are found and the periods of time with the predominance of dark energy are established.

Key words: *cosmology, phantom field, dark sector field, exact solutions.*

Original article submitted 20/XII/2010;
revision submitted 15/VI/2011.

Sergey V. Chervon (Dr. Sci (Phys. & Math.)), Professor, Dept. of Physics. *Ol'ga G. Panina*, Assistant, Dept. of Physics.