УДК 539.384.6

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СТАТИЧЕСКОГО ИЗГИБА ПЛАСТИНОК ПРИ ЛОКАЛЬНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ ВДОЛЬ КРИВЫХ СЛОЖНОГО ВИДА

Р. А. Сафонов

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского,
410012, Саратов, ул. Астраханская, 83.

E-mail: safonovra@gmail.com

Рассматривается численное решение задач статического изгиба тонких пластинок с помощью метода сплайн-коллокации. В качестве внешней нагрузки используются локальные усилия специального вида. Оценивается их эффективность как аппроксимации сосредоточенных сил, приложенных вдоль произвольных кривых. Проводится сравнение результатов, полученных этим методом, с расчётами в конечно-элементном пакете.

Ключевые слова: *пластинки, локальные усилия, метод сплайн-коллокации.*

Введение. В последнее время для численного решения задач статического изгиба и установившихся колебаний пластинок и оболочек широко применяется метод сплайн-коллокации. Это объясняется рядом причин, среди которых следует отметить простоту реализации, например, по сравнению с методом конечных элементов, вычислительную эффективность, устойчивость счета, разнообразие возможных вариантов граничных условий и др. Для применения метода сплайн-коллокации внешние усилия, приложенные к пластинке, должны быть заданы в виде распределенной поперечной нагрузки на одной из лицевых поверхностей. Если на пластинку помимо распределенной нагрузки действуют сосредоточенные силы, их обычно заменяют на локальные усилия. Полученная таким образом задача эквивалентна исходной с точностью до принципа Сен—Венана.

Как правило, для замены сосредоточенных сил используется кусочно-постоянная функция. Например, приложенные в точке (p_x, p_y) сосредоточенные усилия можно аппроксимировать функцией, равной нулю на всей площади пластинки за исключением узкой зоны $p_x - \delta \leqslant x \leqslant p_x + \delta$, $p_y - \delta \leqslant y \leqslant p_y + \delta$. В указанной зоне значение функции подбирается таким образом, чтобы равнодействующая нагрузки при замене не изменялась [1, 2].

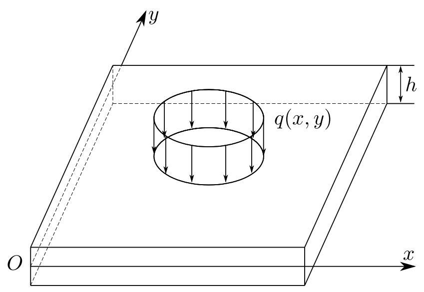
Помимо кусочно-постоянной функции для этих целей можно использовать другие функции, ненулевые значения которых сосредоточены в узкой зоне вблизи зоны приложения нагрузки. Так, для рассмотренного ранее примера сосредоточенной в точке силы локальную нагрузку можно задать функцией

$$q(x,y) = C\cos^k\left(\frac{\pi}{2}\frac{x-p_x}{\max\limits_{(\xi,\eta)\in D}|\xi - p_x|}\right)\cos^k\left(\frac{\pi}{2}\frac{y-p_y}{\max\limits_{(\xi,\eta)\in D}|\eta - p_y|}\right), \quad k \gg 1, \tag{1}$$

где C — нормирующий коэффициент, D — область пластинки. Показатель степени k выбирается таким образом, чтобы при удалении от точки приложения нагрузки значения рассматриваемой функции быстро снижались до неотличимого от нуля значения, однако при этом в зону ненулевых значений попадало достаточное количество точек расчётной сетки. Такие функции применялись в работах [3–8] для численного решения задач статического изгиба и установившихся колебаний тонких

Роман Анатольевич Сафонов, аспирант, каф. математической теории упругости и биомеханики.

прямоугольных в плане пластинок и оболочек из упругого изотропного, ортотропного и упруго-наследственного материала при локальных нагрузках, приложенных в точке и вдоль прямых. В данной работе рассматривается использование функций такого вида для задания локальной нагрузки, приложенной вдоль кривой $f(x,y)=0$.



Постановка задачи. Имеется тонкая прямоугольная в плане пластинка из упругого изотропного материала, отнесённая к декартовым координатам x, y (см. рисунок). К одной из лицевых поверхностей пластинки приложены внешние поперечные распределённые усилия $q(x,y)$. Прогиб пластинки определяется из решения краевой задачи для бигармонического уравнения [9]

$$D\nabla^2\nabla^2 w = q(x,y)$$

с граничными условиями, соответствующими способам заделки краев пластинки. Здесь $D = E/(12(1-\nu^2))$ — жёсткость пластинки на изгиб; E, ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала пластинки соответственно.

Для численного решения поставленной задачи используется метод сплайн-коллокации [1, 10, 11].

Если сосредоточенные усилия приложены вдоль кривой $f(x,y)=0$, то для аппроксимации их локальными нагрузками функцию (1) следует модифицировать:

$$q(x,y) = C\cos^k\left(\frac{\pi}{2}\frac{f(x,y)}{\max\limits_{(\xi,\eta)\in D}|f(\xi,\eta)|}\right), \quad k \gg 1.$$

Для окружности радиуса R с центром в точке (p_x, p_y) имеем

$$q(x,y) = C\cos^k\left(\frac{\pi}{2}\frac{(x-p_x)^2+(y-p_y)^2-R^2}{\max\limits_{(\xi,\eta)\in D}|(\xi-p_x)^2+(\eta-p_y)^2-R^2|}\right), \quad k \gg 1. \tag{2}$$

Результаты. В таблице приведены максимальные значения прогиба пластинки при различных вариантах граничных условий на краях под действием локальной нагрузки, сосредоточенной в окрестности центра пластинки (при $R=0$) и вдоль окружности радиуса R с центром в геометрическом центре пластинки. В методе сплайн-коллокации было взято 80 точек коллокации и 200 точек ортогонализации. План пластинки представляет собой квадрат со стороной 1 м, толщина пластинки равна 0,01 м. Материал пластинки — сталь ($E = 2\cdot 10^{11}$ Па, $\nu = 0{,}3$). Значения прогиба, полученные методом сплайн-коллокации с локальной нагрузкой вида (2), обозначены верхним индексом S, а индексу F соответствуют значения, вычисленные с помощью коммерческого конечно-элементного пакета `Comsol Multiphysics` для соответствующей сосредоточенной силы. При этом в конечно-элементных расчётах пластинка рассматривалась как трёхмерное упругое тело.

Из приведённых в таблице данных видно, что различие между максимальными значениями прогиба $W^S_{\max}$ и $W^F_{\max}$, полученными с помощью метода сплайн-коллокации и метода конечных элементов, не превосходит 10 %. При различных значениях показателя степени k имеет место небольшое расхождение между результатами, которое можно объяснить различным количеством точек расчётной сетки, попавшим в зону ненулевых значений функции локальной нагрузки.

Максимальные прогибы пластинки

R	$W^F_{\max}$, м	$W^S_{\max}$, м	
		$k = 5000$	$k = 10000$
Жёсткая заделка всего контура			
0,00	$2{,}957 \cdot 10^{-7}$	$2{,}869 \cdot 10^{-7}$	$2{,}831 \cdot 10^{-7}$
0,02	$2{,}933 \cdot 10^{-7}$	$2{,}717 \cdot 10^{-7}$	$2{,}797 \cdot 10^{-7}$
0,05	$2{,}837 \cdot 10^{-7}$	$2{,}685 \cdot 10^{-7}$	$2{,}761 \cdot 10^{-7}$
0,10	$2{,}546 \cdot 10^{-7}$	$2{,}541 \cdot 10^{-7}$	$2{,}583 \cdot 10^{-7}$
0,20	$1{,}760 \cdot 10^{-7}$	$1{,}796 \cdot 10^{-7}$	$1{,}790 \cdot 10^{-7}$
Шарнирное опирание всего контура			
0,00	$6{,}373 \cdot 10^{-7}$	$5{,}942 \cdot 10^{-7}$	$5{,}858 \cdot 10^{-7}$
0,02	$6{,}199 \cdot 10^{-7}$	$5{,}904 \cdot 10^{-7}$	$6{,}008 \cdot 10^{-7}$
0,05	$6{,}159 \cdot 10^{-7}$	$5{,}863 \cdot 10^{-7}$	$5{,}962 \cdot 10^{-7}$
0,10	$5{,}782 \cdot 10^{-7}$	$5{,}673 \cdot 10^{-7}$	$5{,}731 \cdot 10^{-7}$
0,20	$4{,}621 \cdot 10^{-7}$	$4{,}614 \cdot 10^{-7}$	$4{,}609 \cdot 10^{-7}$
Консольная пластинка			
0,00	$6{,}069 \cdot 10^{-6}$	$5{,}967 \cdot 10^{-6}$	$5{,}640 \cdot 10^{-6}$
0,02	$6{,}069 \cdot 10^{-6}$	$6{,}133 \cdot 10^{-6}$	$6{,}321 \cdot 10^{-6}$
0,05	$6{,}081 \cdot 10^{-6}$	$6{,}138 \cdot 10^{-6}$	$6{,}121 \cdot 10^{-6}$
0,10	$6{,}047 \cdot 10^{-6}$	$6{,}161 \cdot 10^{-6}$	$6{,}126 \cdot 10^{-6}$
0,20	$5{,}736 \cdot 10^{-6}$	$6{,}321 \cdot 10^{-6}$	$6{,}153 \cdot 10^{-6}$
Две смежные стороны жёстко заделаны, остальные свободны			
0,00	$1{,}697 \cdot 10^{-6}$	$1{,}655 \cdot 10^{-6}$	$1{,}564 \cdot 10^{-6}$
0,02	$1{,}737 \cdot 10^{-6}$	$1{,}718 \cdot 10^{-6}$	$1{,}718 \cdot 10^{-6}$
0,05	$1{,}707 \cdot 10^{-6}$	$1{,}722 \cdot 10^{-6}$	$1{,}722 \cdot 10^{-6}$
0,10	$1{,}725 \cdot 10^{-6}$	$1{,}739 \cdot 10^{-6}$	$1{,}739 \cdot 10^{-6}$
0,20	$1{,}847 \cdot 10^{-6}$	$1{,}852 \cdot 10^{-6}$	$1{,}852 \cdot 10^{-6}$
Две смежные стороны шарнирно опёрты, остальные свободны			
0,00	$1{,}008 \cdot 10^{-5}$	$9.549 \cdot 10^{-6}$	$9.027 \cdot 10^{-6}$
0,02	$1{,}007 \cdot 10^{-5}$	$9{,}749 \cdot 10^{-6}$	$9{,}748 \cdot 10^{-6}$
0,05	$1{,}008 \cdot 10^{-5}$	$9{,}749 \cdot 10^{-6}$	$9{,}749 \cdot 10^{-6}$
0,10	$1{,}008 \cdot 10^{-5}$	$9{,}749 \cdot 10^{-6}$	$9{,}749 \cdot 10^{-6}$
0,20	$1{,}008 \cdot 10^{-5}$	$9{,}749 \cdot 10^{-6}$	$9{,}749 \cdot 10^{-6}$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Григоренко, Я. М.* Некоторые подходы к численному решению линейных и нелинейных задач теории оболочек в классической и уточненной постановках // *Прикл. мех., Киев*, 1996. Т. 32, №6. С. 3–39; англ. пер.: *Grigorenko Ya. M.* Approaches to the numerical solution of linear and nonlinear problems in shell theory in classical and refined formulations // *Int. Appl. Mech.*. Vol. 32, no. 6. Pp. 409–442.
2. *Григоренко Я. М., Крюков Н. Н., Крижановская Т. В.* Расчет гофрированных круглых пластин под действием локальной нагрузки как гибкой системы из оболочек вращения // *Прикл. мех., Киев*, 1998. Т. 34, №4. С. 36–42; англ. пер.: *Grigorenko Ya. M., Kryukov N. N., Krizhanovskaya T. V.* Design of corrugated circular plates under a local load as a flexible system of shells of revolution // *Int. Appl. Mech.*, 1998. Vol. 34, no. 4. Pp. 327–333.
3. *Недорезов П. Ф., Ромакина О. М., Сафонов Р. А.* Модифицированный метод сплайн-коллокации в задачах о колебаниях тонкой прямоугольной вязкоупругой пластинки //

Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, 2010. Т. 10, № 3. С. 59–64. [*Nedorezov P. F., Romakina O. M., Safonov R. A.* Modified spline collocation method in the problems of thin rectangular viscoelastic plate vibrations // *Izv. Saratov. Univ. Mat. Mekh. Inform.*, 2010. Vol. 10, no. 3. Pp. 59–64].

4. *Сафонов Р. А.* Численное решение некоторых задач статического изгиба прямоугольных пластин под действием локальной нагрузки / В сб.: *Математика. Механика*: Сб. науч. тр.. Т. 11. Саратов: Сарат. ун-т, 2009. С. 133–136. [*Safonov R. A.* Numerical solution of some problems of static bending of rectangular plates under the action of a local load / In: *Mathematics. Mechanics.* Vol. 11. Saratov: Sarat. Un-t, 2009. Pp. 133–136].
5. *Сафонов Р. А.* Статический изгиб ортотропной прямоугольной пластинки при локальных воздействиях. / В сб.: *Механика деформируемых сред*: Межвуз. науч. сб.. Т. 16. Саратов: Сарат. ун-т, 2010. С. 93–96. [*Safonov R. A.* Static bending of orthotropic rectangular plate under local influences / In: *Deformable media mechanics.* Vol. 16. Saratov: Sarat. Un-t, 2010. Pp. 93–96].
6. *Сафонов Р. А.* Установившиеся колебания вязкоупругой пластинки при локальных воздействиях / В сб.: *Проблемы прочности элементов конструкций под действием нагрузок и рабочих сред*: Сб. науч. тр. Саратов: СГТУ, 2010. С. 109–113. [*Safonov R. A.* Steady-state oscillations of viscoelastic plate in the local influences / In: *Problems of the strength of structural elements under the action of loads and working media.* Saratov: SGTU, 2010. Pp. 109–113].
7. *Сафонов Р. А.* Труды седьмой Всероссийской научной конференции с международным участием. Часть 1: Математические модели механики, прочности и надёжности элементов конструкций / Матем. моделирование и краев. задачи. Самара: СамГТУ, 2010. [*Safonov R. A.* Proceedings of the Seventh All-Russian Scientific Conference with international participation. Part 1 / Matem. Mod. Kraev. Zadachi. Samara: SamGTU, 2009].
8. *Сафонов Р. А.* Численное исследование установившихся колебаний прямоугольной ортотропной пластинки при локальных воздействиях / В сб.: *Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики*: Сб. тр. Международн. конф-ции. Воронеж: ВГУ, 2010. С. 325–328. [*Safonov R. A.* Numerical research of steady oscillations of a rectangular orthotropic plate under local influences / In: *Actual Problems of Applied Mathematics, Computer Science, and Mechanics.* Voronezh: VGU, 2010. Pp. 325–328].
9. *Тимошенко С. П., Войновский–Кригер С.* Пластинки и оболочки, 1966. 636 с. [*Timoshenko S. P., Woinowskiy–Krieger S.* Theory of plates and shells. Moscow: Nauka, 1966. 636 pp.]
10. *Григоренко, Я. М., Беренов М. Н.* Решения двумерных задач об изгибе прямоугольных пластин на основе метода сплайн-коллокации // *Докл. АН. УССР. Сер. А.*, 1987. № 8. С. 22–25. [*Grigorenko Ya. M., Berenov M. N.* Solution of two-dimensional problems on bending of rectangular plates on the basis of spline approximation // *Dokl. Akad. Nauk Ukr. SSR, Ser. A*, 1987. no. 8. Pp. 22–25].
11. *Недорезов П. Ф., Шевцова Ю. В., Ромакина О. М.* Модифицированный метод сплайн-коллокации в задачах изгиба изотропных прямоугольных пластинок / В сб.: *Труды Второй Всероссийской научной конференции* (1–3 июня 2005 г.). Часть 1: Математические модели механики, прочность и надежность конструкций / Матем. моделирование и краев. задачи. Самара: СамГТУ, 2005. С. 203–209. [*Nedorezov P. F., Shevcova J. V., Romakina O. M.* A modified spline-collocation method in problems of bending of isotropic rectangular plates / In: *Proceedings of the Second All-Russian Scientific Conference* (1–3 June 2005). Part 1 / Matem. Mod. Kraev. Zadachi. Samara: SamGTU, 2005. Pp. 203–209].

Поступила в редакцию 26/VII/2011;
в окончательном варианте — 29/XI/2011.

MSC: 74S03; 74K20, 74K25

NUMERICAL RESEARCH OF STATIC BENDING OF PLATES AT THE LOCAL INFLUENCES ALONG COMPLEX FORM CURVES

R. A. Safonov

Saratov State University named after N. G. Chernyshevsky,
83, Astrkhanskaya st., Saratov, 410012, Russia.

E-mail: `safonovra@gmail.com`

The numerical solution for the problems of static bending of thin plates by spline collocation method is considered. The local loads of a special type are used as external forces. Their efficiency as the approximation of concentrated loads applied along compound curves is estimated. The results obtained by this method are compared with those calculated by finite element software.

Key words: *plates, local loads, spline-collocation method.*

Original article submitted 26/VII/2011;
revision submitted 29/XI/2011.

Roman A. Safonov, Postgraduate Student, Dept. of Mathematical Theory of Elasticity & Biomechanics.