Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2011. № 3 (24). С. 157–161

Краткие сообщения

Дифференциальные уравнения

УДК 517.956

О ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ОПЕРАТОРАМИ М. САЙГО

Е. Ю. Арланова

Самарский государственный технический университет,
443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mail: earlanova@gmail.com

Для уравнения смешанного типа, в верхней полуплоскости представленного уравнением дробной диффузии, в нижней — влагопереноса, рассмотрена краевая задача с операторами М. Сайго. Доказана однозначная разрешимость поставленной задачи.

Ключевые слова: *уравнение смешанного типа, операторы М. Сайго, однозначная разрешимость задачи.*

1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение смешанного типа:

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - D^{\alpha}_{0+,y} u, \ y > 0, \\ y^2 u_{xx} - u_{yy} + a u_x, \ y < 0, \, |a| \leqslant 1. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $D^{\alpha}_{0+,y}$ — частная дробная производная Римана—Лиувилля порядка α, $0 < \alpha < 1$, от функции $u(x, y)$ по второй переменной [1]:

$$\left(D^{\alpha}_{0+,y} u\right)(x, y) = \frac{d}{dy} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^y \frac{u(x,t)}{(y-t)^{1-\alpha}} dt. \tag{2}$$

Пусть $D = D^+ \cup D^-$, где $D^+ = \{(x, y) : 0 \leqslant x, y \leqslant 1\}$ — квадрат, D^- — область, лежащая в нижней полуплоскости ($y < 0$) и ограниченная характеристиками $\xi = x - \dfrac{y^2}{2} = 0$ и $\eta = x + \dfrac{y^2}{2} = 1$ уравнения (1) при $y < 0$ и интервалом $J = (0, 1)$ прямой $y = 0$; $\Theta_0(x) = \left(\dfrac{x}{2}, -\sqrt{x}\right)$ и $\Theta_1(x) = \left(\dfrac{1+x}{2}, -\sqrt{1-x}\right)$ — точки пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $x \in J$, с характеристиками $\xi = 0$ и $\eta = 1$ соответственно; $\left(I^{\alpha,\beta,\eta}_{0+}\varphi\right)(x)$ — оператор М. Сайго, введенный в [2]; $\varphi(x) \in C\left(\overline{J}\right) \cap C^2(J)$, $\varphi_0(y)$, $\varphi_1(y)$ — заданные функции такие, что $y^{1-\alpha}\varphi_0(y)$, $y^{1-\alpha}\varphi_1(y) \in C\left(\overline{D^+}\right)$, $\varphi_0(0) = \varphi_1(0) = 0$.

Екатерина Юрьевна Арланова (к.ф.-м.н.), ст. преподаватель, каф. прикладной математики и информатики.

Для этого уравнения рассмотрим и исследуем следующую задачу.

Задача. *Найти решение $u(x,y)$ уравнения* (1) *в области D, удовлетворяющее краевым условиям*

$$u(0,y)=\varphi_0(y),\quad u(1,y)=\varphi_1(y); \tag{3}$$

$$A_1\left(I_{0+}^{a_1-\frac{1}{2},b_1+\frac{1}{2},c_1}u(t,0)\right)(x)+A_2\left(I_{0+}^{a_1,b_1,c_1}u_y(t,0)\right)(x)=\varphi(x), \tag{4}$$

где A_1, A_2, a_1, b_1, c_1 — заданные константы такие, что

$$\frac{1}{2}<a_1,b_1\leqslant 1, \tag{5}$$

а также условиям сопряжения

$$\begin{gathered}\lim_{y\to 0+}y^{1-\alpha}u(x,y)=\lim_{y\to 0-}u(x,y)\quad (x\in\overline{J}),\\ \lim_{y\to 0+}y^{1-\alpha}\left(y^{1-\alpha}u(x,y)\right)_y=\lim_{y\to 0-}u_y(x,y)\quad (x\in J).\end{gathered} \tag{6}$$

Будем искать решение $u(x,y)$ поставленной задачи в классе дважды дифференцируемых функций в области D таких, что

$$\begin{gathered}y^{1-\alpha}u(x,y)\in C\left(\overline{D^+}\right),\quad u(x,y)\in C\left(\overline{D^-}\right),\\ y^{1-\alpha}\left(y^{1-\alpha}u\right)_y\in C\left(D^+\cup\{(x,y):0<x<1,y=0\}\right),\\ u_{xx}\in C\left(D^+\cup D^-\right),\quad u_{yy}\in C\left(\overline{D^-}\right).\end{gathered} \tag{7}$$

2. Единственность решения задачи. Пусть существует решение исследуемой задачи. Введём следующие обозначения:

$$\begin{gathered}\Gamma(\alpha)\lim_{y\to 0+}y^{1-\alpha}u(x,y)=\tau_1(x),\quad \lim_{y\to 0-}u(x,y)=\tau_2(x),\\ \Gamma(\alpha)\lim_{y\to 0+}y^{1-\alpha}\left(y^{1-\alpha}u(x,y)\right)_y=\nu_1(x),\quad \lim_{y\to 0-}u_y(x,y)=\nu_2(x).\end{gathered} \tag{8}$$

Решение уравнения (1) в квадрате $0\leqslant x,y\leqslant 1$, удовлетворяющее условиям (3) и

$$\Gamma(\alpha)\lim_{y\to 0+}y^{1-\alpha}u(x,y)=\tau_1(x)\quad \left(x\in\overline{J}\right), \tag{9}$$

выражается так [3]:

$$u(x,y)=\int_0^y\varphi_0(\eta)G_\xi(x,y,0,\eta)d\eta-\int_0^y\varphi_1(\eta)G_\xi(x,y,1,\eta)d\eta+ \\ +\int_0^1\tau_1G(x,y,\xi,0)d\xi, \tag{10}$$

где

$$G(x,y,\xi,\eta)=\frac{(y-\eta)^{\beta-1}}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[e_{1,\beta}^{1,\beta}\left(-\frac{|x-\xi+2n|}{(y-\eta)^\beta}\right)-e_{1,\beta}^{1,\beta}\left(-\frac{|x+\xi+2n|}{(y-\eta)^\beta}\right)\right],$$

$$\frac{\partial G(x,y,\xi,\eta)}{\partial\xi}=\frac{(y-\eta)^{\beta-1}}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{\operatorname{sgn}(x-\xi+2n)}{|x-\xi+2n|}e_{1,\beta}^{0,\beta}\left(-\frac{|x-\xi+2n|}{(y-\eta)^\beta}\right)+\right.$$

$$+\frac{\operatorname{sgn}(x+\xi+2n)}{|x+\xi+2n|}e^{0,\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{|x+\xi+2n|}{(y-\eta)^{\beta}}\right)\Bigg], \quad \beta=\frac{\alpha}{2},$$

$$e^{\mu,\delta}_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+\mu)\Gamma(\delta-\beta n)}, \quad \alpha>\beta. \tag{11}$$

Можно показать, что

$$\nu_1(x)=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\tau_1''(x). \tag{12}$$

Найдём соотношение между $\tau_2(x)$ и $\nu_2(x)$, принесённое на J из гиперболической части D^- области D. Применяя оператор $\left(I^{a_1,b_1,c_1}_{0+}\right)^{-1}=\left(I^{-a_1,-b_1,a_1+c_1}_{0+}\right)$ к уравнению (4), получим

$$\nu_2(x)=-\frac{A_1}{A_2}\left(I^{-\frac{1}{2}}_{0+}\tau_2(t)\right)(x)+g(x), \tag{13}$$

где $g(x)=\dfrac{1}{A_2}\left(I^{-a_1,-b_1,a_1+c_1}_{0+}\varphi(t)\right)(x)$.

При $\varphi(x)\equiv 0$ имеем

$$\nu_2(x)=-\frac{A_1}{A_2}\left(I^{-\frac{1}{2}}_{0+}\tau_2(t)\right)(x)=-\frac{A_1}{A_2}\left(D^{\frac{1}{2}}_{0+}\tau_2(t)\right)(x). \tag{14}$$

Единственность решения задачи вытекает из аналога принципа экстремума А. В. Бицадзе [4].

Пусть $\max_{\overline{D^+}}u(x,y)=\tau(x_0)>0$. Тогда, в соответствии с принципом экстремума для операторов дробного дифференцирования [5], из (14) и условий $A_1>0$ и $A_2>0$ заключаем, что $\nu_2(x_0)<0$. Поскольку $\tau''(x_0)=0$, то из (12) заключаем, что $\nu_1(x_0)=0$. Из полученных условий $\nu_2(x_0)<0$ и $\nu_1(x_0)=0$ следует единственность решения задачи.

3. Существование решения задачи. Для доказательства существования решения исходной задачи сведем ее к интегральному уравнению Вольтерра второго порядка.

Выразим $\tau_1(x)$ из соотношения (12). Получим

$$\tau_1(x)=\Gamma(1+\alpha)\left(I^2_{0+}\nu_1(t)\right)(x). \tag{15}$$

Полагая $\tau_1(x)=\tau_2(x)=\tau(x)$ и $\nu_1(x)=\nu_2(x)=\nu(x)$, подставляя (15) в соотношение (13), с учётом свойств оператора Римана—Лиувилля [1] приходим к интегральному уравнению Вольтерра второго порядка:

$$\nu(x)=-\frac{A_1\Gamma(1+\alpha)}{A_2}\left(I^{\frac{3}{2}}_{0+}\nu(t)\right)(x)+g(x). \tag{16}$$

Перепишем (16) в виде

$$\nu(x)=g(x)+\frac{\lambda}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\int_0^x\nu(t)\sqrt{x-t}dt, \tag{17}$$

где $\lambda=-A_1\Gamma(1+\alpha)/A_2$.

Функция $g(x)\in C[0,1]\cap C^2(0,1)$, так как $\varphi(x)\in C[0,1]\cap C^2(0,1)$, поэтому, используя теорию интегральных уравнений [6], находим

$$\nu(x)=g(x)+\lambda\int_0^x\sqrt{x-t}E_{\frac{3}{2},\frac{3}{2}}\left(\lambda(x-t)^{\frac{3}{2}}\right)g(t)dt. \tag{18}$$

Здесь

$$E_{\alpha,\mu}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\mu+k\alpha)} \qquad (19)$$

— функция типа Миттаг—Леффлера, которая является целой функцией (комплексной) переменной $z=x+iy$ порядка $\dfrac{1}{\alpha}>0$ [6].

Подставляя (18) в (15), получим выражение для $\tau(x)$:

$$\tau(x)=\Gamma(1+\alpha)\left(I^2_{0+}g(t)\right)(x)+ \\ +\Gamma(1+\alpha)\lambda\left(I^2_{0+}\int_0^t\sqrt{t-s}E_{\frac{3}{2},\frac{3}{2}}\left(\lambda(t-s)^{\frac{3}{2}}\right)g(s)ds\right)(x). \qquad (20)$$

Можно показать, что если $\lambda\in C$, то

$$\left(I^2_{0+}\int_0^t\sqrt{t-s}E_{\frac{3}{2},\frac{3}{2}}\left(\lambda(t-s)^{\frac{3}{2}}\right)g(s)ds\right)(x)= \\ =\int_0^x(x-s)^{\frac{5}{2}}E_{\frac{3}{2},\frac{7}{2}}\left(\lambda(x-s)^{\frac{3}{2}}\right)g(s)ds. \qquad (21)$$

Используя (21), получим окончательную формулу для $\tau(x)$:

$$\tau(x)=\Gamma(1+\alpha)\left(I^2_{0+}g(t)\right)(x)+\Gamma(1+\alpha)\lambda\int_0^x(x-s)^{\frac{5}{2}}E_{\frac{3}{2},\frac{7}{2}}\left(\lambda(x-s)^{\frac{3}{2}}\right)g(s)ds. \qquad (22)$$

Используя полученные таким образом функции $\tau(x)$ и $\nu(x)$, можно найти решение задачи в каждой из областей D^+ и D^-, а значит, и решение задачи в заданном классе функций в области D, удовлетворяющее краевым условиям (3) и (4) и условиям сопряжения (6).

Теорема. *Пусть ненулевые действительные константы* A_1, A_2, a_1, b_1, c_1 *удовлетворяют условию* (5). *Тогда задача* (3), (4) *для уравнения* (1) *имеет единственное решение, которое может быть найдено в форме решения задачи Коши, где* $\tau(x)$ *и* $\nu(x)$ *определены в* (22) *и* (18) *соответственно.*

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с. [*Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I.* Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications. Minsk: Nauka i Tekhnika, 1987. 688 pp.]
2. *Saigo M.* A certain boundary value problem for the Euler–Poisson–Darboux equation // *Math. Japan*, 1979. Vol. 24, no. 4. Pp. 377–385.
3. *Псху А. В.* Краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными дробного и континуального порядка. Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН, 2005. 186 с. [*Pskhu A. V.* Boundary value problems for partial differential equations with partial derivatives of fractional and continuum order. Nal'chik: Izd-vo KBNC RAN, 2005. 186 pp.]
4. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 488 с. [*Bitsadze A. V.* Some classes of partial differential equations. Moscow: Nauka, 1981. 488 pp.]
5. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. М.: Высш. шк., 1995. 301 с. [*Nakhushev A. M.* Equations of mathematical biology. Moscow: Vyssh. shk., 1995. 301 pp.]

6. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. 672 с. [*Dzhrbashyan M. M.* Integral transforms and representation of functions in the complex domain. Moscow: Nauka, 1966. 672 pp.]

Поступила в редакцию 21/VII/2011;
в окончательном варианте — 22/VIII/2011.

MSC: 35M12

ON THE PROBLEM FOR MIXED TYPE EQUATION WITH M. SAIGO OPERATORS

E. Y. Arlanova

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia.

E-mail: `earlanova@gmail.com`

In this paper boundary value problem with M. Saigo operators is considered for the equation of the mixed type. This equation is represented as an equation of fractional diffusion in upper half-plane and as an equation of moisture transfer in lower half-plane. One-valued solvability of the problem is proved.

Key words: *equation of the mixed type, M. Sajgo operators, one-valued solvability of a problem.*

Original article submitted 21/VII/2011;
revision submitted 22/VIII/2011.

Ekaterina Y. Arlanova (Ph. D. (Phys. & Math.)), Senior Teacher, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science.