Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2011. № 3 (24). С. 162–166

УДК 517.956.3

ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ ТЕЛЕГРАФНЫХ УРАВНЕНИЙ

Е. А. Козлова

Самарский государственный технический университет,
443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mail: leni2006@mail.ru

Рассмотрена задача граничного управления для системы телеграфных уравнений в прямоугольной области. С помощью метода Римана построены управляющие функции, переводящие процесс, описываемый системой, из заданного начального состояния в финальное. Неоднозначность полученных управлений заключена в способе задания продолжений условий на начальной прямой.

Ключевые слова: *система телеграфных уравнений, граничное управление, метод Римана.*

В последнее время особое внимание уделяется решению задач граничного управления для уравнений в частных производных гиперболического типа. В частности, В. А. Ильиным и Е. А. Моисеевым было подробно исследовано управление процессом, описываемым волновым уравнением (см., например, [1]), также рассматривались задачи граничного управления для телеграфного уравнения [2–4]. В [3] построено решение задачи при $T = 2l$: найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую однородному уравнению $u_{tt} - u_{xx} + c^2u = 0$ в прямоугольнике $Q_{2l}^T = [0,2l] \times [0,T]$, начальным условиям $u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)$ при $0 \leqslant x \leqslant 2l$ и финальным условиям $u(x,T) = \varphi_1(x)$, $u_t(x,T) = \psi_1(x)$ при $0 \leqslant x \leqslant 2l$ и получить управляющие функции $u(0,t) = \mu(t)$ и $u(2l,t) = \nu(t)$.

В настоящей работе рассматривается задача граничного управления для системы телеграфных уравнений. Пусть $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t))^\top$ — вектор-функция, C — постоянная действительная (2×2)-матрица с положительными собственными значениями, и для системы

$$u_{tt} - u_{xx} + Cu = 0 \tag{1}$$

выполняются следующие начальные

$$u(x,0) = \varphi_0(x), u_t(x,0) = \psi_0(x) \tag{2}$$

и финальные

$$u(x,T) = \varphi_1(x), u_t(x,T) = \psi_1(x) \tag{3}$$

условия, где $\varphi_0(x)$, $\psi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ — вектор-функции размерности 2. Необходимо построить решение этой задачи в прямоугольнике $Q = [0,l] \times [0,T]$, то есть найти управления $\mu(t) = u(0,t)$ и $\nu(t) = u(l,t)$ на левом и правом концах отрезка $[0,l]$, переводящие функцию $u(x,t)$ из начального состояния в финальное.

Два уравнения системы имеют одинаковые пары характеристик. Характеристики $t - x = T - l$ и $t + x = T$ разбивают прямоугольник Q на 4 области:

$\Delta_1 = \{t - T + l \leqslant x \leqslant T - t, 0 \leqslant x \leqslant l, 0 \leqslant t \leqslant T - l/2\}$,
$\Delta_2 = \{x + T - l \leqslant t \leqslant T - x, 0 \leqslant x \leqslant l/2\}$,
$\Delta_3 = \{T - t \leqslant x \leqslant t - T + l, T - l/2 \leqslant t \leqslant T\}$,
$\Delta_4 = \{T - x \leqslant t \leqslant x + T - l, l/2 \leqslant x \leqslant l\}$.

Будем считать, что $T > l$. В этом случае увеличим область Δ_1: пусть $\Delta_1 = \{t - T + l \leqslant x \leqslant T - t, 0 \leqslant t \leqslant T - l/2\}$. Для построения решения задачи (1)–(3) расширим промежуток задания функций $\varphi_0(x)$, $\psi_0(x)$ до отрезка $[l - T, T]$. Теперь

Елена Александровна Козлова, аспирант, каф. прикладной математики и информатики.

в области Δ_1 функция $u(x,t)$ определена начальными условиями (2), а в области Δ_3 — финальными условиями (3). Поскольку точка $(l/2, T-l/2)$ принадлежит одновременно Δ_1 и Δ_3, продолжения $\varphi_0(x)$, $\psi_0(x)$ необходимо выбирать таким образом, чтобы решения двух задач Коши в данной точке совпадали. Пусть вектор b — их общее значение.

Если $\overline{u}(x,t)$ — решение задачи успокоения для системы уравнений (1) с начальными условиями

$$\overline{u}(x,0) = \varphi_0(x) - \tilde{u}(x) = \tilde{\varphi}_0(x), \qquad \overline{u}_t(x,0) = \psi_0(x)$$

и нулевыми финальными условиями; $\underline{u}(x,t)$ — решение задачи приведения в наперед заданное состояние для (1) с нулевыми начальными условиями и финальными условиями

$$\underline{u}(x,l) = \varphi_1(x) - \tilde{u}(x) = \tilde{\varphi}_1(x), \qquad \underline{u}_t(x,l) = \psi_1(x),$$

а $\tilde{u}(x)$ — зависящее только от x решение системы телеграфных уравнений (1), для которого $\tilde{u}(l/2) = b$, то решение задачи (1)–(3) представимо [2, 3] в виде суммы

$$u(x,t) = \tilde{u}(x) + \overline{u}(x,t) + \underline{u}(x,t).$$

В областях Δ_1 и Δ_3 функции $\overline{u}(x,t)$, $\underline{u}(x,t)$ определяются данными на прямых $t = 0$ и $t = T$, а в Δ_2 и Δ_4 — данными на характеристиках $t - x = T - l$ и $t + x = T$. Для решения полученных задач Коши и Гурса используется метод Римана [5]. Функция Римана телеграфного уравнения (в характеристических координатах $\xi = x + t$, $\eta = x - t$) имеет вид

$$R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!k!} \frac{c^{2k}\sigma^k}{4^k} = {}_0F_1\left(1; \frac{c^2\sigma}{4}\right),$$

где $\sigma = (\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)$, а ${}_0F_1(a;z)$ — обобщённый гипергеометрический ряд [6]. Для решения задач Коши и Гурса в случае системы телеграфных уравнений используется матрица Римана

$$R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0) = {}_0F_1\left(1; \frac{C\sigma}{4}\right),$$

где ${}_0F_1(a;Z)$ — матричный аналог обобщённого гипергеометрического ряда [7].

В области Δ_1 имеем $\underline{u}(x,t) = 0$,

$$\begin{aligned}\overline{u}(x,t) = \frac{\tilde{\varphi}_0(x+t) + \tilde{\varphi}_0(x-t)}{2} &+ \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} {}_0F_1\left(1; \frac{C}{4}\left((x-z)^2 - t^2\right)\right)\psi_0(z)dz - \\ &- \frac{Ct}{4}\int_{x-t}^{x+t} {}_0F_1\left(2; \frac{C}{4}\left((x-z)^2 - t^2\right)\right)\tilde{\varphi}_0(z)dz,\end{aligned}$$

в области Δ_3 — $\overline{u}(x,t) = 0$,

$$\begin{aligned}\underline{u}(x,t) = \frac{\tilde{\varphi}_1(x-t+T) + \tilde{\varphi}_1(x+t-T)}{2} &- \\ - \frac{1}{2}\int_{x+t-T}^{x-t+T} {}_0F_1\left(1; \frac{C}{4}\left((x-z)^2 - (T-t)^2\right)\right)\psi_1(z)dz &- \\ - \frac{C(T-t)}{4}\int_{x+t-T}^{x-t+T} {}_0F_1\left(2; \frac{C}{4}\left((x-z)^2 - (T-t)^2\right)\right)\tilde{\varphi}_1(z)dz&.\end{aligned}$$

Введём следующие обозначения:

$$a_{00} = l - T, \quad a_{10} = 0, \quad a_{01} = T, \quad a_{11} = l,$$

$$r_{ij}(x) = \frac{\tilde\varphi_i(2x-a_{ij})+\tilde\varphi_i(a_{ij})}{2} + \\ + \frac{(-1)^{i+j}}{2}\int_{a_{ij}}^{2x-a_{ij}} {}_0F_1\left(1; \frac{C}{4}(z-a_{ij})(z-2x+a_{ij})\right)\psi_i(z)dz - \\ - \frac{C(x-a_{ij})}{4}\int_{a_{ij}}^{2x-a_{ij}} {}_0F_1\left(2; \frac{C}{4}(z-a_{ij})(z-2x+a_{ij})\right)\tilde\varphi_i(z)dz,$$

$$v_{ij}(x,\tau) = r_{ij}\left(\frac{x+\tau+l}{2}\right) + \\ + \frac{C(x-\tau-l)}{4}\int_0^{x+\tau} {}_0F_1\left(2; \frac{C}{4}(z-x-\tau)(\tau-x+l)\right) r_{ij}\left(\frac{z+l}{2}\right)dz,$$

где $r_{ij}(x)$, $v_{ij}(x,\tau)$ — вектор-функции размерности 2; i и j принимают значения 0, 1. Решения задач успокоения и приведения в наперед заданное состояние в Δ_2 имеют вид

$$\overline{u}(x,t) = v_{00}(x,t-T), \qquad \underline{u}(x,t) = v_{10}(x,T-t-l),$$

в Δ_4 —

$$\overline{u}(x,t) = v_{01}(x,T-t-l), \qquad \underline{u}(x,t) = v_{11}(x,t-T).$$

Вектор-функцию $\tilde u(x)$ положим равной

$$\tilde u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C^k(x-\frac{l}{2})^{2k}}{(2k)!}\, b.$$

Тогда искомое решение задачи (1)–(3) $u(x,t)$ определено в области Q, и управления $\mu(t) = u(0,t)$ и $\nu(t) = u(l,t)$ имеют вид

$$\mu(t) = \tilde u(0) + \frac{\tilde\varphi_0(t)+\tilde\varphi_0(-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{-t}^{t} {}_0F_1\left(1; \frac{C}{4}\left(z^2-t^2\right)\right)\psi_0(z)dz - \\ - \frac{Ct}{4}\int_{-t}^{t} {}_0F_1\left(2; \frac{C}{4}\left(z^2-t^2\right)\right)\tilde\varphi_0(z)dz,$$

$$\nu(t) = \tilde u(l) + \frac{\tilde\varphi_0(l+t)+\tilde\varphi_0(l-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{l-t}^{l+t} {}_0F_1\left(1; \frac{C}{4}\left((z-l)^2-t^2\right)\right)\psi_0(z)dz - \\ - \frac{Ct}{4}\int_{l-t}^{l+t} {}_0F_1\left(2; \frac{C}{4}\left((z-l)^2-t^2\right)\right)\tilde\varphi_0(z)dz$$

при $0 \leqslant t < T-l$ и

$$\mu(t) = \tilde u(0) + r_{00}\left(\frac{t-T+l}{2}\right) + r_{10}\left(\frac{T-t}{2}\right) - \\ - \frac{C(t-T+l)}{4}\int_0^{t-T} {}_0F_1\left(2; \frac{C}{4}(z-t+T)(t-T+l)\right) r_{00}\left(\frac{z+l}{2}\right)dz - \\ - \frac{C(T-t)}{4}\int_0^{T-t-l} {}_0F_1\left(2; \frac{C}{4}(z+t-T+l)(T-t)\right) r_{10}\left(\frac{z+l}{2}\right)dz,$$

$$\nu(t) = \tilde{u}(l) + r_{01}\left(\frac{T-t+l}{2}\right) + r_{11}\left(\frac{t-T+2l}{2}\right) + \\
+ \frac{C}{4}(t-T+l)\int_0^{T-t} {}_0F_1\left(2; \frac{C}{4}(z+t-T)(T-t-l)\right) r_{01}\left(\frac{z+l}{2}\right) dz + \\
+ \frac{C}{4}(T-t)\int_0^{t-T+l} {}_0F_1\left(2; \frac{C}{4}(z-t+T-l)(t-T)\right) r_{11}\left(\frac{z+l}{2}\right) dz$$

при $T - l \leqslant t \leqslant T$.

Следует отметить, что в рассмотренном случае $T > l$ задача (1)–(3) не имеет единственного решения, то есть функции $\mu(t)$ и $\nu(t)$ определяются неоднозначно. В построенных в данной работе управлениях неоднозначность зависит от выбора продолжений начальных условий (2) на отрезок $[l-T, T]$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Ильин В. А.* Граничное управление процессом колебаний на двух концах в терминах обобщённого решения волнового уравнения с конечной энергией // *Дифференц. уравнения*, 2000. Т. 36, № 11. С. 1513–1528; *Il'in V. A.* Boundary control of oscillations on two ends in terms of the generalized solution of the wave equation with finite energy // *Differ. Equ.*, 2000. Vol. 36, no. 11. Pp. 1659–1675.
2. *Ильин В. А., Моисеев Е. И.* О граничном управлении на одном конце процессом, описываемым телеграфным уравнением // *Докл. РАН*, 2002. Т. 387, № 5. С. 600–603. [*Il'in V. A., Moiseev E. I.* Boundary control at one endpoint of a process described by a telegraph equation // *Dokl. RAN*, 2002. Vol. 387, no. 5. Pp. 600–603].
3. *Ильин В. А., Моисеев Е. И.* Граничное управление на двух концах процессом, описываемым телеграфным уравнением // *Докл. РАН*, 2004. Т. 394, № 2. С. 154–158. [*Il'in V. A., Moiseev E. I.* Boundary control at two endpoints of a process described by the telegraph equation // *Dokl. RAN*, 2004. Vol. 394, no. 2. Pp. 154–158].
4. *Боровских А. В.* Формулы граничного управления неоднородной струной. I // *Дифференц. уравнения*, 2007. Т. 43, № 1. С. 64–89; англ. пер.: *Borovskikh A. V.* Formulas of boundary control of an inhomogeneous string. I // *Differ. Equ.*, 2007. Vol. 43, no. 1. Pp. 69–95.
5. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с. [*Bitsadze A. V.* Some classes of partial differential equations. Moscow: Nauka, 1981. 448 pp.]
6. *Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G.* Higher transcendental functions. Vol. I / ed. H. Bateman. New York – Toronto – London: McGraw-Hill Book Co, Inc., 1953. 302 pp.; русск. пер.: *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. В 3-х т. Т. 1: Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. М.: Наука, 1973. 296 с.
7. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988. 549 с. [*Gantmakher F. R.* Theory of matrices. Moscow: Nauka. 549 pp.]

Поступила в редакцию 10/III/2011;
в окончательном варианте — 10/IX/2011.

MSC: 35L51; 93C20, 35B37, 93C73

THE CONTROL PROBLEM FOR THE SYSTEM OF TELEGRAPH EQUATIONS

E. A. Kozlova

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia.

E-mail: leni2006@mail.ru

The boundary control problem for the system of telegraph equations was considered in the rectangular region. The control functions transferring the process described by this system from the given initial state to the final state were constructed using the Riemann method. The ambiguity of the obtained controls consists in the way the conditions are continued in the initial line.

Key words: *the system of telegraph equations, boundary control, Riemann method.*

Original article submitted 10/III/2011;
revision submitted 10/IX/2011.

Elena A. Kozlova, Postgraduate Student, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science.