Математическое моделирование

УДК 519.865.5

АНАЛИЗ ВЫСОКОВОЛАТИЛЬНЫХ РЫНКОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА БЕРГА И ФИЛЬТРОВ ЧЕБЫШЕВА II РОДА И СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РИСКА УБЫТОЧНОСТИ ЕГО ИНСТРУМЕНТОВ

А. П. Котенко, М. Б. Букаренко

Самарский государственный технический университет,
443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mails: ako1959@mail.ru, maxim.bukarenko@gmail.com

Приведён метод технического анализа высоковолатильных рынков в рамках теории цифровой обработки сигналов с применением метода максимальной энтропии для оценки спектральной плотности мощности сигнала и фильтров Чебышева II *рода. Дан алгоритм расчёта оптимального порядка АР-модели спектрального анализа. Предварительная медианная фильтрация устраняет импульсный шум входного сигнала. Разработан метод оценки доходности торгового алгоритма на базе статистического моделирования совокупности реализаций помехи с сохранением её спектра дисперсий.*

Ключевые слова: *линейный фильтр, медианный фильтр, фильтр Чебышева, спектральный анализ, метод Берга.*

Введение. Большинство технических индикаторов высоковолатильных рынков на основе скользящих средних (СС) можно рассматривать как цифровые фильтры. Игнорирование этого факта в техническом анализе наряду с игнорированием дискретности экономического временного ряда и нестационарности входящего сигнала ведёт к тому, что применение классических технических индикаторов необоснованно с точки зрения теории цифровой обработки сигналов и математической статистики. В. К. Кравчук показал [1], что применение более сложных, нежели СС, цифровых фильтров значительно повышает кумулятивную доходность индикаторов. Он вводит понятия «быстрой» и «медленной» линий тренда как откликов цифровых фильтров низких частот с различными частотами среза [2], выбранными параметрическим методом максимальной энтропии Берга.

Однако при этом отсутствуют методика выбора порядка авторегрессионной модели спектрального оценивания и характеристики применяемых цифровых фильтров, торговый алгоритм громоздок, нет статистической значимости оценок, полученных при тестировании торговой системы. В данной работе приведён обзор разработанного алгоритма построения механической торговой системы, лишённой указанных недостатков, при сохранении логики алгоритма, предложенного в [1, 2].

1. Обзор алгоритма получения «быстрых» и «медленных» линий тренда. Оценим спектральную плотность мощности (СПМ) входящего сигнала методом максимальной энтропии Берга. Модель временного ряда, аппроксимирующая встречающиеся на практике детерминированные и стохастические процессы с дискретным временем, даётся следующим разностным уравнением [3]:

$$x\,[n] = -\sum_{k=1}^{p} a\,[k]\,x\,[n-k] + \sum_{k=0}^{q} b\,[k]\,u\,[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} h\,[k]\,u\,[n-k]\,.$$

Андрей Петрович Котенко (к.ф.-м.н., доц.), доцент, каф. прикладной математики и информатики. *Максим Борисович Букаренко*, аспирант, каф. прикладной математики и информатики.

Нормальные уравнения Юла—Уолкера для авторегрессионных параметров выглядят следующим образом:

$$\begin{vmatrix} \mathrm{R}_{xx}[0] & \mathrm{R}_{xx}[-1] & \dots & \dots & \mathrm{R}_{xx}[-p] \\ \mathrm{R}_{xx}[1] & \mathrm{R}_{xx}[0] & & & . \\ . & . & . & & . \\ . & . & & . & . \\ \mathrm{R}_{xx}[p] & \mathrm{R}_{xx}[-p] & \dots & \dots & \mathrm{R}_{xx}[0] \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ a[1] \\ . \\ . \\ a[p] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \rho \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Их рекурсивное решение методом Левинсона связывает АР-параметры порядков p и $p-1$ выражением

$$a_p[n] = a_{p-1}[n] + \mathrm{K}_p a^*_{p-1}[p-n]$$

при $n = 1, 2, \ldots, p-1$.

Ошибки линейного предсказания вперед и назад определяются так:

$$\mathrm{E}^f_p[n] = x[n] + \sum_{m=1}^{p} a^f_p[m]\, x[n-m],$$

$$\mathrm{E}^b_p[n] = x[n-p] + \sum_{m=1}^{p} a^{f*}_p[m]\, x[n+m-p].$$

Рекурсивные выражения, связывающие ошибки линейного предсказания моделей порядков p и $p-1$, записываются следующим образом:

$$\mathrm{E}^f_p[n] = \mathrm{E}^f_{p-1}[n] + \mathrm{K}_p \mathrm{E}^b_{p-1}[n-1]; \quad \mathrm{E}^b_p[n] = \mathrm{E}^b_{p-1}[n-1] + \mathrm{K}^*_p \mathrm{E}^f_{p-1}[n].$$

Для оценки коэффициента отражения при каждом значении параметра p минимизируется арифметическое среднее мощности ошибок линейного предсказания вперед и назад (то есть выборочная дисперсия ошибки предсказания):

$$\rho^{fb}_p = \tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{N}\sum_{n=p+1}^{N}\left|\mathrm{E}^f_p[n]\right|^2 + \frac{1}{N}\sum_{n=p+1}^{N}\left|\mathrm{E}^b_p[n]\right|^2\right].$$

Приравняв нулю производную этого выражения по коэффициенту отражения K_p, получим оценку для K_p:

$$\hat{\mathrm{K}}_p = -\frac{2\sum_{n=p+1}^{N}\mathrm{E}^f_{p-1}[n]\,\mathrm{E}^{b*}_{p-1}[n-1]}{\sum_{n=p+1}^{N}\left|\mathrm{E}^f_{p-1}[n]\right|^2 + \sum_{n=p+1}^{N}\left|\mathrm{E}^b_{p-1}[n-1]\right|^2}.$$

Все критерии выбора порядка модели являются целевыми функциями ошибки предсказания

$$\rho_i = \rho_{i-1}\left(1 - |a_i[p]|^2\right),$$

которые монотонно уменьшаются с ростом порядка модели. Для этого вводится штрафное слагаемое, растущее с увеличением p. Согласно критерию длины минимального описания [4] оно имеет следующий вид:

$$[p] = N\ln\hat{\rho}_p + p\ln N,$$

который и был положен в основу алгоритма выбора порядка АР-модели.

Выбор частоты отсечки базируется на предварительных оценках СПМ исследуемого временного ряда и производится по впадинам графика СПМ так, чтобы в полосу пропускания попали все доминирующие рыночные циклы. Это зависит, в свою очередь, от характера рынка, прежде всего, от волатильности.

Для фильтрации входящего сигнала были выбраны фильтры низких частот Чебышева II рода, имеющие в данном случае удовлетворительную АЧХ: хорошее подавление частот в полосе задерживания при наименьшем порядке фильтра; гладкость АЧХ в полосе задерживания при этом не столь важна.

Ещё одним новшеством нашего алгоритма построения адаптивных линий тренда по сравнению с [1] является применение линейных ФНЧ к сигналу, предварительно очищенному медианной фильтрацией от импульсных шумов, когда перепады значений сигнала велики по сравнению с дисперсией аддитивного белого шума. Выходной сигнал y_k скользящего медианного фильтра с окном шириной $2n+1$ для текущего отсчёта k формируется из входного временного ряда $(\dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots)$ формулой

$$y_k = \mathrm{med}(x_{k-n}, x_{k-n+1}, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+n-1}, x_{k+n}),$$

где $\mathrm{med}(x_1, \dots, x_m, \dots, x_{2n+1}) = x_{(n+1)}$ при ранжировании значений попавшего в окно вариационного ряда:

$$x_{(1)} = \min(x_1, x_2, \dots, x_{2n+1}) \leqslant x_{(2)} \leqslant x_{(3)} \leqslant \dots \leqslant x_{(2n+1)} = \max(x_1, x_2, \dots, x_{2n+1}).$$

2. Методика оценки доходности торгового алгоритма на базе статистического моделирования совокупности реализаций помехи. Эффективность предложенного алгоритма оценена на простейшей тестовой механической торговой системе с полученными адаптивными линиями тренда. Сигнал генерируется пересечением опорной медленной линией тренда графика цен, что является основным сигналом в классическом техническом анализе.

Нестационарность экономических временных рядов не позволяет получить статистически значимые оценки эффективности механической торговой системы (к примеру, кумулятивной доходности) тестированием на разных временных интервалах для различных тиккеров. Было найдено следующее решение: помехой считается разность цены закрытия и значений опорной медленной линии тренда. Кумулятивная доходность как основной показатель эффективности торговой системы есть случайная величина для данного тиккера на заданном временном интервале. Ставится задача смоделировать статистически значимое число реализаций входного сигнала с той же структурой помехи, на основе которых получить интервальную оценку генерального среднего совокупности кумулятивных доходностей.

Спектр помехи как стационарной случайной функции описывает распределение дисперсий по частотам. Под структурой помехи будем понимать спектр ее дисперсий. Спектр стационарной случайной функции построим следующим образом [5].

Рассмотрим стационарную случайную функцию $X(t)$ на интервале $(0, T)$ с корреляцией $K_x(t, t+\tau) = k_x(\tau)$. Функция $k_x(\tau)$ чётна: $k_x(\tau) = k_x(-\tau)$. При изменении t и t' от 0 до T аргумент $\tau = t - t'$ изменяется от $-T$ до T.

Чётную функцию на интервале $(-T, T)$ разложим в ряд Фурье по чётным гармоникам:

$$k_x(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \cos \omega_k \tau,$$

где $\omega_k = k\omega_1$; $\omega_1 = \pi/T$; $D_0 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T k_x(\tau)d\tau$; $D_k = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T k_x(\tau)\cos\omega_k\tau d\tau$, $k \neq 0$.

Случайную функцию $X(t)$ представим спектральным разложением

$$X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (U_k \cos \omega_k t + V_k \sin \omega_k t),$$

где некоррелированные случайные величины U_k, V_k с нулевыми математическими ожиданиями имеют равные дисперсии для каждой пары одинаковых индексов k. Эта формула позволяет найти требуемое число реализаций помехи и статистически значимую оценку того или иного критерия эффективности механической торговой системе для данного тиккера на заданном временном интервале.

Соответственно для каждого тиккера на заданном временном интервале строится интегральная функция распределения кумулятивной доходности. Вероятность $\mathsf{P}(CPR < 1)$ может служить новым показателем эффективности торгового алгоритма — мерой риска неполучения прибыли.

3. Заключение. Описанная методика технического анализа и тестирования его инструментов применима к любым высоковолатильным товарным, валютным и фондовым рынкам. При этом такие параметры эффективности алгоритма, как профит-фактор, вероятность ложного сигнала, средняя доходность от операции и кумулятивная доходность значительно превосходят соответствующие параметры классических инструментов технического анализа на базе скользящего среднего.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Кравчук В. К.* Новый адаптивный метод следования за тенденцией и рыночными циклами // *Валютный спекулянт*, 2000. № 12. С. 50–55. [*Kravchuk V. K.* New Adaptive Method of Following the Tendency and Market Cycles // *Valyutny Spekulyant*, 2000. no. 12. Pp. 50–55].
2. *Кравчук В. К.* Спектральный анализ колебаний валютного курса EUR/USD по методу максимальной энтропии // *Валютный спекулянт*, 2001. № 11. С. 14–17. [*Kravchuk V. K.* Spectral Analysis of EUR/USD Currency Rate Fluctuation Based on Maximum Entropy Method // *Valyutny Spekulyant*, 2001. no. 11. Pp. 14–17].
3. *Марпл С. Л.* Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1990. 547 с. [*Marple A. L* Digital Spectral Analysis and its Applications. Moscow: Mir, 1990. 547 pp.]
4. *Шахтарин Б. И., Ковригин В. А.* Методы спектрального оценивания случайных процессов. М.: Гелиос АРВ, 2005. 248 с. [*Shakhtarin B. I, Kovrigin V. A.* Methods of spectral estimation of random processes. Moscow: Gelios ARV, 2005. 248 pp.]
5. *Вентцель Е. С.* Теория вероятностей. М.: Высш. шк., 2006. 575 с. [*Wentzell E. S.* Theory of Probability. Moscow: Vyssh. shk., 2006. 575 pp.]

Поступила в редакцию 03/XII/2010;
в окончательном варианте — 05/VI/2011.

MSC: 62P20; 62M20

HIGH VOLATILE MARKETS ANALYSIS WITH USING BERG METHOD AND CHEBYSHEV TYPE II FILTERS, AND STATISTICAL MODELING OF THE RISK OF LOSS FOR ITS TOOLS

A. P. Kotenko, M. B. Bukarenko

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia.

E-mails: ako1959@mail.ru, maxim.bukarenko@gmail.com

We describe the method of technical analysis of highly volatile markets in the framework of signal processing theory, which uses Chebyshev filter. Berg method is used to estimate spectral density of the signal power. The algorithm of optimal AR-model order calculation is given. The method for profit rate estimation based on artificial noise generation, preserving its structure, is developed.

Key words: *linear filter, median filter, Chebyshev filter, spectral estimation, Berg method.*

Original article submitted 03/XII/2010;
revision submitted 05/VI/2011.

Andrey P. Kotenko (Ph. D. (Phys. & Math.)), Associate Professor, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science. *Maxim B. Bukarenko*, Postgraduate Student, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science.