УДК 517.958:536.24

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОЛУЧЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ГРЕТЦА—НУССЕЛЬТА

А. В. Ерёмин, Н. М. Будыльников

Самарский государственный технический университет,
443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mail: a.v.eremin@list.ru

При использовании метода разделения переменных на основе введения дополнительных граничных условий получено приближенное аналитическое решение задачи теплообмена при течении жидкости в круглой трубе (задача Гретца—Нуссельта). Показано, что уже в четвертом приближении в диапазоне безразмерной продольной координаты $0{,}0025 \leqslant x < \infty$ *полученное решение отличается от точного не более чем на* 3 %.

Ключевые слова: задача Гретца—Нуссельта, аналитические методы, ортогональные методы, дополнительные граничные условия.

Введение. Рассмотрим задачу теплообмена при течении жидкости в круглой трубе при постоянной температуре стенки. Примем следующие допущения: течение жидкости и процесс теплообмена стационарны; жидкость несжимаема, её физические свойства постоянны; профиль скорости не изменяется по длине трубы; температура жидкости на входе в трубу неизменна по сечению и равна t_0; температура внутренней поверхности стенки трубы постоянна и равна t_c, причём $t_c \neq t_0$; внутренние источники тепла и диссипация энергии не учитываются; переносом теплоты и теплопроводностью вдоль оси трубы пренебрегаем.

Трудности решения подобной задачи связаны с её нелинейностью. Приближённое аналитическое решение этой задачи впервые было получено Гретцем в 1885 г. и независимо от него Нуссельтом в 1910 г. Уточнение решений Гретца—Нуссельта выполнено Б. С. Петуховым [1]. Отметим, что приведённое в [1] решение представляет бесконечный функциональный ряд, плохо сходящийся при малых значениях продольной координаты.

В зависимости от величины поперечной координаты решение содержит функции Бесселя различного порядка. Такое решение малопригодно для инженерных приложений. В связи с этим разработка приближенных аналитических методов решения подобных задач имеет как научную ценность, так и практическое значение.

Имеющиеся приближенные аналитические решения [2], полученные путем совместного использования интегральных преобразований Лапласа и ортогональных методов (метод Бубнова—Галеркина), не позволяют получать решения при большом числе приближений ($n \leqslant 3$).

1. Постановка задачи. Рассмотрим последовательность получения решения данной задачи на основе использования дополнительных граничных условий [3]. Её математическая постановка имеет следующий вид (см. рис. 1):

$$\frac{\partial^2 t(\xi,\,\eta)}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{\partial t(\xi,\,\eta)}{\partial \xi} = \frac{\omega(\xi)}{a}\frac{\partial t(\xi,\,\eta)}{\partial \eta} \qquad (\eta > 0, \quad -r_0 \leqslant \xi < r_0); \tag{1}$$

$$t(\xi,\,0) = t_0; \tag{2}$$

$$t(0,\,\eta) = t_{\text{ст}}, \quad t(h,\,\eta) = t_{\text{ст}}, \tag{3}$$

Антон Владимирович Ерёмин, аспирант, каф. теоретических основ теплотехники и гидромеханики. *Николай Михайлович Будыльников*, аспирант, каф. теоретических основ теплотехники и гидромеханики.

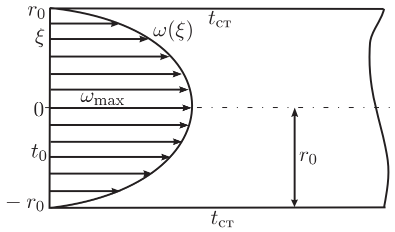

Рис. 1. Схема стабилизированного ламинарного течения жидкости в круглой трубе

где t — температура; η — продольная координата; ξ — поперечная координата; a — коэффициент температуропроводности жидкости; $h = 2r_0$ — диаметр трубы; $t_{ст}$ — температура стенки; r_0 — радиус трубы; $\omega(\xi) = 2\omega_{ср}(1 - \xi^2/r_0^2)$ — профиль скорости ламинарного течения; $\omega_{ср} = 0{,}5\omega_{max}$ — средняя скорость; ω_{max} — максимальная скорость ламинарного течения; t_0 — температура жидкости на входе в трубу.

Введём следующие безразмерные переменные и параметры:

$$\Theta = \frac{t - t_{ст}}{t_0 - t_{ст}}; \quad y = \frac{\xi}{r_0}; \quad x = \frac{2}{\mathtt{Pe}}\frac{\eta}{h}; \quad \mathtt{Pe} = \frac{\omega_{ср} h}{a}, \tag{4}$$

где Θ — относительная избыточная температура; y, x — безразмерные поперечная и продольная координаты; $\mathtt{Pe}$ — число Пекле.

С учётом принятых обозначений, а также ввиду осевой симметрии задача (1)–(3) принимает вид

$$\frac{\partial^2\Theta(y,\, x)}{\partial y^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial\Theta(y,\, x)}{\partial y} = (1 - y^2)\frac{\partial\Theta(y,\, x)}{\partial x} \qquad (x > 0; \quad 0 \leqslant y < 1); \tag{5}$$

$$\Theta(y,\, 0) = 1; \tag{6}$$

$$\frac{\partial\Theta(0,\, x)}{\partial y} = 0; \quad \Theta(1,\, x) = 0. \tag{7}$$

2. Метод решения. Следуя методу разделения переменных, решение задачи (5)–(7) разыскивается в виде произведения двух функций

$$\Theta(y,\, x) = \varphi(x)\Psi(y). \tag{8}$$

Подставляя (8) в (5), получаем следующие два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$d\varphi(x)/dx + \nu\varphi(x) = 0; \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2\Psi(y)}{\partial y^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial\Psi(y)}{\partial y} + \nu(1 - y^2)\Psi(y) = 0, \tag{10}$$

где $\nu = \mu^2$ — некоторая постоянная.

Решение уравнения (9) известно и имеет вид

$$\varphi(x) = A\exp(-\nu\, x), \tag{11}$$

где A — неизвестный коэффициент.

Граничные условия для уравнения Бесселя (10) согласно (7) следующие:

$$\frac{d\Psi(0)}{dy} = 0; \quad \Psi(1) = 0. \tag{12}$$

Решение уравнения (10) с граничными условиями (12) разыскивается в виде

$$\Psi(\nu,\, y) = \sum_{i=1}^{n} b_i N_i(y), \tag{13}$$

где $b_i(\nu)$ — неизвестные коэффициенты; $N_i(y) = \cos(r\pi y/2)$ — координатные функции ($r = 2i - 1$).

Соотношение (13) благодаря принятой системе координатных функций $N_i(y)$ точно удовлетворяет граничным условиям (12). Для определения неизвестных коэффициентов $b_i(\nu)$ введём дополнительные граничные условия [3]. Первое из них, согласно первому граничному условию (12), имеет вид

$$\Psi(0) = \text{const} = 1. \tag{14}$$

Для определения следующего дополнительного граничного условия запишем уравнение (10) применительно к точке $y = 0$. После раскрытия неопределённости по правилу Лопиталя во втором члене этого уравнения, учитывая, что $\Psi(0) = 1$, находим

$$\Psi''(0) + \Psi''(0) + \nu = 0. \tag{15}$$

Отсюда получаем дополнительное граничное условие вида

$$\Psi''(0) = -\nu/2. \tag{16}$$

Для нахождения ещё одного дополнительного граничного условия продифференцируем уравнение (10) по переменной y:

$$\frac{\partial^3\Psi}{\partial y^3} + \frac{1}{y^2}\frac{\partial\Psi}{\partial y} + \frac{1}{y}\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} - 2\nu y\Psi + \nu(1 - y^2)\frac{\partial\Psi}{\partial y} = 0. \tag{17}$$

Записывая соотношение (17) применительно к точке $y = 0$, после раскрытия неопределённостей во втором и третьем слагаемых по правилу Лопиталя с учётом того, что $d\Psi(0)/dy = 0$, получаем

$$\Psi'''(0) + \frac{\Psi'''(0)}{2} + \Psi'''(0) = 0. \tag{18}$$

Отсюда будем иметь дополнительное граничное условие вида

$$\Psi'''(0) = 0. \tag{19}$$

Описанным методом можно получить неограниченное количество дополнительных граничных условий. Последующие из них имеют такой вид:

$$\Psi^{\mathrm{IV}}(0) = 3\nu\frac{\nu + 4}{8}, \tag{20}$$

$$\Psi^{\mathrm{V}}(0) = 0, \tag{21}$$

$$\Psi^{\mathrm{VI}}(0) = 5\nu^2\frac{\nu + 20}{16}, \tag{22}$$

$$\Psi^{\mathrm{VII}}(0) = 0, \tag{23}$$

$$\Psi^{\mathrm{VIII}}(0) = 35\nu^2\frac{\nu^2 + 56\nu + 144}{128}. \tag{24}$$

Анализ дополнительных граничных условий приводит к заключению, что граничные условия при нечётных степенях производной от функции Ψ, имеющие ненулевые правые части, не могут быть выполнены, так как координатные функции $N_i(y)$ при нечётных степенях производных от них равны нулю. В связи с этим такие дополнительные граничные условия (включая и условия (21), (23)) далее рассматриваться не будут.

Подставляя (13) (положив $n = 3$) в дополнительные граничные условия (14), (16), (19), относительно неизвестных b_1, b_2, b_3 получаем следующую систему алгебраических линейных уравнений:

$$\begin{aligned} &b_1 + b_2 + b_3 = 1; \\ &\pi^2(b_1 + 9\,b_2 + 25\,b_3)/2 = \nu; \\ &\pi^4(b_1 + 81\,b_2 + 625\,b_3)/2 = 3\nu(\nu + 4). \end{aligned} \tag{25}$$

После определения неизвестных коэффициентов b_1, b_2, b_3 и подстановки их в (13) имеем

$$\Psi(\nu,\, y) = \frac{6\nu(4+\nu) - \pi^2(68\nu - 225\pi^2)}{192\pi^4}\cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) + \\ + \frac{6\nu(4+\nu) - \pi^2(52\nu - 25\pi^2)}{128\pi^4}\cos\left(\frac{3\pi y}{2}\right) + \\ + \frac{6\nu(4+\nu) - \pi^2(20\nu - 9\pi^2)}{384\pi^4}\cos\left(\frac{5\pi y}{2}\right). \tag{26}$$

Потребуем, чтобы соотношение (26) удовлетворяло не исходному уравнению (10), а некоторому усреднённому уравнению (интегралу теплового баланса). Для этого определим интеграл от уравнения (10) в пределах от $y = 0$ до $y = 1$:

$$\int_0^1 \left[\frac{\partial^2\Psi(\nu, y)}{\partial y^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial\Psi(\nu, y)}{\partial y} + \nu(1 - y^2)\Psi(\nu, y)\right] dy = 0. \tag{27}$$

Подставляя (26) в (27), после вычисления интегралов относительно собственных чисел ν_k получаем следующее алгебраическое уравнение:

$$B_3\nu^3 + B_2\nu^2 + B_1\pi^4\nu - 253125\pi^9 = 0, \tag{28}$$

где $B_1 = 247500\pi^3 - 1243200\pi^2 + 15148680\pi - 30313472$; $B_2 = -33750\pi^5 + 336000\pi^4 - 4790400\pi^3 + 8936960\pi^2 + 1716480\pi - 3182592$; $B_3 = -22800\pi^2 + 429120\pi - 795648$.

Из решения уравнения (28) находим следующие собственные числа: ν_1=7,739283, ν_2 = 45,454368, ν_3 = 79,965740; их точные значения [1] следующие: ν_1 = 7,3135868, ν_2 = 44,609460, ν_3 = 113,920977. После определения собственных чисел собственные функции находятся из (13).

Подставляя (11), (13) в (8), для каждого собственного числа получаем частные решения вида

$$\Theta_k(y,\, x) = A_k \exp(-\nu_k x)\sum_{i=1}^{3} b_i(\nu_k)N_i(y), \quad k = 1,\, 2,\, 3. \tag{29}$$

Каждое частное решение вида (29) точно удовлетворяет граничным условиям (7). Однако ни одно из них, в том числе и их сумма

$$\Theta(y, x) = \sum_{k=1}^{3}\Big[A_k \exp(-\nu_k x)\sum_{i=1}^{3} b_i(\nu_k)N_i(y)\Big], \tag{30}$$

не удовлетворяют условию (6). Для выполнения условия (6) составляется его невязка и требуется ортогональность невязки к каждой собственной функции:

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^{3}\Big[A_k \exp(-\nu_k x)\sum_{i=1}^{3} b_i(\nu_k)N_i(y) - 1\Big]_{=0}\Psi_j(\nu_j,\, y)dy = 0, \quad j = 1,\, 2,\, 3. \tag{31}$$

При вычислении интегралов в (31) для нахождения неизвестных коэффициентов A_1, A_2, A_3 составляется система трёх алгебраических уравнений, имеющая следующее решение: $A_1 = 1{,}328108$, $A_2 = -0{,}768847$, $A_3 = 0{,}544213$.

Найденные по описанной выше методике собственные числа и неизвестные коэффициенты A_k для четырёх приближений такие: $\nu_1 = 7{,}4617$, $\nu_2 = 45{,}3014$, $\nu_3 = 115{,}2655$, $\nu_4 = 216{,}4051$; $A_1 = 1{,}4955$, $A_2 = -0{,}8434$, $A_3 = 0{,}7881$, $A_4 = -0{,}5026$. Точное значение четвёртого собственного числа $\nu_4 = 233{,}4432$ [1].

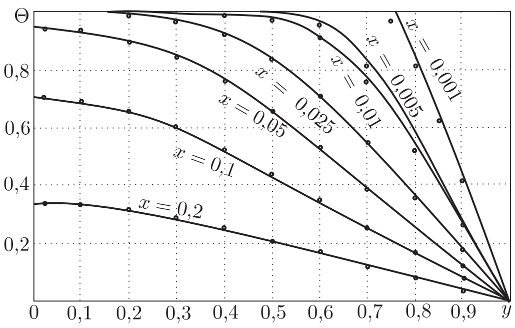

Рис. 2. Распределение температуры при ламинарном течении жидкости в круглой трубе: точки — точное решение [1]; сплошная линия — расчёт по формуле (26) (четвёртое приближение, $l = 4$)

Результаты расчётов безразмерной температуры по формуле (30) в четвёртом приближении в сравнении с точным решением [1] даны на рис. 2.

Их анализ позволяет сделать вывод, что в диапазоне безразмерной продольной координаты $0 \leqslant x \leqslant 0{,}01$ полученные по формуле (30) значения температуры практически совпадают с точными их значениями. При уменьшении величины x расхождение с точным решением возрастает.

Отметим, что получение точного аналитического решения связано с трудностями решения алгебраического уравнения для определения собственных чисел. В связи с этим в настоящей работе точное аналитическое решение было получено лишь для восьми собственных чисел, т.е. лишь в восьмом приближении.

Выводы. На основе совместного применения методов Фурье и интегрального метода теплового баланса при использовании дополнительных граничных условий получено приближённое аналитическое решение задачи Гретца—Нуссельта. Решение имеет простой вид произведения тригонометрических функций с коэффициентами, экспоненциально стабилизирующимися во времени, не содержит специальных функций (в отличие от известных решений). Всё это значительно упрощает практическое использование полученного решения с точностью, во многих случаях достаточной для инженерных приложений.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Петухов Б. С.* Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкостей в трубах. М.: Энергия, 1967. 412 с. [*Petukhov B. S.* Heat Transfer and Resistance in the Laminar Flow of Liquids in Tubes. Moscow: Energiya, 1967. 412 pp.]
2. *Цой П. В.* Методы расчета задач тепломассопереноса. М.: Энергоатомиздат, 1984. 414 с. [*Tsoi P. V.* Methods of Calculating Mass-Transfer Problems. Moscow: Energoatomizdat, 1984. 414 pp.]
3. *Кудинов В. А., Карташов Э. М., Калашников В. В.* Аналитические решения задач тепломассопереноса и термоупругости для многослойных конструкций. М.: Высш. шк., 2005. 430 с. [*Kudinov V. A., Kartashov É. M., Kalashnikov V. V.* Analytical Solutions of the Problems of Heat- and Mass Transfer and Thermal Elasticity for Multilayer Structures. Moscow: Vyssh. shk., 2005. 430 pp.]

Поступила в редакцию 20/IV/2010;
в окончательном варианте — 15/VI/2011.

MSC: 80A17; 80M99

ON ONE METHOD FOR ANALYTICAL SOLUTION OF GRAETZ–NUSSELT PROBLEM

A. V. Eremin, N. M. Budyl'nikov

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia.

E-mail: `a.v.eremin@list.ru`

An approximate analytic solution of heat transfer problem for fluid flow in a circular tube is found using the method of separation of variables, based on the introduction of additional boundary conditions. It is shown that already in the fourth approximation over the range of dimensionless axial coordinate $0{,}0025 \leqslant x < \infty$*, the difference between the exact and the obtained solution does not exceed 3 %.*

Key words: *Graetz–Nusselt problem, analytical methods, orthogonal methods, additional boundary conditions.*

Original article submitted 20/IV/2010;
revision submitted 15/VI/2011.

Anton V. Eremin, Postgraduate Student, Dept. of Theoretical Fundamentals of Heat Engineering and Hydromechanics. *Nikolay M. Budylnikov*, Postgraduate Student, Dept. of Theoretical Fundamentals of Heat Engineering and Hydromechanics.