

УДК 517.977.5

О СХОДИМОСТИ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ
ЛЕОНТЬЕВСКОГО ТИПА

Г. А. Свиридюк, А. В. Келлер

Южно-Уральский государственный университет,
454080, Челябинск, пр. Ленина, 76.

E-mails: ridyu@mail.ru, alevtinak@inbox.ru

Доказывается сходимость численного решения задачи оптимального управления для вырожденной линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Рассматривая различные приложения такого рода систем, их относят к системам леонтьевского типа, так как впервые такие системы были исследованы как динамические балансовые модели с необратимым оператором при производной. Использование начальных условий Шоуолтера—Сидорова позволяет расширить спектр практического применения модели. В работе приведены теорема о существовании и единственности численного решения исследуемой задачи, его вид, а также результаты численного эксперимента для динамической балансовой модели, предложенной В. Леонтьевым.

Ключевые слова: задача Шоуолтера—Сидорова, оптимальное управление, численное решение, сходимость.

Введение. Пусть L и M — квадратные матрицы порядка n . Матрица M L -регулярна, если существует число $\alpha \in \mathbb{C}$ такое, что $\det(\alpha L - M) \neq 0$. Матрица M называется (L, p) -регулярной, где $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, при p , равном нулю, если в точке ∞ L -резольвента $(\mu L - M)^{-1}$ матрицы M имеет устранимую особую точку, а в противном случае — при p , равном порядку полюса в точке ∞ матриц-функции $(\mu L - M)^{-1}$. (Здесь и далее терминологию, понятия и результаты см. в [1]).

Рассмотрим линейную неоднородную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$L\dot{x} = Mx + f, \quad (1)$$

где $f : [0; \tau] \rightarrow \mathbb{R}^n$ — вектор-функция, подлежащая определению в дальнейшем. Если $\det L \neq 0$, то система (1) тривиально редуцируется к одной из систем

$$\dot{y} = ML^{-1}y + f, \quad \dot{x} = L^{-1}Mx + g. \quad (2)$$

В случае $\det L = 0$ в [2] предложено систему (1) называть системой леонтьевского типа, имея в виду её прототип — знаменитую балансовую модель В. Леонтьева с учётом запасов [3].

Вектор-функцию $x \in \mathbb{C}^1([0, \tau], \mathbb{R}^n)$, обращающую (1) в тождество при некоторой вектор-функции $f = f(t)$, назовём решением системы (1). Решение $x = x(t)$ системы (1) назовём:

Георгий Анатольевич Свиридюк (д.ф.-м.н., проф.), зав. кафедрой, каф. уравнений математической физики. Алевтина Викторовна Келлер (к.ф.-м.н., доц.), зав. кафедрой, каф. общеобразовательных дисциплин.

(i) решением задачи Коши, если при некотором $x_0 \in \mathbb{R}^n$

$$x(0) = x_0; \quad (3)$$

(ii) решением задачи Шоултера—Сидорова

$$[R_\alpha^L(M)]^{p+1} (x(0) - x_0) = 0 \quad (4)$$

при некоторых $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : \det(\mu L - M) \neq 0\}$. Здесь $R_\mu^L(M) = (\alpha L - M)^{-1} L$ — правая L -резольвента матрицы M . Заметим, что если $\det L \neq 0$, то задачи (3) и (4) эквивалентны; если же $\det L = 0$, то из существования решения задачи (1), (4) следует существование решения задачи (1), (3); а обратное, вообще говоря, неверно.

В [2, 4] предложен алгоритм численного решения задачи (1), (3), основанный на следующем результате.

ТЕОРЕМА 1. Пусть матрица M — L -регулярная, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ и, кроме того, $\det M \neq 0$. Тогда для любой вектор-функции $f \in {}^{p+1}([0, \tau], \mathbb{R}^n)$ и любого вектора $x_0 \in \mathbb{R}^n$ такого, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\mathbb{I}_n - (k R_k^L(M))^{p+1} \right) x_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} M^{-1} \left((k L_k^L(M))^{p+1} - \mathbb{I}_n \right) f(0), \quad (5)$$

существует единственное решение $x = x(t)$ задачи (1), (3), которое к тому же имеет вид

$$\begin{aligned} x(t) = & \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{q=0}^p \left(M^{-1} \left((k L_k^L(M))^{p+1} - \mathbb{I}_n \right) L \right)^q \times \\ & \times M^{-1} \left(\mathbb{I}_n - (k L_k^L(M))^{p+1} \right) f^q(t) + \\ & + \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\left(L - \frac{t}{k(p+1)} M \right)^{-1} L \right)^{k(p+1)} x_0 + \\ & + \int_0^t \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\left(L - \frac{t-s}{k(p+1)} M \right)^{-1} L \right]^{k(p+1)-1} \times \\ & \times \left(L - \frac{t-s}{k(p+1)} M \right)^{-1} [k L_k^L(M)]^{p+1} f(s) ds. \quad (6) \end{aligned}$$

Здесь $L_\mu^L(M) = L(\alpha L - M)^{-1}$ — левая L -резольвента матрицы M , а $\mathbb{I}_n$ — единичная матрица порядка n .

Прежде всего заметим, что теорема 1 является частным случаем более общих результатов, причём условие $f \in {}^{p+1}([0, \tau], \mathbb{R}^n)$ можно ослабить (см. [1, гл. 2, 4 и 5]). Условие $\det M \neq 0$ не снижает общности, так как в системе (1) после замены $x(t) = e^{\lambda t} y(t)$ можно получить такую матрицу $M' = M - \lambda L$, что $\det M' \neq 0$. Далее алгоритм приближённого вычисления решения $x \sim x_k$ [2, 4] заключается в замене x на k -тый член последовательности, по которой берётся предел в (6). Отметим, что скорость сходимости $x_k \rightarrow x$ не очень высока, порядка k^{-1} . Заметим ещё, что данный алгоритм является обобщением предложенного ранее алгоритма решения систем вида (2) [5–7].

Наибольшую трудность в численных расчётах вызывает проверка условия (5), поэтому в приложениях [8, 9] пришлось ограничиться случаями $n = 3$ (пример Леонтьева) и $n = 5$ (модель экономики коммунального хозяйства г. Еманжелинска Челябинской области). Чтобы купировать эту трудность, предлагается вместо условия (3) воспользоваться условием (4). Тем более, что очень просто (хотя и в более общей ситуации [10, гл. 2]) доказывается следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для любых вектор-функций $f \in {}^{p+1}([0, \tau], \mathbb{R}^n)$ и вектора $x_0 \in \mathbb{R}^n$ существует единственное решение задачи (1), (4), которое к тому же имеет вид (6).

Алгоритм численного решения задачи (1), (4) предложен в [11].

В [12] впервые поставлена и изучена следующая задача оптимального управления для уравнения (1) с условием (3). Пусть $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ — гильбертовы пространства. Введём в рассмотрение пространства

$$\begin{aligned} H^1(\mathfrak{X}) &= \{x \in L_2((0, \tau), \mathfrak{X}) : \dot{x} \in L_2((0, \tau), \mathfrak{X})\}, \\ H^{p+1}(\mathfrak{Y}) &= \{y \in L_2((0, \tau), \mathfrak{Y}) : y^{(p+1)} \in L_2((0, \tau), \mathfrak{Y})\}, \quad p \in \{0\} \cup \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Пусть теперь операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ (т.е. линейны и непрерывны), причём оператор M (L, p) -ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Вектор-функцию $x \in H^1(\mathfrak{X})$ назовём сильным решением задачи (1), (3), если она удовлетворяет уравнению (1) (п.в. на $(0, \tau)$) и условию (3) при некоторой вектор-функции $f \in H^{p+1}(\mathfrak{Y})$. (Поскольку вложение $H^1(\mathfrak{X}) \hookrightarrow C([0, \tau], \mathfrak{X})$ непрерывно, то такое определение корректно). Далее пусть $\mathcal{U}$ — гильбертово пространство и оператор $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$. Построим пространство управлений

$$\begin{aligned} \mathring{H}^{p+1}(\mathcal{U}) &= \{u \in L_2((0, \tau), \mathcal{U}) : u^{(p+1)} \in L_2((0, \tau), \mathcal{U}), \\ &\quad u^{(q)}(0) = 0, \quad q = 0, 1, \dots, p\}, \quad p \in \{0\} \cup \mathbb{N} \end{aligned}$$

и выделим в нём замкнутое и выпуклое множество $\mathring{H}_\partial^{p+1}(\mathcal{U})$ — множество допустимых управлений. Зададим ещё $\mathfrak{N}$ — гильбертово пространство наблюдений и оператор $C \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{N})$, который задаёт наблюдение $z(t) = Cx(t)$. Заметим, что если $x \in H^1(\mathfrak{X})$, то $z \in H^1(\mathfrak{N})$. Наконец, зададим самосопряжённые и положительно определённые операторы $N_q \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$, $q = 0, 1, \dots, p+1$ и построим функционал качества

$$J(u) = \sum_{q=0}^1 \int_0^\tau \|z^{(q)}(t) - z_0^{(q)}\|_{\mathfrak{N}}^2 dt + \sum_{q=0}^{p+1} \int_0^\tau \langle N_q u^{(q)}(t), u^{(q)}(t) \rangle_{\mathcal{U}} dt.$$

В [12] (см. также [1, гл. 7]) доказано существование единственной пары (x, v) такой, что

$$J(v) = \min_{u \in \mathring{H}_\partial^{p+1}} J(u), \quad v \in \mathring{H}_\partial^{p+1}, \quad (7)$$

а x — сильное решение задачи (3) для уравнения

$$L\dot{x} = Mx + y + Bu \quad (8)$$

при заданных $y \in H^{p+1}(\mathcal{Y})$ и $x_0 \in \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M}$ — специально построенное (по операторам L и M и вектор-функциям y и u) множество допустимых начальных значений. В [13] данные результаты распространены на случай (L, p) -секториального оператора M (терминологию см. в [1, гл. 3]).

В [9] предложен следующий метод численного решения задачи (3), (7) для уравнения (8) в случае, когда пространства $\mathfrak{X} = \mathcal{Y} = \mathbb{N}^n$, а операторы L , M , B и C отождествлены с квадратными матрицами порядка n , причём по экономическим соображениям $\det L = 0$. В этом методе пространство управлений $\dot{H}^{p+1}(\mathcal{U})$ заменяется на конечномерное пространство $\dot{H}_l^{p+1}$ вектор-многочленов вида

$$u^l(t) = \text{col} \left(\sum_{k=p+1}^l a_1^k t^k, \sum_{k=p+1}^l a_2^k t^k, \dots, \sum_{k=p+1}^l a_n^k t^k \right).$$

Подставив $u^l = u^l(t)$ вместо u в (8), найдём точное решение $x^l = x(t, u^l)$ задачи (3), (8) согласно теореме 1. Подставив найденное решение $x^l = x(t, u^l)$ в функционал $J(v)$, найдём

$$J(v^l) = \min_{u^l \in \dot{H}_\partial^{p+1}(\mathcal{U}) \cap \dot{H}_l^{p+1}} J(u^l), \quad v^l \in \dot{H}_\partial^{p+1}(\mathcal{U}) \cap \dot{H}_l^{p+1}.$$

Очевидно, (x^l, v^l) — решение задачи (3) для уравнения (8) при $v = v^l$. Нетрудно показать, что $(x^l, v^l) \rightarrow (x, v)$ при $l \rightarrow \infty$, где (x, v) — точное решение задачи (3), (7), (8).

Целью работы является доказательство сходимости $(x_k^l, v_k^l) \rightarrow (x, v)$ при $k, l \rightarrow \infty$, где $x_k^l = x_k^l(t, v_k^l)$ — приближённое решение задачи (3), (7) для уравнения (8). Предложенный алгоритм численного решения реализован на примере Леонтьева [3, гл. 1] (см. также [2, 4]). Настоящая статья кроме вводной части содержит список литературы и два пункта; в первом приведена теорема о сходимости, а во втором рассмотрен пример Леонтьева. Список литературы отражает лишь вкусы и пристрастия авторов и не претендует на полноту.

1. Теорема о сходимости. Итак, пусть L и M — квадратные матрицы порядка n , причём матрица M (L, p) -регулярна, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ и $\det M \neq 0$. Пусть $\mathcal{U}^n$ — гильбертово пространство, являющееся прямой суммой $\mathcal{U}^n = \bigoplus_{m=1}^n \mathcal{U}^m$ гильбертовых пространств. Введём в рассмотрение функциональные пространства

$$H^{p+1}(\mathfrak{Y}) = \{y \in L_2((0, \tau), \mathfrak{Y}) : y^{p+1} \in L_2((0, \tau), \mathfrak{Y})\}, \quad p \in \{0\} \cup \mathbb{N},$$

где в дальнейшем либо $\mathfrak{Y} = \mathbb{R}^n$, либо $\mathfrak{Y} = \mathcal{U}^n$, поэтому $H^{p+1}(\mathfrak{Y})$ в любом случае будет гильбертовым пространством. Пусть N_q — симметричные положительно определенные матрицы, $q = 0, 1, \dots, p+1$. Скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в $H^{p+1}(\mathcal{U}^n)$ зададим следующим образом:

$$\langle u, v \rangle = \sum_{q=0}^{p+1} \int_0^\tau \left\langle N_q u^{(q)}(t), v^{(q)}(t) \right\rangle_m dt,$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle_m$ — скалярное произведение в $\mathcal{U}^m$. Построим функционал

$$J(u) = \left\| z^{(q)}(t) - z_0^{(q)} \right\|^2 + \langle u, u \rangle,$$

где $z = Cx$ — наблюдение (C — квадратная матрица порядка n , v — управление из $\dot{H}_{\partial}^{p+1}(\mathcal{U}^n)$ — замкнутого и выпуклого множества допустимых управлений, $\|\cdot\|$ — норма в ${}^1(\mathbb{R}^n)$. Пусть B — квадратная матрица порядка n . Справедлива

ТЕОРЕМА 3. Пусть матрица $M = (L, p)$ -регулярна, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ и $\det M \neq 0$. Тогда для любых $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $y \in {}^{p+1}(\mathbb{R}^n)$ существует единственная пара (x, v) , где x — сильное решение задачи Шоуолтера—Сидорова (4) для уравнения (8), а $v \in H_{\partial}^{p+1}(\mathcal{U}^n)$ — точка минимума функционала J . Причём между x и y имеет место следующее соотношение:

$$x(t) = (A_1 + A_2)(y + Bu)(t) + X^t x_0,$$

где A_1 и A_2 — операторы, определяемые первым и третьим слагаемыми соответственно в формуле (6), X^t , $t \in \mathbb{R}_+$ — разрешающая группа операторов, порождаемая матрицами L и M (второе слагаемое в формуле (6)), $f(t) = y(t) + Bu(t)$, $t \in [0, \tau]$.

Доказательство. Идея доказательства теоремы 3 заключается в следующем. Подставим в функционал вектор-функцию

$$x(t) = (A_1 + A_2)(y + Bu)(t) + X^t x_0. \quad (9)$$

Пользуясь замкнутостью и выпуклостью множества $H_{\partial}^{p+1}(\mathcal{U}^n)$, получим существование единственного $v \in H_{\partial}^{p+1}(\mathcal{U}^n)$ такого, что

$$J(v) = \min_{u \in \dot{H}_{\partial}^{p+1}(\mathcal{U}^n)} J(u).$$

Подставив теперь в J вектор-функцию

$$x_k(t) = (A_{1k} + A_{2k})(y + Bu)(t) + X_k^t x_0, \quad (10)$$

где A_{1k} , A_{2k} и X_k^t — соответствующие члены последовательности, предел которой ищется в (6), аналогично предыдущему получим существование единственного $u_k \in H_{\partial}^{p+1}(\mathcal{U}^n)$ такого, что

$$J(v_k) = \min_{u \in \dot{H}_{\partial}^{p+1}(\mathcal{U}^n)} J(u).$$

Очевидно, что $v_k \rightarrow v$ при $k \rightarrow \infty$. Итак, теорема доказана. $\square$

ЛЕММА 1. Пусть матрица $M = (L, p)$ -регулярна, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ и $\det M \neq 0$. Тогда $(x_k, v_k) \rightarrow (x, v)$ при $k \rightarrow \infty$ для любых $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $y \in {}^{p+1}(\mathbb{R}^n)$.

Пусть $\{\mathcal{U}_l^n\}_{l=1}^\infty$ — последовательность конечномерных подпространств пространства $\mathcal{U}^n$ такая, что $\mathcal{U}_l^n \supset \mathcal{U}_k^n$ при $l \geq k$, $\mathcal{U}_l^n \cap H_{\partial}^{p+1}(\mathcal{U}^n) \neq \emptyset$ при всех $l \in \mathbb{N}$ и $\bigcup_{l=1}^\infty \mathcal{U}_l^n$ плотно в $H^{p+1}(\mathcal{U}^n)$. (Как показано во введении, такая последовательность существует в интересующем нас случае). Опять подставим (10) в функционал J , и поскольку множество $H_{\partial}^{p+1}(\mathcal{U}^n) \cap H^{p+1}(\mathcal{U}_l^n) \left(\equiv H_{\partial}^{p+1}(\mathcal{U}_l^n) \right)$ замкнуто и выпукло, то существует единственный $v_k^l \in H_{\partial}^{p+1}(\mathcal{U}_l^n)$ такой, что

$$J(v_k^l) = \min_{u \in H_{\partial}^{p+1}(\mathcal{U}_l^n)} J(u),$$

$J(v_k^l) \geq J(v_k^j)$ при $j \geq l$. Значит при каждом $k \in \mathbb{N}$ $(x_k^l, v_k^l) \rightarrow (x_k, v_k)$ при $l \rightarrow \infty$.

Таким образом, имеют место следующие лемма и теорема.

ЛЕММА 2. В условиях леммы 1 $(x_k^l, v_k^l) \rightarrow (x_k, v_k)$ при $l \rightarrow \infty$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть матрица $M = (L, p)$ -регулярна, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ и $\det M \neq 0$. Тогда для любых $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $y \in {}^{p+1}(\mathbb{R}^n)$, $(x_k^l, v_k^l) \rightarrow (x, v)$ при $k, l \rightarrow \infty$.

2. Пример Леонтьева. Возьмём

$$L = \begin{pmatrix} 0,35 & 0,05 & 1,05 \\ 0,01 & 0,5015 & 0,32 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} -0,75 & -0,2 & -0,55 \\ -0,28 & 0,8589687 & -0,5904998 \\ -0,2666667 & -0,4 & 0,8666667 \end{pmatrix}.$$

Если переобозначить $L = B$ и $M = I - A$, то матрицы B и A «почти» совпадают с матрицами из классического примера [3]. «Почти» означает, что для реализации численного эксперимента в C++ элементы матриц записаны в виде десятичных, а не обыкновенных дробей, с точностью 10^{-6} .

В. В. Леонтьев рассматривал взаимосвязи между тремя отраслями экономики — сельским хозяйством, промышленностью и домашними хозяйствами. Элемент a_{ij} матрицы A означает количество продукции i -той отрасли, необходимой для производства единицы продукции j -той отрасли. Элемент матрицы b_{ij} матрицы B представляет определенный технологический запас особого типа благ — машин, механических инструментов, промышленных зданий и сооружений, рабочих запасов первичных и промежуточных материалов, производимых отраслью, который используется в отрасли j для производства единицы её продукции. Другими словами, каждый столбец матрицы B описывает потребность некоторой отрасли в физическом капитале (в расчёте на единицу её валового выпуска) таким же образом, как соответствующий столбец матрицы A описывает её затраты. Именно поэтому последняя строка матрицы B содержит только нулевые элементы, так как труд невозможно запастись.

Приведем результаты численного решения задачи оптимального управления (ЗОУ) для примера Леонтьева без комментариев, взяв при этом в качестве $f = (2t, 2t, 2t)$ и начального значения — $x_0 = (18, 50, 32)$.

Здесь используется алгоритм, описанный в [11]. Временной промежуток составляет один год и разбит по месяцам, однако за условную единицу может

быть взят любой (соответствующий экономическому смыслу) период и разбит на произвольное число частей. В качестве плановых наблюдений примем $x_0(t) = (18 + t, 50 + t, 32 + t)$.

Численное решение задачи (1), (4), т.е. задачи Шоултера—Сидорова, имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{x}_k(f, t) = & \sum_{q=0}^p \left(M^{-1} \left((kL_k^L(M))^{p+1} - \mathbb{I}_n \right) L \right)^q \times \\ & \times M^{-1} \left(\mathbb{I}_n - (kL_k^L(M))^{p+1} \right) f^q(t) + \\ & + \left(\left(L - \frac{t}{k(p+1)} M \right)^{-1} L \right)^{k(p+1)} x_0 + \\ & + \int_0^t \left[\left(L - \frac{t-s}{k(p+1)} M \right)^{-1} L \right]^{k(p+1)-1} \times \\ & \times \left(L - \frac{t-s}{k(p+1)} M \right)^{-1} [kL_k^L(M)]^{p+1} f(s) ds \quad (11) \end{aligned}$$

при $k > K$, где K — номер, начиная с которого можно считать приближённые проекторы, определяемый по формуле $K = \max \{k_1; k_2\}$, где $t \in [0, 1]$,

$$k_1 > \frac{1}{|a_q|} \sum_{l=0}^q |a_l| + 1, \quad k_2 > \frac{1}{|a_q| p^p} \sum_{l=0}^q |a_l| (p+1)^{n-l} + 1, \quad |t| < 1.$$

При таких значениях k мы не сможем оказаться даже вблизи точки L -спектра оператора M .

Результаты численного решения задачи Шоултера—Сидорова (без оптимизации) для примера Леонтьева представлены в табл. 1. Решения x_1 , убывая, со второго месяца становятся отрицательными, а решения x_2 , наоборот,

Таблица 1

Сравнение численных решений $\tilde{x}_k(t)$ задачи Шоултера—Сидорова (Ш-С) и задачи оптимального управления (ОУ)

t	Решение задачи Ш-С			Решение задачи ОУ		
	$\tilde{x}_1(f, t)$	$\tilde{x}_2(f, t)$	$\tilde{x}_3(f, t)$	$\tilde{x}_1(\tilde{v}_k^t, t)$	$\tilde{x}_2(\tilde{v}_k^t, t)$	$\tilde{x}_3(\tilde{v}_k^t, t)$
0	18,0	50,0	32,0	18,0	50,0	32,0
1/12	11,2168	56,1634	29,1806	6,24456	60,73123	28,65891
1/6	6,11157	61,0596	29,6772	7,504523	62,01312	29,57361
1/4	-0,7464	67,1678	30,1939	9,578925	62,76643	30,56349
1/3	-9,9671	74,8798	30,7239	12,47673	62,97620	31,61249
5/12	-22,3904	84,7344	31,2573	16,17948	62,64696	32,69980
1/2	-39,1817	97,4787	31,7804	20,60162	61,82921	33,79858
7/12	-61,9713	114,157	32,2737	25,50935	60,67328	34,87395
2/3	-93,0603	136,243	32,7091	30,37331	59,52616	35,87988
3/4	-135,726	165,835	33,0466	34,11866	59,09507	36,75443
5/6	-194,685	205,952	33,2282	34,71714	60,71333	37,41281
11/12	-276,788	260,976	33,1691	28,53566	66,76328	37,73698
1	-392,105	337,350	32,7444	28,30751	71,34233	37,56016

значительно возрастают, что свидетельствует об экономическом разрушении первой отрасли и неустойчивости всей системы в целом. Неустойчивость экономических систем является известным свойством. Изучению параметров, обеспечивающих устойчивость такого рода систем, посвящено большое количество исследований.

Численным решением задачи (4), (7), (8) является пара $(\tilde{v}_k^l, \tilde{x}_k(f + B\tilde{v}_k^l))$, где $\tilde{v}_k^l$ — точка минимума функционала

$$J_k(u^l) = \sum_{q=0}^1 \int_0^\tau \left\| C(x_k(f + Bu^l))^{(q)}(t) - Cx_0^{(q)}(t) \right\|_{\mathfrak{H}}^2 dt + \\ + \sum_{q=0}^{p+1} \int_0^\tau \left\langle N_q(u^l)^{(q)}(t), (u^l)^{(q)}(t) \right\rangle_{\mathcal{U}} dt,$$

а $\tilde{x}_k(f + B\tilde{v}_k^l)$ определяется по формуле

$$\tilde{x}_k((f + \tilde{v}_k^l), t) = \sum_{q=0}^p (M^{-1}(Q_k - \mathbb{I}_n)L)^q M^{-1}(\mathbb{I}_n - Q_k)(f + B\tilde{v}_k^l)^{(q)}(t) + \\ + \left(\left(L - \frac{t}{k(p+1)}M \right)^{-1} L \right)^{k(p+1)} x_0 + \\ + \int_0^t \left[\left(L - \frac{t-s}{k(p+1)}M \right)^{-1} L \right]^{k(p+1)-1} \times \\ \times \left(L - \frac{t-s}{k(p+1)}M \right)^{-1} Q_k(f + B\tilde{v}_k^l)(s) ds, \quad (12)$$

здесь $Q_k = [kL_k^L(M)]^{p+1}$.

Результаты численного решения оптимального управления $\tilde{x}_k(f + B\tilde{v}_k^l, t)$ для примера Леонтьева представлены в табл. 1. Сравнивая численные решения двух задач, приходим к выводу о том, что решение задачи оптимального

Таблица 2

Решение $\tilde{v}_k^l$ задачи оптимального управления			
t	v_1	v_2	v_3
0	1,125122	-0,9843903	0,9980469
1/12	1,396327043	-1,006002988	0,859570538
1/6	1,633233973	-0,996670176	0,655155876
1/4	1,809867789	-0,936120074	0,391316439
1/3	1,892873677	-0,798977234	0,078212843
5/12	1,840318078	-0,553292295	-0,27001597
1/2	1,6016845	-0,160385159	-0,635253881
7/12	1,120511677	0,422476088	-0,996152851
2/3	0,341590526	1,234569329	-1,330180504
3/4	-0,774894785	2,296925607	-1,617674803
5/6	-2,229427492	3,587320459	-1,848757072
11/12	-3,946097591	5,001651649	-2,03410117
1	-5,718628	6,2978367	-2,2207031

управления $\tilde{x}_1(f + B\tilde{v}_k^l, t)$, в отличие от решения задачи Шоуолтера—Сидорова, не приводит к экономическому разрушению отрасли 1 и все решения $\tilde{x}_k(f + B\tilde{v}_k^l, t)$ более близки к плановым показателям. В табл. 1 для краткости вместо $\tilde{x}_k(f + B\tilde{v}_k^l, t)$ записано $\tilde{x}_k(\tilde{v}_k^l, t)$.

В табл. 2 представлены результаты численного решения $\tilde{v}_k^l$. Положительные значения управления свидетельствуют о необходимости дотаций в соответствующую отрасль, а отрицательные — о возможности изъятия излишек. Иначе говоря, при отрицательном значении управления некоторой отраслью последняя становится донором для остальных. При таком управлении наименьшее значение функционала качества составит $J_k(\tilde{v}_k^l) = 5636,09$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Sviridyuk G. A., Fedorov V. E.* Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators / Inverse and Ill-posed Problems Series. Utrecht – Boston – Koln – Tokyo: VSP, 2003. 216 pp.
2. Свиридюк Г. А., Брычев С. В. Численное решение систем уравнений леонтьевского типа // *Изв. вузов. Матем.*, 2003. № 8. С. 46–52; англ. пер. *Sviridyuk G. A., Brychev C. V.* Numerical solution of systems of equations of Leont'ev type // *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2003. Vol. 47, no. 8. Pp. 44–50.
3. Леонтьев В. В. Межотраслевая экономика. М.: Экономика, 1997. 315 с.; англ. пер.: *Leontief W. W.* Input-Output Economics. New York: Oxford University Press, 1986. 436 pp.
4. Свиридюк Г. А., Бурлачко И. В. Алгоритм решения задачи Коши для вырожденных линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2003. Т. 43, № 11. С. 1677–1683; англ. пер.: *Burlachko I. V., Sviridyuk G. A.* An algorithm for solving the Cauchy problem for degenerate linear systems of ordinary differential equations // *Comput. Math. Math. Phys.*, 2003. Vol. 43, no. 11. Pp. 1613–1619.
5. Павлов Б. В., Повзнер А. Я. Об одном методе численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1973. Т. 13, № 4. С. 1056–1059; англ. пер.: *Pavlov B. V., Povzner A. Ja.* A certain method for the numerical integration of systems of ordinary differential equations // *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, 1973. Vol. 13, no. 4. Pp. 292–297.
6. Павлов Б. В., Родионова О. Е. Метод локальной линеаризации при численном решении жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1987. Т. 27, № 5. С. 688–699; англ. пер.: *Pavlov B. V., Rodionova O. E.* Method of local linearization for the numerical solution of stiff systems of ordinary differential equations // *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, 1987. Vol. 27, no. 3. Pp. 30–38.
7. Павлов Б. В., Родионова О. Е. Численное решение систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1994. Т. 34, № 4. С. 622–627; англ. пер.: *Pavlov B. V., Rodionova O. E.* The numerical solution of systems of linear ordinary differential equations with constant coefficients // *Comput. Math. Math. Phys.*, 1994. Vol. 34, no. 4. Pp. 535–539.
8. Брычев С. В. Исследование математической модели экономики коммунального хозяйства малых городов: Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.18: защищена 12.02.02: утв. 24.06.02. Челябинск, 2002. 124 с. [*Brychev S. V.* Investigation of a mathematical model of the economics communal services of small towns: Candidate of physico-mathematical sciences thesis. Chelyabinsk, 2002. 124 pp.]
9. Бурлачко И. В. Исследование оптимального управления системами леонтьевского типа: Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.18: защищена 12.02.02: утв. 24.06.02. Челябинск,

2005. 123 с. [Burlachko I. V. Investigation of optimal control of Leontief type systems: Candidate of physico-mathematical sciences thesis. Chelyabinsk, 2005. 123 pp.]
10. Свиридюк Г. А., Федоров В. Е. Линейные уравнения соболевского типа. Челябинск: Челябин. гос. ун-т, 2003. 179 с. [Sviridyuk G. A., Fedorov V. E. Linear equations of Sobolev type. Chelyabinsk: Chelyab. Gos. Un-t, 2003. 179 pp.]
11. Келлер А. В. Алгоритм численного решения задачи Шоуолтера—Сидорова для систем леонтьевского типа / В сб.: *Методы оптимизации и их приложения: Труды XIV Байкальской школы-семинара*. Иркутск – Северобайкальск, 2008. С. 343–350. [Keller A. V. Algorithm of numerical solution Showalter–Sidorov problem for Leontief type systems / In: *Optimization methods and their applications*. Irkutsk – Severobaykalsk, 2008. Pp. 343–350].
12. Свиридюк Г. А., Ефремов А. А. Задача оптимального управления для одного класса линейных уравнений типа Соболева // *Изв. вузов. Матем.*, 1996. № 12. С. 75–83; англ. пер.: Sviridyuk G. A., Efremov A. A. Optimal control problem for a class of linear equations of Sobolev type. // *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 1996. Vol. 40, no. 12. Pp. 60–71.
13. Свиридюк Г. А., Ефремов А. А. Оптимальное управление линейными уравнениями типа Соболева с относительно p -секториальными операторами // *Дифференц. уравн.*, 1995. Т. 31, № 11. С. 1912–1919; англ. пер.: Sviridyuk G. A., Efremov A. A. Optimal control of Sobolev-type linear equations with relatively p -spectorial operators // *Differ. Equations*, 1995. Vol. 31, no. 11. Pp. 1882–1890.

Поступила в редакцию 26/II/2011;
в окончательном варианте — 05/V/2011.

MSC: 49J27; 93C25, 34A30

ON THE NUMERICAL SOLUTION CONVERGENCE OF OPTIMAL CONTROL PROBLEMS FOR LEONTIEF TYPE SYSTEM

G. A. Sviridyuk, A. V. Keller

Souht Ural State University,
76, pr. Lenina, Chelyabinsk, 454080, Russia.

E-mails: ridyu@mail.ru, alevtinak@inbox.ru

This article contains proving the convergence of numerical solving of optimal control problem for degenerate linear systems of ordinary differential equations with constant coefficients. Considering different appendixes of such systems, they belong to Leontief type system, as in the first time such systems were investigated as a dynamic Leontief input-output model with noninvertible operator on derivative. By using the initial condition of Showalter–Sidorov we gain an ability to extend the range of practical applicability for this model. The article includes existence and uniqueness theorem of numerical solution of investigated problem, his kind, and results of numerical experiment for dynamic input-output model, which was offered by W. Leontief.

Key words: Showalter–Sidorov problem, optimal control, numerical solution, convergence.

Original article submitted 26/II/2011;
revision submitted 05/V/2011.

Georgiy A. Sviridyuk (Dr. Sci. (Phys. & Math.)), Head of Dept., Dept. of Mathematical Physics Equations. *Alevtina V. Keller* (Ph. D. (Phys. & Math.)), Head of Dept., Dept. of General Educational Subjects.