УДК 517.956.37

О РАЗРЕШИМОСТИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЯ

Н. В. Бейлина

Самарский государственный технический университет,
443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mails: natalie@samdiff.ru

Изучается разрешимость обратной задачи для гиперболического уравнения на плоскости с неизвестной правой частью. Доказывается однозначная разрешимость поставленной задачи. Доказательство существования обобщённого решения базируется на методе Галёркина, единственности — на полученной априорной оценке.

Ключевые слова: *обратная задача, интегральное условие, разрешимость.*

Введение. К настоящему времени появилось значительное количество работ, посвященных исследованию обратных задач с интегральным условием переопределения. Однако в подавляющем большинстве изучены задачи для параболических уравнений [1–7]. Более подробная библиография и классификация задач приведена в работах [5, 7].

В предлагаемой работе рассмотрена обратная задача нахождения неизвестной функции, входящей в правую часть гиперболического уравнения, с интегральным условием переопределения.

1. Постановка задачи. В прямоугольнике $Q_T = \{(x,t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$ рассмотрим следующую обратную задачу: найти пару функций $(u(x,\, t), p(t))$, удовлетворяющих уравнению

$$u_{tt}(x,\, t) - u_{xx}(x,\, t) + c(x,\, t)u(x,\, t) = p(t)f(x,\, t) + G(x,\, t,\, u(x,\, t)), \tag{1}$$

начальным условиям

$$u(x,\, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x,\, 0) = \psi(x), \tag{2}$$

граничным условиям

$$u_x(0,\, t) = u_x(l,\, t) = 0 \tag{3}$$

и интегральному условию переопределения

$$\int_0^l K(x,\, t)u(x,\, t)dx = 0. \tag{4}$$

Функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ заданы на отрезке $[0; l]$, а $f(x,\, t)$, $K(x,\, t)$, $G(x,\, t,\, u)$, $c(x,\, t)$ — в области $\bar{Q}_T$.

Введём понятие обобщённого решения задачи (1)–(4). Заметим, что условие (4) эквивалентно следующему условию:

Бейлина Наталья Викторовна (к.ф.-м.н.), старший преподаватель, каф. высшей математики и прикладной информатики.

$$p(t) = \left(\int_0^l K(x,\,t)f(x,\,t)dx\right)^{-1}\left[\int_0^l \big[K(x,\,t)c(x,\,t) - K_{tt}(x,\,t)\big]u(x,t)\,dx + \right.$$
$$+\int_0^l K_x(x,\,t)u_x(x,\,t)dx - 2\int_0^l K_t(x,\,t)u_t(x,\,t)dx -$$
$$\left. - \int_0^l K(x,\,t)G(x,\,t,\,u(x,\,t))dx\right]. \quad (5)$$

Действительно, дифференцируя (4) дважды по t и учитывая, что $u(x,\,t)$ удовлетворяет уравнению (1) и условию (3), получим (5). Обратное показывается прямым вычислением.

Обозначим

$$\hat{W}_2^1(Q_T) = \{v(x,\,t) : v(x,\,t) \in W_2^1(Q_T),\ v(x,\,T) = 0\}.$$

Умножим уравнение (1) на функцию $v(x,\,t) \in \hat{W}_2^1(Q_T)$ и проинтегрируем по прямоугольнику Q_T. После интегрирования по частям получим

$$\int_0^T\int_0^l \left[-u_t(x,t)v_t(x,t) + u_x(x,t)v_x(x,t) + c(x,t)u(x,t)v(x,t)\right] dxdt =$$
$$= \int_0^T\int_0^l p(t)f(x,t)v(x,t)\,dxdt + \int_0^T\int_0^l G(x,t,u(x,t))v(x,t)\,dxdt +$$
$$+ \int_0^l \psi(x)v(x,0)\,dx. \quad (6)$$

Определение. Пару функций $(u(x,\,t),\,p(t))$ будем называть обобщённым решением задачи (1)–(4), если $u(x,\,t) \in W_2^1(Q_T)$, $u(x,\,0) = \varphi(x)$, $p(t) \in L_2(0,\,T)$, и $(u(x,\,t),\,p(t))$ удовлетворяет (5) (в смысле равенства функций в L_2) и тождеству (6) для любой функции $v(x,t) \in \hat{W}_2^1(Q_T)$.

2. Разрешимость поставленной задачи.

Теорема. *Если* $K(x,\,t) \in C^1(\bar{Q}_T)$, $K_{tt}(x,\,t) \in C^1(\bar{Q}_T)$, $c(x,\,t) \in C^1(\bar{Q}_T)$, $f(x,\,t) \in C(\bar{Q}_T)$, $\varphi(x) \in W_2^1(0,\,l)$, $\psi(x) \in L_2(0,\,l)$, $G(x,\,t,\,u) \in C(Q_T \times \mathbb{R}^1)$, $\displaystyle\int_0^l K(x,\,t)f(x,\,t)dx \neq 0$ *и для любых* $(x,\,t)$ *выполняется условие Липшица* $|G(x,\,t,\,u_1) - G(x,\,t,\,u_2)| \leqslant L|u_1 - u_2|$, *то существует единственное обобщённое решение* (1)–(4).

Доказательство. Из условий теоремы следует, что найдутся такие положительные константы c_0, c_1, c_2, f_1, g_1, h_0, a_1, a_2, что выполняются следующие неравенства:

$$\max|G(x,\,t,\,0)| \leqslant g_1, \quad |f(x,\,t)| \leqslant f_1, \quad \max|K(x,\,t)c(x,\,t) - K_{tt}(x,\,t)| \leqslant a_1,$$

$$\max|K(x,\,t); K_t(x,\,t); K_x(x,\,t)| \leqslant a_2, \quad c_0 \leqslant |c(x,\,t)| \leqslant c_1, \quad |c_t(x,\,t)| \leqslant c_2,$$

$$\int_0^l K(x,\,t)f(x,\,t)dx = h_0 > 0.$$

Для доказательства теоремы построим последовательность приближённых решений, а затем покажем, что эта последовательность сходится к обобщённому решению поставленной задачи.

Приближённые решения $(u^m(x,\,t),\,p^m(t))$ будем искать из следующих соотношений:

$$\int_0^T\int_0^l[-u^m_t(x,\,t)v_t(x,\,t)+u^m_x(x,\,t)v_x(x,\,t)+c(x,\,t)u^m(x,\,t)v(x,\,t)]\,dxdt=$$
$$=\int_0^T\int_0^l p^m(t)f(x,\,t)v(x,\,t)dxdt+\int_0^T\int_0^l G(x,\,t,\,u^m(x,\,t))v(x,\,t)dxdt+$$
$$+\int_0^l\psi(x)v(x,\,0)dx. \quad (7)$$

$$u^0(x,\,t)=0,\quad u^m(x,\,0)=\varphi_m,\quad m=1,\,2,\ldots, \quad (8)$$

где $\varphi_m\xrightarrow{L_2}\varphi(x)$,

$$p^m(t)=\left(\int_0^l K(x,\,t)f(x,\,t)dx\right)^{-1}\left[\int_0^l\big[K(x,\,t)c(x,\,t)-K_{tt}(x,\,t)\big]\times\right.$$
$$\times\,u^{m-1}(x,t)dx+\int_0^l K_x(x,\,t)u^{m-1}_x(x,\,t)dx-2\int_0^l K_t(x,\,t)u^{m-1}_t(x,\,t)dx-$$
$$\left.-\int_0^l K(x,\,t)G(x,\,t,\,u^{m-1})dx\right]. \quad (9)$$

Покажем, что для каждого m существует единственная функция $u^m(x,t)$, удовлетворяющая тождеству (7) и условию (8), если $p^m(t)$ известно. Для этого заметим, что тождество (7) и равенство (8) определяют обобщённое решение из $W^1_2(Q_T)$ второй начально–краевой задачи с однородными граничными условиями

$$u^m_{tt}(x,\,t)-u^m_{xx}(x,\,t)+c(x,\,t)u^m(x,\,t)=H(x,\,t)+G(x,\,t,\,u^m(x,\,t)), \quad (10)$$
$$H(x,\,t)=p^m(t)f(x,\,t),$$
$$u^m(x,\,0)=\varphi^m(x),\quad u^m_t(x,\,0)=\psi(x), \quad (11)$$
$$u^m_x(0,\,t)=u^m_x(l,\,t)=0. \quad (12)$$

Применяя стандартные методы [8] и условие Липшица, которому удовлетворяет функция $G(x,\,t,\,u(x,\,t))$, нетрудно доказать однозначную разрешимость задачи (10)–(12). Следовательно, можно утверждать, что для любого $p^m(t)$ существует единственная функция $u^m(x,\,t)$, удовлетворяющая тождеству (7). Так как $p^m(t)$ находятся явным образом из (9), то можно считать, что последовательность $\{u^m(x,\,t),\,p^m(t)\}$ построена.

Для обоснования сходимости этой последовательности рассмотрим разности

$$z^m(x,\,t)=u^m(x,\,t)-u^{m-1}(x,\,t),\ r^m(t)=p^m(t)-p^{m-1}(t).$$

Заметим, что для $z^m(x,\,t)$ справедливо тождество

$$\int_0^T \int_0^l [z_{tt}^m(x,\,t)v(x,\,t) + z_x^m(x,\,t)v_x(x,\,t)+$$
$$+c(x,\,t)z^m(x,\,t)v(x,\,t)]\,dxdt = \int_0^T \int_0^l r^m(t)f(x,\,t)v(x,\,t)dxdt+$$
$$+\int_0^T \int_0^l \left[G(x,\,t,\,u^m) - G(x,\,t,\,u^{m-1})\right] v(x,\,t)dxdt.$$

Полагая $v(x,\,t) = z_t^m(x,\,t)$ и интегрируя по частям интегралы в левой части, получим

$$\int_0^l \left[\left(z_t^m(x,\tau)\right)^2 + \left(z_x^m(x,\tau)\right)^2 + c(x,\tau)\left(z^m(x,\tau)\right)^2\right] dx =$$
$$= 2\int_0^\tau \int_0^l r^m(t)f(x,t)z_t^m(x,t)dxdt + 2\int_0^\tau \int_0^l c_t(x,t)\left(z_t^m(x,t)\right)^2 dxdt+$$
$$+\,2\int_0^\tau \int_0^l \left[G(x,t,u^m) - G(x,t,u^{m-1})\right] z_t^m(x,t)dxdt.$$

Применяя к правой части неравенство Юнга, элементарные неравенства, а также условия теоремы, нетрудно получить оценку

$$m\int_0^l \left[\left(z_t^m(x,\tau)\right)^2 + \left(z_x^m(x,\tau)\right)^2 + \left(z^m(x,\tau)\right)^2\right] dx \leqslant$$
$$\leqslant \delta\left(1+L^2\right)\int_0^\tau \int_0^l \left(r^m(t)\right)^2 dxdt+$$
$$+\,M_3\int_0^\tau \int_0^l \left(\left(z_t^m(x,t)\right)^2 + \left(z^m(x,t)\right)^2 + \left(z_x^m(x,t)\right)^2\right] dxdt, \quad (13)$$

где $M_3 = \max\left\{(f_1^2+1)/\delta; 2c_2\right\}$. Применим к (13) неравенство Гронуолла [9], а затем интегрируя по τ от 0 до T, приходим к оценке

$$\|z^m\|_{W_2^1(Q)} \leqslant \sqrt{N_1\delta}\|r^m(t)\|_{L_2(0,T)}, \quad (14)$$

где $N_1 = \exp(\frac{M_3T}{m})(1+L^2)$, $\delta > 0$ произвольно.

Оценим теперь $r^m(t)$, для которого справедливо равенство

$$r^m(t) = \left(\int_0^l K(x,t)f(x,t)dx\right)^{-1}\left[\int_0^l \left[K(x,t)c(x,t) - K_{tt}(x,t)\right] z^{m-1}(x,t)\,dx+\right.$$
$$+\int_0^l K_x(x,t)z_x^{m-1}(x,t)dx - 2\int_0^l K_t(x,t)z_t^{m-1}(x,t)dx-$$
$$\left.-\int_0^l K(x,t)\left[G(x,t,u^{m-1}) - G(x,t,u^{m-2})\right] dx\right]. \quad (15)$$

Возводя равенство (15) в квадрат, учитывая условия теоремы, а также то, что $z^{m-1}(x,\,t) \in W_2^1(Q_T)$, нетрудно получить неравенство

$$\|r^m(t))\|_{L_2(0,T)} \leqslant \sqrt{N_2}\|z^{m-1}(x,t)\|_{W_2^1(Q_T)}, \quad (16)$$

где $N_2 = \max\left\{4a_2^2 l; 4(a_1^2 l + a_2^2 l L^2)\right\}$.

Из (14) и (16) вытекает, что

$$\|z^m(x,t))\|_{W_2^1(0,T)} \leqslant \sqrt{N_3}\|z^{m-1}(x,t)\|_{W_2^1(Q_T)}, \tag{17}$$

$$\|r^m(t))\|_{L_2(0,T)} \leqslant \sqrt{N_3}\|r^{m-1}(t))\|_{L_2(0,T)}, \tag{18}$$

где $N_3 = N_1 N_2 \delta$.

Пользуясь произволом δ, выберем его так, чтобы $\sqrt{N_3} = q < 1$. Тогда неравенства (17) и (18) означают, что последовательность $(u^m(x,t),\, p^m(t))$ фундаментальна.

Так как $W_2^1(Q_T)$ и $L_2(0,T)$ — полные пространства, то фундаментальная последовательность $(u^m(x,t),\, p^m(t))$ сходится к элементу $(u(x,t),\, p(t))$, где $u(x,t) \in W_2^1(Q_T)$, $p(t) \in L_2(0,T)$. Но тогда, переходя к пределу в (7) и (9), получим соответственно тождества (6) и (5), так как из сильной сходимости следует слабая.

Таким образом, пара функций $(u(x,t),\, p(t))$, полученная в результате предельного перехода в $(u^m(x,t),\, p^m(t))$ и эквивалентных преобразований, является обобщённым решением задачи (1)–(4).

Единственность задачи (1)–(4) непосредственным образом следует из оценок (17) и (18). Действительно, полагая, что существуют два различных решения $(u_1,\, p_1)$ и (u_2, p_2), приходим к оценкам

$$(1-q)\|u(x,t)\|_{W_2^1(Q_T)} \leqslant 0, \quad (1-q)\|p(t)\|_{L_2(0,T)} \leqslant 0,$$

где $(u,\, p) = (u_1 - u_2,\, p_1 - p_2)$. Но так как $q < 1$, то $\|u(x,\,t)\|_{W_2^1(Q_T)} = 0$ и $\|p(t)\|_{L_2(0,\,T)} = 0$. $\square$

Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы, в рамках мероприятия 1.3.1 (госконтракт № П2589 от 26.11.2009)

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Cannon J. R., Lin Y.* Determination of a control parameter in a parabolic partial differential equation // *J. Austral. Math. Soc. Ser. B*, 1991. Vol. 33, no. 2. Pp. 149–163.
2. *Cannon J. R., Lin Y.* Determination of a parameter $p(t)$ in some quasi-linear parabolic differential equations // *Inverse Problems*, 1998. Vol. 4, no. 1. Pp. 35–45.
3. *Иванчов Н. И.* Об определении зависящего от времени старшего коэффициента в параболическом уравнении // *Сиб. матем. журн.*, 1998. Т. 39, № 3. С. 539–550; англ. пер.: *Ivanchov N. I.* On the determination of the time-dependent leading coefficient in a parabolic equation // *Siberian Math. J.*, 1998. Vol. 39, no. 3. Pp. 465–475.
4. *Камынин В. Л.* Об обратной задаче определения правой части в параболическом уравнении с условием интегрального переопределения // *Матем. заметки*, 2005. Т. 77, № 4. С. 522–534; англ. пер.: *Kamynin V. L.* On the inverse problem of determining the right-hand side of a parabolic equation under an integral overdetermination condition // *Math. Notes*, 2005. Vol. 77, no. 4. Pp. 482–493.
5. *Кожанов А. И.* О разрешимости обратной задачи нахождения коэффициента теплопроводности // *Сиб. матем. журн.*, 2005. Т. 46, № 5. С. 1053–1071; англ. пер.: *Kozhanov A. I.* Solvability of the inverse problem of finding thermal conductivity // *Siberian Math. J.*, 2005. Vol. 46, no. 5. Pp. 841–856.

6. *Прилепко А. И., Костин А. Б.* О некоторых обратных задачах для параболических уравнений с финальным и интегральным наблюдением // *Матем. сб.*, 1992. Т. 183, № 4. С. 49–68; англ. пер.: *Prilepko A. I., Kostin A. B.* On certain inverse problems for parabolic equations with final and integral observation // *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, 1993. Vol. 75, no. 2. Pp. 473–490.
7. *Прилепко А. И., Ткаченко Д. С.* Свойства решений параболического уравнения и единственность решения обратной задачи об источнике с интегральным переопределением // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2003. Т. 43, № 4. С. 562–570; англ. пер.: *Prilepko A. I., Tkachenko D. S.* Properties of solutions of a parabolic equation and the uniqueness of the solution of the inverse source problem with integral overdetermination // *Comput. Math. Math. Phys.*, 2003. Vol. 43, no. 4. Pp. 537–546.
8. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.; англ. пер.: *Ladyzenskaja O. A., Solonnikov V. A., Ural'ceva N. N.* Linear and quasi-linear equations of parabolic type / Translations of Mathematical Monographs. Vol. 23. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 1968. 648 pp.
9. *Gârding L.* Cauchy's problem for hyperbolic equations / Lecture notes. Chicago, Ill, USA: University of Chicago, 1957; русск. пер.: *Гординг Л.* Задача Коши для гиперболических уравнений. М.: Иностр. лит., 1961. 120 с.

Поступила в редакцию 25/IV/2011;
в окончательном варианте — 05/V/2011.

MSC: 35R30; 35L10

ON SOLVABILITY OF A INVERSE PROBLEM FOR HYPERBOLIC EQUATION WITH AN INTEGRAL OVERDETERMINATION CONDITION

N. V. Beilina

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia.

E-mails: natalie@samdiff.ru

In this paper we study an inverse problem with an integral overdetermination condition for a hyperbolic equation with an unknown coefficient in equation. The existence and uniqueness of a solution is proved with the help of an a-priory estimate and Galyorkin procedure.

Key words: *inverse problem, integral condition, solvability.*

Original article submitted 25/IV/2011;
revision submitted 05/V/2011.

Natalya V. Beilina (Ph. D. (Phys. & Math.)), Senior Teacher, Dept. of Higher Mathematics & Applied Informatics.