УДК 519.633

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СО ЗНАКОПЕРЕМЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФОРМОЙ

А. А. Токова

Северо-Кавказская государственная гуманитарно-технологическая академия,
369000, Черкесск, ул. Ставропольская, 36.

E-mail: tokova-aa@yandex.ru

Решена нелокальная краевая задача для нагруженного уравнения параболического типа со знакопеременной характеристической формой. Построено общее представление решения. Доказаны теорема об общем представлении решения и теорема существования и единственности решения краевой задачи в прямоугольной области.

Ключевые слова: *нагруженное дифференциальное уравнение, нелокальная краевая задача, регулярное решение, существование, единственность.*

В области $\Omega = \{(x, y) : -1 < x < 1,\, 0 < y < T\}$ рассмотрим нагруженное уравнение

$$L_1 u = L_2 \delta u, \tag{1}$$

где

$$L_1 \equiv x\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \lambda^2, \quad L_2 \equiv a\frac{\partial}{\partial y}.$$

Здесь $(\delta u)(y)$ — среднее значение функции $u(x,\, y)$ по переменной x на сегменте $[-1,\, 1]$:

$$(\delta u)(y) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} u(x,\, y)dx,$$

$\lambda = \lambda(y)$, $a = a(y)$ — заданные непрерывные функции.

Уравнение (1) в области Ω является нагруженным уравнением параболического типа со знакопеременной характеристической формой $\Theta(x, y; \xi) = x\xi^2$.

В работе [1] А. М. Нахушев предожил метод приближенного решения краевых задач для дифференциальных уравнений, основанный на редукции к нагруженным уравнениям (см. [2]). В связи с этим вызывает интерес постановка и исследование краевых задач для уравнений вида (1). В даной работе строится общее представление решений уравнения (1) и решается нелокальная краевая задача. Первая краевая задача для уравнения вида (1) рассматривалась в работе [3].

Обозначим через $\Omega^+ = \Omega \cap \{x > 0\}$ и $\Omega^- = \Omega \cap \{x < 0\}$. Регулярным решением уравнения (1) в области Ω будем называть решение $u = u(x,\, y)$ такое, что $u \in C(\bar{\Omega})$, $u_{xx} \in C(\Omega^+) \cap C(\Omega^-)$, $(\delta u)(y) \in C[0,\, T] \cap C^1(0,\, T)$ и

Алла Аскербиевна Токова (к.ф.-м.н.), доцент, каф. математики.

выполнено соотношение

$$\lim_{\varepsilon\to 0}[u_x(\varepsilon,\, y) - u_x(-\varepsilon,\, y)] = 0, \quad y \in (0,\, T).$$

1. Представление решения. Будем считать, что $\lambda(y)$, $a(y) > 0$, $y \in [0,\, T]$. Пусть $u = u(x,\, y)$ — регулярное решение уравнения (1). Обозначим

$$v(x,\, y) = u(x,\, y) - \frac{a(y)}{\lambda^2(y)}\frac{\partial}{\partial y}(\delta u)(y). \tag{2}$$

Тогда функция $v(x,\, y)$ является решением уравнения

$$xv_{xx}(x,\, y) + \lambda^2(y)v(x,\, y) = 0$$

и в областях Ω^+ и Ω^- представляется в виде

$$v(x,\, y) = \sqrt{x}\left[A(y)I_1(2\lambda\sqrt{x}) + B(y)K_1(2\lambda\sqrt{x})\right], \quad (x,\, y) \in \Omega^+, \tag{3}$$
$$v(x,\, y) = \sqrt{-x}\left[C(y)J_1(2\lambda\sqrt{-x}) + D(y)Y_1(2\lambda\sqrt{-x})\right], \quad (x,\, y) \in \Omega^-, \tag{4}$$

где $I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$ — модифицированные функции Бесселя 1-го и 2-го рода; $J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$ — функции Бесселя 1-го и 2-го рода.

Учитывая формулы дифференцирования функций Бесселя

$$\frac{d}{dz}\left[z^\nu I_\nu(z)\right] = z^\nu I_{\nu-1}(z), \quad \frac{d}{dz}\left[z^\nu J_\nu(z)\right] = z^\nu J_{\nu-1}(z), \tag{5}$$
$$\frac{d}{dz}\left[z^\nu K_\nu(z)\right] = -z^\nu K_{\nu-1}(z), \quad \frac{d}{dz}\left[z^\nu Y_\nu(z)\right] = z^\nu Y_{\nu-1}(z), \tag{6}$$

получим

$$v_x(x,\, y) = \lambda\left[A(y)I_0(2\lambda\sqrt{x}) - B(y)K_0(2\lambda\sqrt{x})\right], \quad (x,\, y) \in \Omega^+, \tag{7}$$
$$v_x(x,\, y) = -\lambda\left[C(y)J_0(2\lambda\sqrt{-x}) + D(y)Y_0(2\lambda\sqrt{-x})\right], \quad (x,\, y) \in \Omega^-. \tag{8}$$

Из формул (3), (4), (7) и (8), учитывая асимптотические формулы

$$I_0(z) = 1 + \mathsf{O}(z), \quad K_0(z) = \Psi(1) - \ln\frac{z}{2} + \mathsf{O}(z\ln z),$$
$$J_0(z) = 1 + \mathsf{O}\left(\frac{1}{z}\right), \quad Y_0(z) = -\frac{2}{\pi}\left[\Psi(1) - \ln\frac{z}{2}\right] + \mathsf{O}(z\ln z),$$

в силу соотношений

$$v(x,y) \in C(\overline{\Omega}), \quad \lim_{\varepsilon\to 0}[v_x(\varepsilon,\, y) - v_x(-\varepsilon,\, y)] = 0$$

находим

$$D(y) = -\frac{\pi}{2}B(y), \quad C(y) = -A(y). \tag{9}$$

Обозначив

$$\xi(y) = v(-1,\, y), \quad \eta(y) = v(1,\, y), \tag{10}$$

из (3) и (4) с учётом (9) получаем

$$-A(y)J_1(2\lambda) - \frac{\pi}{2}B(y)Y_1(2\lambda) = \xi(y), \quad A(y)I_1(2\lambda) + B(y)K_1(2\lambda) = \eta(y).$$

Пусть

$$\Delta = \frac{\pi}{2}I_1(2\lambda)Y_1(2\lambda) - J_1(2\lambda)K_1(2\lambda),$$

и $\Delta \neq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} A(y) &= \frac{1}{\Delta}\left[\xi(y)K_1(2\lambda) + \frac{\pi}{2}\eta(y)Y_1(2\lambda)\right], \\ B(y) &= -\frac{1}{\Delta}\left[\xi(y)I_1(2\lambda) + \eta(y)J_1(2\lambda)\right]. \end{aligned} \tag{11}$$

Отсюда с учётом (3), (4) и (9) получаем

$$\begin{aligned} v(x,\,y) = \frac{\xi(y)\sqrt{x}}{\Delta}\left[I_1(2\lambda\sqrt{x})K_1(2\lambda) - K_1(2\lambda\sqrt{x})I_1(2\lambda)\right] + \\ + \frac{\eta(y)\sqrt{x}}{\Delta}\left[\frac{\pi}{2}I_1(2\lambda\sqrt{x})Y_1(2\lambda) - K_1(2\lambda\sqrt{x})J_1(2\lambda)\right], \quad (x,\,y) \in \Omega^+, \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} v(x,\,y) = \frac{\xi(y)\sqrt{-x}}{\Delta}\left[-J_1(2\lambda\sqrt{-x})K_1(2\lambda) + \frac{\pi}{2}Y_1(2\lambda\sqrt{-x})I_1(2\lambda)\right] + \\ + \frac{\eta(y)\sqrt{-x}}{\Delta}\left[-\frac{\pi}{2}J_1(2\lambda\sqrt{-x})Y_1(2\lambda) + \frac{\pi}{2}Y_1(2\lambda\sqrt{-x})J_1(2\lambda)\right],\ (x,\,y) \in \Omega^-. \end{aligned} \tag{13}$$

Найдём $(\delta v)(y)$. Из (12), (13) получаем

$$\begin{aligned} 2(\delta v)(y) &= \int_{-1}^{1} v(x,\,y)dx = \\ &= A(y)\left[\int_0^1 \sqrt{x}I_1(2\lambda\sqrt{x})dx - \int_{-1}^0 \sqrt{-x}J_1(2\lambda\sqrt{-x})dx\right] + \\ &\quad + B(y)\left[\int_0^1 \sqrt{x}K_1(2\lambda\sqrt{x})dx - \frac{\pi}{2}\int_{-1}^0 \sqrt{-x}Y_1(2\lambda\sqrt{-x})dx\right]. \end{aligned} \tag{14}$$

Вычислим интегралы в (14). Воспользовавшись формулами (5) и (6), сделав замену $x = 2\lambda\sqrt{t}$ в первом и третьем интегралах и замену $x = -2\lambda\sqrt{t}$ во втором и четвёртом, получаем

$$\int_0^1 \sqrt{x}I_1(2\lambda\sqrt{x})dx = \frac{1}{4\lambda^3}\int_0^{2\lambda} t^2 I_1(t)dt = \frac{1}{4\lambda^3}\int_0^{2\lambda}\left[t^2 I_2(t)\right]' dt = \frac{1}{\lambda}I_2(2\lambda),$$

$$\int_{-1}^0 \sqrt{-x}J_1(2\lambda\sqrt{-x})dx = \frac{1}{4\lambda^3}\int_0^{2\lambda} t^2 J_1(t)dt = \frac{1}{4\lambda^3}\int_0^{2\lambda}\left[t^2 J_2(t)\right]' dt = \frac{1}{\lambda}J_2(2\lambda),$$

и, учитывая, что $\lim\limits_{t\to 0} t^2K_2(t) = 2$ и $\lim\limits_{t\to 0} t^2Y_2(t) = -4/\pi$, имеем

$$\int_0^1 \sqrt{x} K_1(2\lambda\sqrt{x})dx = \frac{1}{4\lambda^3}\int_0^{2\lambda} t^2 K_1(t)dt =$$
$$= -\frac{1}{4\lambda^3}\int_0^{2\lambda} \left[t^2 K_2(t)\right]' dt = \frac{1}{2\lambda^3} - \frac{1}{\lambda} K_2(2\lambda),$$

$$\int_{-1}^0 \sqrt{-x} Y_1(2\lambda\sqrt{-x})dx = \frac{1}{4\lambda^3}\int_0^{2\lambda} t^2 Y_1(t)dt =$$
$$= \frac{1}{4\lambda^3}\int_0^{2\lambda} \left[t^2 Y_2(t)\right]' dt = \frac{1}{\lambda} Y_2(2\lambda) + \frac{1}{\pi\lambda^3}.$$

Подставляя вычисленные значения в (14), получаем

$$(\delta v)(y) = \frac{A(y)}{2\lambda}\left[I_2(2\lambda) - J_2(2\lambda)\right] - \frac{B(y)}{2\lambda}\left[K_2(2\lambda) + \frac{\pi}{2} Y_2(2\lambda)\right],$$

или с учётом (11) —

$$(\delta v)(y) = \xi(y) E(\lambda) + \eta(y) F(y), \tag{15}$$

где

$$E(\lambda) = \frac{1}{2\lambda\Delta}\left(K_1(2\lambda)\left[I_2(2\lambda) - J_2(2\lambda)\right] + I_1(2\lambda)\left[K_2(2\lambda) + \frac{\pi}{2} Y_2(2\lambda)\right]\right),$$
$$F(\lambda) = \frac{1}{2\lambda\Delta}\left(\frac{\pi}{2} Y_1(2\lambda)\left[I_2(2\lambda) - J_2(2\lambda)\right] + J_1(2\lambda)\left[K_2(2\lambda) + \frac{\pi}{2} Y_2(2\lambda)\right]\right).$$

Учитывая, что в силу (2)

$$(\delta v)(y) = (\delta u)(y) - \frac{a(y)}{\lambda^2(y)}(\delta u)'(y),$$

получаем

$$\xi(y) = u(-1,\, y) - \frac{a(y)}{\lambda^2(y)}(\delta u)'(y), \quad \eta(y) = u(1,\, y) - \frac{a(y)}{\lambda^2(y)}(\delta u)'(y). \tag{16}$$

Подставляя (2) и (16) в (15) и считая $E(\lambda) + F(\lambda) \neq 1$, $y \in [0,\, T]$, приходим к соотношению

$$(\delta u)'(y) + K(y)(\delta u)(y) = M(y),$$

где

$$K(y) = \frac{\lambda^2(y)}{a(y)\left[E(\lambda) + F(\lambda) - 1\right]}, \quad M(y) = K(y)\left[E(\lambda) u(-1,\, y) + F(\lambda) u(1,\, y)\right].$$

Таким образом, получаем

$$(\delta u)(y) = (\delta u)(0) w(y,\, 0) + \int_0^y M(t) w(y,\, t)dt, \tag{17}$$

где

$$w(y,\,t)=\exp\left(-\int_t^y K(s)ds\right).$$

Сформулируем доказанное в виде теоремы.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия*:
1) $u(x,\,y)$ — *регулярное решение уравнения* (1);
2) $a(y),\,\lambda(y)\in C[0,\,T]$;
3) $\Delta\neq 0,\,E(\lambda)+F(\lambda)\neq 1,\,a(y)>0,\,\lambda(y)>0,\,y\in[0,\,T]$.

Тогда $u(x,\,y)$ *представимо в виде*

$$u(x,\,y)=v(x,\,y)+\frac{a(y)}{\lambda^2(y)}(\delta u)'(y), \tag{18}$$

где $v(x,\,y)$ *определяется с помощью* (12), (13), *а* $(\delta u)(y)$ — *с помощью* (17).

2. Краевая задача. Сформулируем краевую задачу для уравнения (1): *найти регулярное в области* Ω *решение* $u(x,\,y)$ *уравнения* (1), *удовлетворяющее условиям*

$$u(-1,\,y)=\varphi(y),\quad u(1,\,y)=\psi(y),\quad 0<y<T, \tag{19}$$

$$\alpha(\delta u)(0)+\beta\alpha(\delta u)(T)=\gamma, \tag{20}$$

где $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ — заданные непрерывные функции; $\alpha,\,\beta,\,\gamma$ — постоянные, причём $\alpha^2+\beta^2\neq 0$.

Пусть

$$\alpha+\beta w(T,\,0)\neq 0. \tag{21}$$

Подчиняя (17) условию (20), получим

$$\gamma=(\delta u)(0)(\alpha+\beta w(T,\,0))+\beta\int_0^T K(t)w(T,\,t)dt,$$

$$(\delta u)(0)=\frac{\gamma-\beta\displaystyle\int_0^T K(t)w(T,\,t)dt}{\alpha+\beta w(T,\,0)}. \tag{22}$$

С учётом этого из теоремы 1 следует

Теорема 2. *Пусть* $\varphi(y),\,\psi(y)\in C[0,\,T]$ *и выполнены условия* 2), 3) *теоремы* 1 *и условие* (21). *Тогда существует единственное решение задачи* (1), (19) *и* (20) $u(x,y)$, *которое имеет вид* (18), *при этом*

$$\xi(y)=\varphi(y)-\frac{a(y)}{\lambda^2(y)}(\delta u)'(y),\quad \eta(y)=\psi(y)-\frac{a(y)}{\lambda^2(y)}(\delta u)'(y),$$

а $(\delta u)(y)$ *и* $(\delta u)(0)$ *определены равенствами* (17) *и* (22) *соответственно.*

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Нахушев А. М.* Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод // *Дифференц. уравнения*, 1982. Т. 18, № 1. С. 72–81. [*Nakhushev A. M.* An approximate method for solving boundary value problems for differential equations and its application to the dynamics of ground moisture and ground water // *Differents. Uravneniya*, 1982. Vol. 18, no. 1. Pp. 72–81].
2. *Нахушев А. М.* О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка // *Дифференц. уравнения*, 1976. Т. 12, № 1. С. 103–108. [*Nakhushev A. M.* On the Darboux problem for a certain degenerate second-order loaded integro-differential equation // *Differents. Uravneniya*, 1976. Vol. 12, no. 1. Pp. 103–108].
3. *Токова А. А.* О первой краевой задаче для одного нагруженного дифференциального уравнения второго порядка // *Докл. Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, 2005. Т. 8, № 1. С. 87–91. [On the first boundary value problem for a certain second-order loaded differential equation // *Dokl. Adygskoy (Cherkesskoy) Mezhdunarodnoy akademii nauk*, 2005. Vol. 8, no. 1. Pp. 87–91].

Поступила в редакцию 08/XI/2010;
в окончательном варианте — 30/V/2011.

MSC: 35K10

ON A NON-LOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR LOADED DIFFERENTIAL EQUATION WITH CHARACTERISTIC FORM OF VARIABLE SIGN

A. A. Tokova

North-Caucasian State Humanitarian-Technological Academy,
36, Stavropol'skaya, Cherkessk, 369000, Russia.

E-mail: tokova-aa@yandex.ru

Non-local boundary value problem for loaded equation of parabolic type with the sign-variable characteristic form is solved. Common representation of solution is constructed. The theorems of common representation, existence and uniqueness of solution for boundary value problems set in rectangular domain are proved.

Key words: *loaded differential equation, regular solution, non-local boundary value problem, uniqueness, occurence.*

Original article submitted 08/XI/2010;
revision submitted 30/V/2011.

Alla A. Tokova (Ph. D. (Phys. & Math.)), Associate Professor, Dept. of Mathematics.