

# Механика деформируемого твёрдого тела

УДК 539.3

## ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЁТ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О РАСТЯЖЕНИИ С КРУЧЕНИЕМ СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗЦА В ОДНОЙ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЕ

*В. В. Стружанов, В. В. Привалова*

Институт машиноведения УрО РАН,  
620219, Екатеринбург, ул. Комсомольская, 34.  
E-mails: stru@imach.uran.ru, valentprival@gmail.com

*Предложена численная процедура расчёта предельных значений нагрузок, действующих на дискретные градиентные механические системы, часть элементов которых может работать уже на стадии разупрочнения. Методика проиллюстрирована на примере задачи о растяжении с кручением специального образца в одной стержневой системе из нелинейного материала, свойства которого определяют невыпуклый потенциал, описывающий как устойчивые состояния материала (упрочнение), так и неустойчивые (разупрочнение). Изложенная вычислительная схема позволяет избежать решения нелинейных уравнений равновесия при постепенном возрастании нагрузок и оценки устойчивости каждого такого положения равновесия с целью выявления значений нагрузок, приводящих систему к катастрофе.*

**Ключевые слова:** градиентная система, потенциальная функция, критические точки, вырожденные критические точки, матрица Гессе, сепаратриса, предельные значения параметров управления.

**Введение.** Разрушение механических систем есть явление того же характера, что и явление невозможности равновесия [1], то есть разрушение связано с потерей устойчивости процесса деформирования. Если система градиентна (консервативная механическая система), то её поведение описывается потенциальной функцией, связывающей параметры состояния системы и параметры управления [2, 3]. Потеря устойчивости деформирования таких систем определяется вырожденными критическими точками их потенциальных функций, которые в пространстве управления задают сепаратрисы таких функций. Известно [1, 2], что потеря устойчивости происходит тогда, когда путь нагружения в пространстве управлений выходит из области, ограниченной сепаратрисой. Отсюда для нахождения предельных значений параметров управления необходимо знать сепаратрису потенциальной функции.

В работах [4, 5] построение сепаратрисы потенциальных функций механической системы, осуществляющей растяжение с кручением по мягкой и жёсткой схемам нагружения специального образца, реализовано посредством ре-

---

*Валерий Владимирович Стружанов (д.ф.-м.н., проф.), главный научный сотрудник, лаб. микромеханики материалов. Валентина Викторовна Привалова (к.ф.-м.н.), научный сотрудник, лаб. микромеханики материалов.*

шения нелинейных уравнений равновесия при монотонном характере возрастания параметров управления с последующим выделением вырожденных критических точек соответствующих потенциальных функций. В этом случае была получена избыточная информация обо всех промежуточных равновесных состояниях, в то время как необходимо знать только значения величин параметров управления (нагрузок), приводящих систему к катастрофе (потере устойчивости процесса деформирования).

В данной работе на примере задачи о растяжении с кручением образца специальных размеров в одной стержневой системе показана методика численного расчёта сепаратрисы и определения предельных параметров нагружения, позволяющая избежать решения большого числа нелинейных уравнений равновесия.

**1. Механическая система.** Будем исследовать стержневую систему (рис. 1) [4]. Стержни 1 и 2 выполнены из линейно упругого материала. У стержня 1 сечение  $BB$  может перемещаться только поступательно (кручение заблокировано). Поэтому данный стержень передаёт на образец 3 растягивающую нагрузку. Жёсткость стержня 1 при растяжении равна  $\lambda_1$ . У стержня 2 сечение  $CC$  может только поворачиваться (поступательное движение заблокировано). Он передаёт на образец закручивающий момент. Жёсткость стержня 2 при кручении —  $\lambda_2$ . Полный образец 3 имеет специальную геометрию такую, что удлинение по величине равно деформации растяжения  $\varepsilon$ , угол закручивания — деформации сдвига  $\gamma$ , растягивающая сила — растягивающему напряжению  $\sigma$ , а крутящий момент — касательному напряжению  $\tau$ . Система нагружается либо заданием перемещения  $u$  сечению  $AA$  стержня 1 и угла закручивания  $\psi$  в сечении  $DD$  стержня 2 (жёсткое нагружение), либо заданием соответственно растягивающей силы  $P$  и крутящего момента  $M$  (мягкое нагружение). Возможны также комбинации кинематических и силовых нагружений (смешанное нагружение).

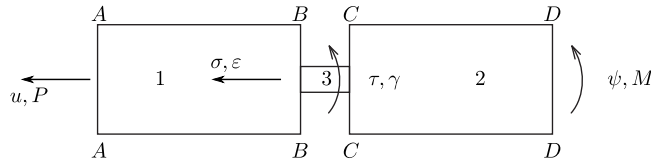


Рис. 1. Механическая система

Для численного расчёта воспользуемся невыпуклым потенциалом, обоснование и методика построения которого приведены в работе [6]:

$$\Pi(\varepsilon, \gamma) = \begin{cases} 0,25[(E\varepsilon^2 + G\gamma^2) + a^{-1} \sin(a(E\varepsilon^2 + G\gamma^2))], & (\varepsilon, \gamma) \in \Omega; \\ 2,5 \cdot 10^{-3} E, & (\varepsilon, \gamma) \notin \Omega, \end{cases}$$

где  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $G = 7,7 \cdot 10^4$  МПа,  $a = 100\pi/E$ ,  $\Omega = \{\varepsilon, \gamma \geq 0, E\varepsilon^2 + G\gamma^2 \leq \pi a^{-1}\}$ . Этот потенциал описывает на качественном уровне поведение материала при активном деформировании растяжением с кручением как на стадии упрочнения, так и на стадии разупрочнения.

Нагружение системы ведётся посредством монотонно возрастающих кинематических и силовых параметров ( $u, \psi, P, M$ ). В этом случае все элементы

находятся в условиях активного деформирования и данная стержневая конструкция относится к классу градиентных систем.

**2. Сепаратриса и предельные значения параметров управления при жёстком нагружении.** При жёстком нагружении состояние механической системы описывает потенциальная функция

$$W_1^* = 0,5\lambda_1(u - \varepsilon l)^2 + 0,5\lambda_2(\psi - \gamma lr^{-1})^2 + \Pi(\varepsilon, \gamma)Sl,$$

где первые два слагаемых — потенциальные энергии упругих деформаций соответственно стержней 1 и 2,  $l$  — длина образца 3,  $S$  — площадь его поперечного сечения,  $r$  — радиус средней линии поперечного сечения. В дальнейшем параметры  $l$ ,  $r$ ,  $S$  будем опускать, как равные единице [4], и для большей ясности изложения и удобства расчётов, не нарушая сути дела, считать все величины безразмерными. Тогда потенциальную функцию запишем в виде

$$W_1 = 0,5\lambda_1(u - \varepsilon)^2 + 0,5\lambda_2(\psi - \gamma)^2 + \Pi(\varepsilon, \gamma).$$

Здесь  $u$ ,  $\psi$  — параметры управления,  $\varepsilon$ ,  $\gamma$  — параметры состояния системы. Величины  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  фиксируем ( $\lambda_1 = 5$  кН/мм,  $\lambda_2 = 5$  кН · мм).

Критические точки функции  $W_1$  есть решения системы уравнений равновесия

$$\frac{\partial W_1}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial \Pi}{\partial \varepsilon} - \lambda_1(u - \varepsilon) = 0, \quad \frac{\partial W_1}{\partial \gamma} = \frac{\partial \Pi}{\partial \gamma} - \lambda_2(\psi - \gamma) = 0.$$

Отсюда

$$u = \frac{1}{\lambda_1} \frac{\partial \Pi}{\partial \varepsilon} + \varepsilon, \quad \psi = \frac{1}{\lambda_2} \frac{\partial \Pi}{\partial \gamma} + \gamma. \quad (1)$$

Вырожденные критические точки, образующие в пространстве управлений сепаратрису, обращают в нуль детерминант матрицы Гессе  $H(W_1)$  функции  $W_1$  (матрицы вторых производных). Здесь

$$H(W_1) = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varepsilon^2} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varepsilon \partial \gamma} \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varepsilon \partial \gamma} & \lambda_2 + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \gamma^2} \end{pmatrix}.$$

Определим приближённые значения координат вырожденных критических точек, используя следующую вычислительную процедуру. Возьмём на множестве  $\{\varepsilon, \gamma \geq 0\}$  прямоугольник  $0 \leq \varepsilon \leq 0,1$ ,  $0 \leq \gamma \leq 0,16$  и построим в нём сетку узлов с шагом  $2 \cdot 10^{-4}$  (по  $\varepsilon$ ) и  $3,2 \cdot 10^{-4}$  (по  $\gamma$ ). В каждом узле вычисляем значение  $\det H(W_1)$  и выделяем те узлы, в которых детерминант близок к нулю с достаточной степенью точности. Координаты этих узлов подставляем в уравнения (1) и находим значения  $u^s$ ,  $\psi^s$ . В пространстве управления точки с координатами  $(u^s, \psi^s)$  расположены на сепаратрисе функции  $W_1$  (или в достаточной близости от неё).

На рис. 2 изображена рассчитанная по приведённой выше методике сепаратриса функции  $W_1$ . Известно [2, 3], что потеря устойчивости процесса деформирования происходит тогда, когда путь нагружения в пространстве управлений выходит из области, ограниченной кривыми сепаратрисы, т.е.

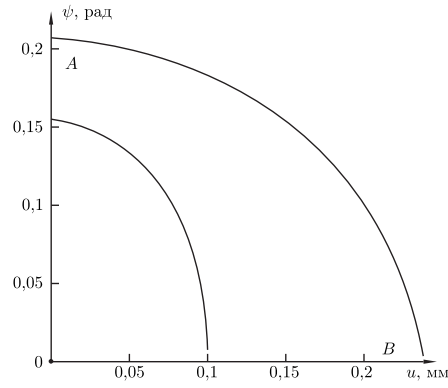


Рис. 2. Сепаратриса при жёстком нагружении

Таблица 1

$u^s$	0,014	0,038	0,053	0,063	0,082	0,108	0,124	0,169	0,221	0,230
$\psi^s$	0,204	0,204	0,199	0,196	0,191	0,180	0,171	0,138	0,057	0,010

пересекает кривую  $AB$  (см. рис. 2). Координаты точек этой кривой и определяют предельные значения параметров управления. Некоторые из этих значений приведены в табл. 1.

**3. Сепаратриса и предельные значения нагрузок при мягком нагружении.**

При мягком нагружении потенциальная функция записывается в виде

$$W_2 = W_1 - \int_0^u P du - \int_0^\psi M d\psi,$$

где второе и третье слагаемые — работа внешних сил, взятая со знаком минус. Роль параметров управления играют величины  $P$  и  $M$ , а параметров состояния —  $\varepsilon$ ,  $\gamma$ ,  $u$ ,  $\psi$ . Критические точки функции  $W_2$  являются решениями системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_2}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial \Pi}{\partial \varepsilon} - \lambda_1(u - \varepsilon) = 0, & \quad \frac{\partial W_2}{\partial \gamma} = \frac{\partial \Pi}{\partial \gamma} - \lambda_2(\psi - \gamma) = 0, \\ \frac{\partial W_2}{\partial u} = \lambda_1(u - \varepsilon) - P = 0, & \quad \frac{\partial W_2}{\partial \psi} = \lambda_2(\psi - \gamma) - M = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Матрица Гессе функции  $W_2$  имеет вид:

$$H(W_2) = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varepsilon^2} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varepsilon \partial \gamma} & -\lambda_1 & 0 \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varepsilon \partial \gamma} & \lambda_2 + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \gamma^2} & 0 & -\lambda_2 \\ -\lambda_1 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Так как компоненты матрицы  $H(W_2)$  есть функции только от  $\varepsilon$  и  $\gamma$ , то описанную выше численную процедуру реализуем на той же сетке узлов, что и в случае жёсткого нагружения. Координаты узлов, в которых

$\det H(W_2) = 0$  (с приемлемой точностью), подставляем в уравнения (2) и находим значения  $P^s$  и  $M^s$ .

В пространстве управления точки  $(P^s, M^s)$  есть точки сепаратрисы функции  $W_2$ . Эта сепаратриса состоит из кривой  $CD$  и одной точки — начала координат (см. рис. 3). Катастрофа (потеря устойчивости) происходит после пересечения путём нагружения кривой  $CD$ . Координаты точек этой кривой определяют совокупность предельных нагрузок. В табл. 2 приведены некоторые значения таких нагрузок.

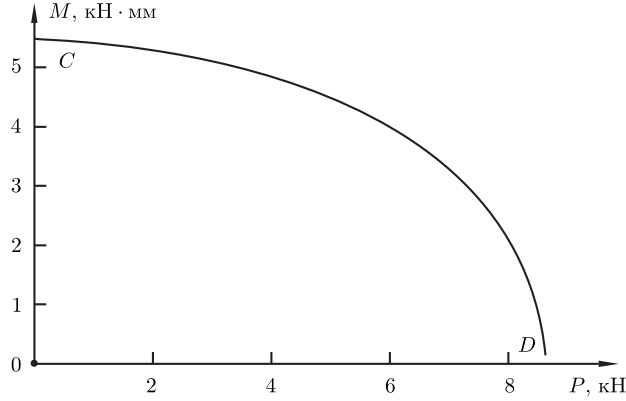


Рис. 3. Сепаратриса при мягком нагружении

Таблица 2

$P^s$	371,8	1058	4262	5578	6636	7037	8096	8181	8582	8696
$M^s$	5392	5357	4705	4141	3489	3172	1974	1833	881	123,3

**4. Сепаратриса при смешанном нагружении.** Смешанное нагружение будем осуществлять заданием перемещения  $u$  и крутящего момента  $M$ . Потенциальная функция тогда имеет вид

$$W_3 = W_1 - \int_0^\psi M d\psi.$$

Здесь параметры управления  $u$  и  $M$ , а параметры состояния  $\varepsilon, \gamma, \psi$ . Критические точки находим из системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_3}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial \Pi}{\partial \varepsilon} - \lambda_1(u - \varepsilon) = 0, \quad \frac{\partial W_3}{\partial \gamma} = \frac{\partial \Pi}{\partial \gamma} - \lambda_2(\psi - \gamma) = 0, \\ \frac{\partial W_3}{\partial \psi} = \lambda_2(\psi - \gamma) - M = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Матрица Гессе функции  $W_3$  имеет следующий вид:

$$H(W_3) = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varepsilon^2} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varepsilon \partial \gamma} & 0 \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varepsilon \partial \gamma} & \lambda_2 + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \gamma^2} & -\lambda_2 \\ 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Компоненты этой матрицы также — функции от  $\varepsilon$  и  $\gamma$ , поэтому для расчёта значений  $\det H(W_3)$  используем ту же сетку узлов на множестве  $\{\varepsilon, \gamma \geq 0\}$ .

Координаты узлов, где  $\det H(W_3) = 0$ , подставляем в уравнение (3) и находим значения  $u^s$  и  $M^s$  — координаты точек сепаратрисы функции  $W_3$ . Она состоит из кривой  $QF$  и прямой  $OK$  (см. рис. 4).

Катастрофа (потеря устойчивости процесса деформирования) происходит после пересечения путём нагружения в пространстве управления кривой  $QF$ . Некоторые значения координат точек (предельных значений параметров управления) приведены в табл. 3.

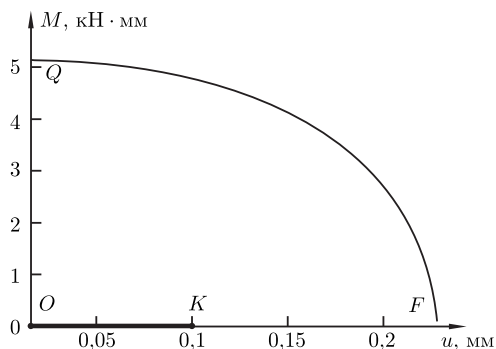


Рис. 4. Сепаратриса при смешанном нагружении

Таблица 3

$u^s$	0,014	0,015	0,035	0,078	0,168	0,184	0,201	0,223	0,225	0,228
$M^s$	5024	5019	4998	4851	3681	3239	2638	1299	10138	629

**Заключение.** На примере задачи о растяжении с кручением в одной стержневой системе специального образца из нелинейного материала, свойства которого определяет невыпуклый потенциал, описывающий состояние упрочнения и разупрочнения, проиллюстрирована численная процедура расчёта предельных значений нагрузок. Эта вычислительная схема позволяет избежать решения нелинейных уравнений равновесия при постепенном возрастании нагрузок и оценки устойчивости каждого такого равновесия.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты №№ 10–08–00135, 10–01–96018\_урал).

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1970. 492 с.; англ. пер.: *Sedov L. I.* Mechanics of continuous media. Vol. 1 / Series in Theoretical and Applied Mechanics. Vol. 4. River Edge, NJ: World Scientific, 1997. 614 pp.
2. *Gilmore R.* Catastrophe Theory for Scientists and Engineers. New York: Dover, 1993. 666 pp.; русск. пер.: *Гилмор Р.* Прикладная теория катастроф: в 2-х кн. М.: Мир, 1984. 350 (I) + 285 (II) с.
3. *В. В. Стружанов* Об устойчивости двухосного растяжения квадратной пластины в одной градиентной механической системе / Тр. ИММ УрО РАН, Т. 16, 2010. С. 187–195. [*Struzhanov V. V.* On stability of biaxial tension of a square plate in a gradient mechanical system / Tr. IMM UrO RAN, 16, 2010. Pp. 187–195].
4. *Стружанов В. В., Просвиряков Е. Ю.* Растяжение с кручением. Сообщение 2: Устойчивость процесса деформирования образца в механической системе. Жёсткое и мягкое нагружения // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2008. № 2(17). С. 77–86. [*Struzhanov V. V., Prosviryakov E. Yu.* Tension with torsion. Part 2. Deformation

- process stability of a sample in a mechanical system. Rigid and soft loadings // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2008. no. 2(17). Pp. 77–86].
5. Стружанов В.В., Просвиряков Е.Ю. Сепаратриса в задаче о растяжении с кручением при жёстком нагружении // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2009. № 2(19). С. 248–252. [Struzhanov V. V., Prosviryakov E. Yu. Separatrix in rigid tension-torsion loading problem // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2009. no. 2(19). Pp. 248–252].
  6. Стружанов В.В., Просвиряков Е.Ю., Бурмашева Н.В. Об одном методе построения единого потенциала // *Вычислительная механика сплошных сред*, 2009. Т. 2, № 2. С. 96–107. [Struzhanov V. V., Prosviryakov E. Yu., Burmasheva N. V. On one method for constructing uniform potential // *Vychislitel'naya mehanika sploshnyh sred*, 2009. Vol. 2, no. 2. Pp. 96–107].

Поступила в редакцию 21/XII/2010;  
в окончательном варианте — 16/V/2011.

MSC: 74B20

## NUMERICAL CALCULATION FOR LIMIT VALUES OF CONTROL PARAMETERS IN THE PROBLEM ABOUT EXTENSION WITH TORSION FOR SPECIAL SAMPLE IN THE FRAMED STRUCTURE

*V. V. Struzhanov, V. V. Privalova*

Institute of Teoretical Engineering, Ural Branch of RAS,  
34, Komsomolskaya st., Yekaterinburg, 620083, Russia.

E-mails: stru@imach.uran.ru, valentprival@gmail.com

*The numerical procedure for computation of the loads limit values was considered in this article. This loads apply to discrete gradient mechanical systems. Part of their elements can work at loss of strength stadium already. Methodic was shown for example of the problem about extension with torsion in the framed structure for special sample from nonlinear material. Properties of this material are defined by non-convex potential. This potential describe steady stats (strengthening) and non-steady (loss of strength) of the material. This calculating scheme allow don't solve nonlinear equilibrium equations with gradually increase of loads and test of the stiffness for any equilibrium for definition of loads values, which act the structure accident.*

**Key words:** *gradient system, potential function, critical point, nonsingular critical point, Hessian matrix, separatrix, limit values of control parameters.*

Original article submitted 21/XII/2010;  
revision submitted 16/V/2011.

---

*Valeriy V. Struzhanov* (Dr. Sci. (Phys. & Math)), Chief Research Scientist, Lab. of Material Micromechanics. *Valentina V. Privalova* (Ph. D. (Phys. & Math)), Research Scientist, Lab. of Material Micromechanics.