

УДК 539.3

ВОЛНОВЫЕ ЧИСЛА ТЕРМОУПРУГИХ ВОЛН В ВОЛНОВОДЕ С ТЕПЛООБМЕНОМ НА БОКОВОЙ СТЕНКЕ

Ю. Н. Радаев¹, М. В. Таранова²¹ Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, 119526, Москва, просп. Вернадского, 101.² Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского (национальный исследовательский университет), механико-математический факультет, 410012, Саратов, ул. Астраханская, 83.

E-mails: radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com; taranova.mv@gmail.com

Рассматриваются вопросы, связанные с дальнейшим уточнением схем локализации на комплексной плоскости волновых чисел нормальных гармонических связанных термоупругих волн, распространяющихся в длинном цилиндрическом волноводе круглого поперечного сечения, с высокими азимутальными числами. Через свободную боковую стенку волновода может происходить конвективный теплообмен с окружающей средой. Постановка и решение соответствующей связанной термоупругой задачи осуществляются в рамках связанной обобщённой теории термоупругости третьего типа (GNIII), учитывающей как термодиффузионный, так и волновой механизм распространения тепла. Предельными случаями GNIII являются классическая теория термоупругости (GNI/СТЕ) и теория гиперболической термоупругости (GNI), допускающая полную теоретико-полевою формулировку с соответствующим вариационным функционалом термоупругого действия и дифференциальные уравнения поля гиперболического аналитического типа. Разработаны новые вычислительные алгоритмы, решающие две принципиально важные для высоких азимутальных чисел задачи: выделение всех 32-х независимых однозначных ветвей многозначных квадратных радикалов, входящих в частотное уравнение; уточнение расчётных формул, связанных с вычислением волновых чисел, локализованных на некоторых участках вещественной оси.

Ключевые слова: термомеханика, термоупругость типа III, связанная волна, частотное уравнение, волновод, теплообмен, волновое число.

1. Классическая теория связанной термоупругости впервые была корректно построена Био (М.А. Biot) [1] методами термодинамики необратимых процессов. Связанные соотношения этой теории, классифицируемые в настоящее время как GNI/СТЕ, включают векторное уравнение движения, принадлежащее гиперболическому типу, и параболическое уравнение теплопроводности. Теория GNI/СТЕ не допускает для термоупругого поля решений в форме распространяющихся с конечной скоростью незатухающих волн связанных деформаций и температуры (так называемый «второй звук»). «Полевые» уравнения СТЕ для связанных (сопряжённых) перемещений и температуры в линейном приближении состоят из одного векторного и сопряжённого ему скалярного связанных дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{cases} \mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \alpha \nabla \theta - \rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \\ \Lambda_* \Delta \theta - \kappa \dot{\theta} - \alpha \theta_0 \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} = 0. \end{cases}$$

Юрий Николаевич Радаев (д.ф.-м.н., профессор), ведущий научный сотрудник, лаб. моделирования в механике деформируемого твёрдого тела. Маргарита Владимировна Таранова, соискатель, каф. теории упругости и биомеханики.

В этих уравнениях \mathbf{u} — вектор перемещения; λ, μ — упругие постоянные Ламе (для изотермической деформации); α — термомеханическая постоянная ($\alpha = (1/3)(3\lambda + 2\mu)\beta^*$); β^* — коэффициент объёмного теплового расширения; θ — абсолютная температура, точнее, ее превышение (инкремент) над отсчётной (референциальной) температурой θ_0 ; θ_0 — отсчётная (равновесная) температура (при температуре, равной θ_0 , отсутствуют деформации и напряжения); κ — теплоемкость (на единицу объёма) при нулевой постоянной деформации; Λ_* — коэффициент теплопроводности; ∇ — трёхмерный оператор Гамильтона; $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ — оператор Лапласа. Связанность уравнений СТЕ-теории обуславливается взаимным влиянием нагрева (охлаждения) и объёмной деформации тела, проявляется через определяющую постоянную α и является следствием основных принципов термодинамики. Второе из этих уравнений, сформулированное для недеформируемого проводника тепла, представляет собой одно из наиболее важных параболических дифференциальных уравнений математической физики — уравнение диффузии:

$$\Delta\theta - \frac{\kappa}{\Lambda_*}\dot{\theta} = 0.$$

Рассмотрим далее три наиболее часто встречающихся в прикладных задачах термомеханики обобщения основополагающих уравнений СТЕ. Одно из них было дано Лордом и Шульманом (H. Lord, Y. Shulman) (LS-theory) [2]. Ими было получено гиперболическое уравнение распространения тепла, основанное на новом законе теплопроводности, заменившем классический закон теплопроводности Фурье:

$$\mathbf{h} = -\Lambda_*\nabla\theta,$$

где \mathbf{h} — вектор потока тепла (heat flux). В законе LS-теплопроводности введена дополнительная определяющая постоянная — время релаксации τ_{rel} в соответствии с уравнением Каттанео (C. Cattaneo) [9]:

$$\mathbf{h} + \tau_{\text{rel}}\frac{\partial\mathbf{h}}{\partial t} = -\Lambda_*\nabla\theta. \quad (1)$$

Время релаксации представляет собой (всегда весьма малое) время запаздывания после возникновения температурного градиента, необходимое для того, чтобы в элементе тела сформировался установившийся поток тепла. Для металлов величина τ_{rel} заключена в пределах $10^{-12} \div 10^{-9}$ с.

Независимо от Каттанео аналогичное уравнение было получено в работе [10]. Уравнение (1) часто выводится на основании уравнения «запаздывания» (the lag equation):

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}, t + \tau_{\text{rel}}) = -\Lambda_*\nabla\theta(\mathbf{x}, t),$$

которое формулируется для заданного места в пространстве \mathbf{x} и, как уже отмечалось, устанавливает, что поток тепла запаздывает по отношению к пространственному градиенту температуры. Принимая во внимание, что

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}, t + \tau_{\text{rel}}) = \mathbf{h}(\mathbf{x}, t) + \tau_{\text{rel}}\frac{\partial\mathbf{h}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \dots,$$

где частное дифференцирование по времени выполняется при фиксированном положении \mathbf{x} , и ограничиваясь лишь первыми двумя слагаемыми в приведенном разложении, приходим к уравнению (1).

«Уравнения поля» LS-теории для связанных перемещений и температуры в линейном приближении состоят из одного векторного (совпадающего с соответствующим уравнением СТЕ-теории) и сопряжённого ему скалярного гиперболического связанных дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{cases} \mu\Delta\mathbf{u} + (\lambda + \mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} - \alpha\nabla\theta - \rho\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \\ \Lambda_*\Delta\theta - \kappa(\dot{\theta} + \tau_{\text{rel}}\ddot{\theta}) - \alpha\theta_0(\nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} + \tau_{\text{rel}}\nabla \cdot \ddot{\mathbf{u}}) = 0. \end{cases}$$

Второе из этих уравнений, сформулированное для недеформируемого тела, оказывается одним из важнейших гиперболических дифференциальных уравнений математической физики — телеграфным уравнением (telegraphist's equation):

$$\Delta\theta - \frac{\kappa\tau_{\text{rel}}}{\Lambda_*}\ddot{\theta} - \frac{\kappa}{\Lambda_*}\dot{\theta} = 0.$$

Тем самым в LS-теории как уравнение движения, так и уравнение транспорта тепла принадлежат к гиперболическому типу, что и обеспечивает конечную скорость распространения как тепловых, так упругих волн деформации.

Вторым хорошо известным обобщением связанной теории термоупругости Био является теория, предложенная Грином и Линдсей (A.E. Green, K.A. Lindsay) (GL-theory) [3]. GL-теория характеризуется тем, что вектор потока тепла в термоупругом теле \mathbf{h} зависит от скорости изменения абсолютной температуры θ и градиента температуры; закон GL-теплопроводности имеет форму

$$\mathbf{h} = -\mathbf{b}\dot{\theta} - \Lambda_* \cdot \nabla\theta,$$

где \mathbf{b} — антисимметричный вектор, Λ_* — тензор теплопроводности. Тензор второго ранга Λ_* в GL-теории симметричен: $\Lambda_* = \Lambda_*^T$. Заметим, что в случае центральной материальной симметрии выполняется равенство $\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Уравнение транспорта тепла оказывается гиперболическим. GL-теория в случае $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ допускает «второй звук», не нарушая при этом классического закона теплопроводности Фурье.

Определяющее уравнение GL-теории связанной термоупругости имеет вид

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon} - \alpha\left(1 + \tau^*\frac{\partial}{\partial t}\right)(\theta - \theta_0)\mathbf{I},$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений, $\boldsymbol{\varepsilon}$ — тензор малых деформаций, \mathbf{I} — единичный тензор.

Замкнутая система дифференциальных уравнений GL-теории состоит из уравнения движения

$$\mu\Delta\mathbf{u} + (\lambda + \mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} - \alpha\left(1 + \tau^*\frac{\partial}{\partial t}\right)\nabla\theta - \rho\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$$

и уравнения распространения тепла

$$\Lambda_*\Delta\theta - \alpha\theta_0\nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} - \kappa\left(1 + \tau_*\frac{\partial}{\partial t}\right)\dot{\theta} = 0.$$

Определяющие постоянные GL-теории τ^* и τ_* , имеющие смысл времён релаксации, подчиняются неравенствам $\tau^* \geq \tau_* \geq 0$, гарантирующим неотрицательность внутреннего производства энтропии при распространении волн деформаций и температуры. Если $\tau^* = \tau_* = 0$, то GL-теория сводится к СТЕ.

Заметим, что теории LS и GL принципиально отличаются друг от друга и не получаются одна из другой как частные случаи.

В начале 90-х гг. XX в. Грином и Нахди (A. E. Green, P. M. Naghdi) была развита теория обобщённой термоупругости (GN-theory) [4, 5]. Предложенная теория сочетает в себе как свойства классической термоупругости СТЕ, выстроенной согласно закону теплопроводности Фурье, так и свойства недиссипативной термоупругости GNII, предполагающей отсутствие производства энтропии и волновой характер распространения теплового сигнала. GN-теория была сформулирована в трёх различных термодинамически корректных вариантах: GNI, GNII и GNIII. GN-теория третьего типа (GNIII) — наиболее общая; она включает GNI и GNII в качестве предельных случаев. Линейная теория GNIII-термоупругости характеризуется тем, что вектор потока тепла \mathbf{h} линейно зависит как от градиента температуры, так и от градиента температурного смещения:

$$\mathbf{h} = -\Lambda_* \nabla \theta - \Lambda \nabla \vartheta,$$

где ϑ ($\dot{\vartheta} = \dot{\theta}$) — температурное смещение (thermal displacement), Λ — характерная скорость теплопроводности (thermal conductivity rate). Линейные связанные уравнения движения и теплопроводности GNIII-термоупругости имеют следующий вид [4]:

$$\begin{cases} \mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \alpha \nabla \theta - \rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \\ \Lambda \Delta \theta + \Lambda_* \Delta \dot{\theta} - \kappa \ddot{\theta} - \alpha \theta_0 \nabla \cdot \ddot{\mathbf{u}} = 0. \end{cases}$$

Если теплопроводящая среда недеформируема и определяющий параметр $\Lambda_* \rightarrow 0$, то термическое поле удовлетворяет классическому волновому уравнению

$$\Delta \theta - \frac{\kappa}{\Lambda} \ddot{\theta} = 0.$$

Условие конвективного теплообмена с окружающей средой через поверхность с единичной нормалью \mathbf{n} в линейном приближении имеет вид

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{h} = \sigma (\theta - \theta_{\text{env}}), \quad (2)$$

где σ — коэффициент теплообмена, θ_{env} — температура окружающей среды. В дальнейшем будем полагать, что температура окружающей среды совпадает с отсчётной $\theta_{\text{env}} = \theta_0$.

Для сокращения записи уравнений через θ будем обозначать превышение температуры над отсчётной (равновесной) температурой θ_0 , т. е. символ θ в последующем изложении следует понимать как разность $\theta - \theta_0$. Кроме того, определяющие постоянные Λ , Λ_* , κ будут считаться отнесенными к отсчётной температуре θ_0 .

Далее будет рассматриваться задача о распространении связанной гармонической термоупругой волны третьего типа в свободном цилиндрическом волноводе с теплопроницаемой стенкой в плане дальнейшего уточнения схем

локализации на комплексной плоскости волновых чисел указанного типа волн, необходимого в случае высоких азимутальных чисел n .

Поскольку предполагается, что боковая поверхность волновода свободна от нагрузок, то должны удовлетворяться граничные условия

$$\sigma_{rr}|_{r=R} = 0, \quad \sigma_{r\varphi}|_{r=R} = 0, \quad \sigma_{rz}|_{r=R} = 0,$$

где σ_{rr} , $\sigma_{r\varphi}$, σ_{rz} — физические компоненты тензора напряжений.

С окружающей средой через боковую стенку волновода может происходить конвективный теплообмен по линейному закону (2). Положив $\theta_{\text{env}} = \theta_0$, разделим уравнение (2) на θ_0 , затем разность $\theta - \theta_0$ обозначим, как было оговорено ранее, через θ и продифференцируем обе части полученного уравнения по времени. В результате приходим к условию

$$\left[\Lambda \frac{\partial \theta}{\partial r} + \Lambda_* \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial r} + \sigma \dot{\theta} \right]_{r=R} = 0,$$

где σ — коэффициент теплообмена, отнесенный к отсчётной температуре θ_0 .

2. Рассматриваемая граничная задача характеризуется достаточно большим числом определяющих постоянных и циклической частотой. В предшествующих публикациях [6–8] были введены следующие постоянные (Λ , Λ_* , κ считаются отнесенными к отсчётной температуре θ_0):

$$\begin{aligned} h_0^2 &= \frac{\Lambda_* c_l}{\Lambda R}; \\ h_1^2 &= 1 + h_2^2 + \frac{\alpha^2}{\rho \Lambda}; \\ h_2^2 &= \frac{c_l^2}{l^2}, \quad c_l^2 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad l^{-2} = \frac{\kappa}{\Lambda}; \\ h_3^2 &= \frac{\Lambda_* \omega}{\Lambda}; \\ h_4^2 &= \frac{\alpha^2 R}{\rho \Lambda_* c_l}; \\ h_5^2 &= h_6^2 k_{\parallel}; \\ h_6^2 &= \frac{\sigma c_l}{\Lambda}; \\ \tilde{k}_{\parallel} &= k_{\parallel} R, \quad k_{\parallel} = \frac{\omega}{c_l}. \end{aligned}$$

Не все перечисленные здесь постоянные независимы. Имеется всего пять независимых безразмерных материальных постоянных, не зависящих от частоты: h_0 , h_2 , h_4 , h_6 , c_l/c_t . Изменение частоты определяется варьированием ещё одного (шестого) безразмерного параметра \tilde{k}_{\parallel} .

Частотный детерминант D и частотное уравнение $D = 0$ для термоупругих волн типа III произвольного азимутального порядка n в волноводе с теплопроницаемой стенкой могут быть выписаны, следуя [6, 8]. Частотное уравнение подлежит решению относительно комплексного волнового числа k или его безразмерного аналога $\tilde{k} = kR$. Используемые в формулах для элементов

частотного детерминанта величины q_1, q_2, p_1, p_2, g имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} q_1^2 &= k^2 - k_{\parallel}^2; \\ q_2^2 &= k^2 - k_{\perp}^2, & k_{\perp} &= \frac{\omega}{c_t}; \\ p_j^2 &= k^2 - \gamma_j^2; \\ g^2 &= k^2 - \frac{\omega^2}{l^2}, \end{aligned}$$

где $\gamma_{1,2}^2$ — квадраты волновых чисел плоской связанной термоупругой волны третьего типа (GNIII) (см. [6, 7]):

$$2 \frac{\gamma^2}{k_{\parallel}^2} = \frac{ih_3^2 - h_1^2 + a_{1,2} + ib_{1,2}}{ih_3^2 - 1},$$

а $a_{1,2}$ и $b_{1,2}$, в свою очередь, вычисляются так:

$$\begin{aligned} a_{1,2} &= \pm \sqrt{\frac{h_1^4 - h_3^4 - 4h_2^2 + \sqrt{(h_1^4 - h_3^4 - 4h_2^2)^2 + 4h_3^4(2h_2^2 - h_1^2)^2}}{2}}, \\ b_{1,2} &= \frac{h_3^2(2h_2^2 - h_1^2)}{a_{1,2}} \end{aligned}$$

и в силу своего определения *многозначны*. Следовательно, оперирование с ними в системах символьных вычислений может сопровождаться непредсказуемыми эффектами и должно тщательно контролироваться.

3. Как было отмечено в предшествующих публикациях, при больших азимутальных числах n локализация корней частотного уравнения $D = 0$ на фоне чрезвычайно малых значений самого частотного детерминанта сопряжена с дополнительными трудностями. В настоящей работе использованы возможности пакета *Mathematica*, в котором решены две принципиально важные для высоких азимутальных чисел n задачи: выделение всех 32-х независимых однозначных ветвей многозначных квадратных радикалов, входящих в частотное уравнение; уточнение расчётных формул, связанных с вычислением волновых чисел, локализованных на некоторых участках вещественной оси.

На рис. 1–3 на комплексной плоскости представлены нулевые линии уровня вещественной и мнимой частей частотного детерминанта D в случае достаточно больших азимутальных чисел n , а именно $n = 70$, построенные при заданных значениях определяющих постоянных: $h_0 = 0,1, h_2 = 100,0, h_4 = 0,01, h_6 = 2, c_l/c_t = 1,9; \tilde{k}_{\parallel} = 0,1$. В выражениях для вещественных частей квадратных радикалов p_1, q_1, g выбраны отрицательные знаки.

Из рис. 1 видно, что при больших значениях азимутального числа n нулевые линии уровня вещественной и мнимой части величины D в области, близкой к началу координат на комплексной плоскости ($\text{Re } \tilde{k}, \text{Im } \tilde{k}$), не отображаются. Это обстоятельство обусловлено тем, что в указанной области, ограниченной «окружностью», величина D принимает очень малые значения, порядка 10^{-295} .

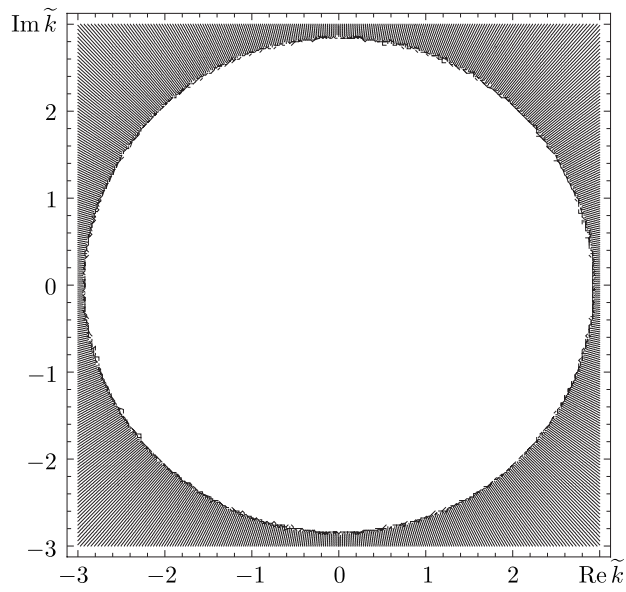


Рис. 1. Линии уровня $\text{Re } D(\text{Re } \tilde{k}, \text{Im } \tilde{k}) = 0$ и $\text{Im } D(\text{Re } \tilde{k}, \text{Im } \tilde{k}) = 0$ при заданных значениях определяющих постоянных (при построении использовано значение $\text{PlotPoints} = 150$)

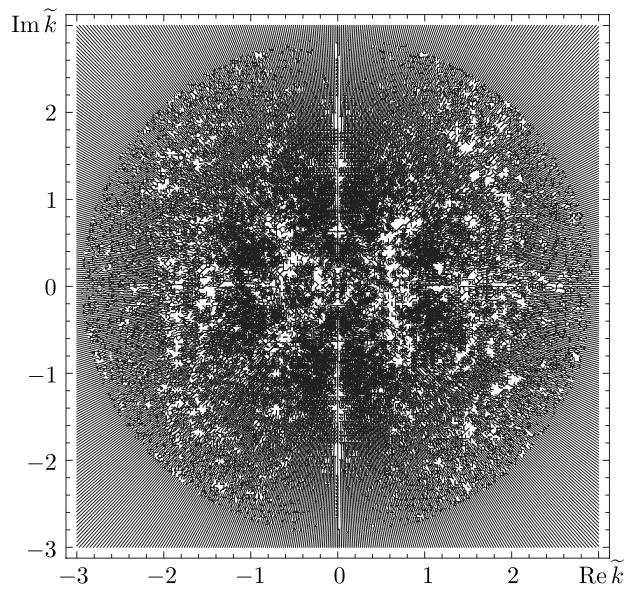


Рис. 2. Нулевые линии уровня $\text{Re } D(\text{Re } \tilde{k}, \text{Im } \tilde{k})$ и $\text{Im } D(\text{Re } \tilde{k}, \text{Im } \tilde{k})$ внутри «окружности» при заданных значениях определяющих постоянных (вычисления проводились с нормированным значением D , при построении использовано значение $\text{PlotPoints} = 150$)

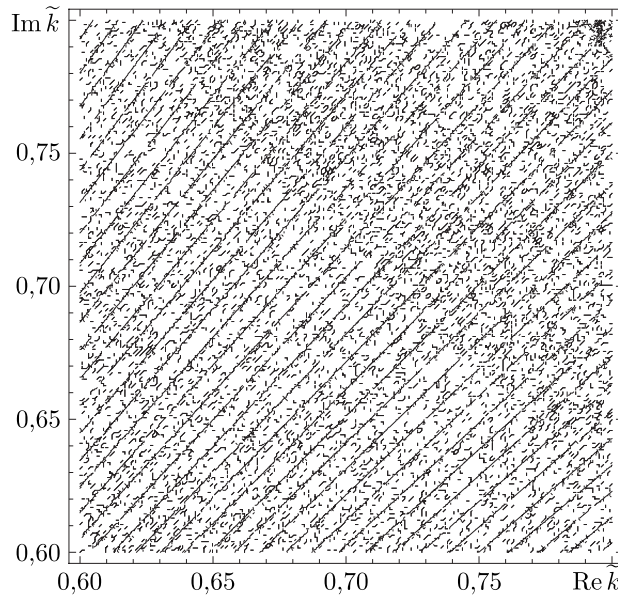


Рис. 3. Нулевые линии уровня $\text{Re } D(\text{Re } \tilde{k}, \text{Im } \tilde{k})$ и $\text{Im } D(\text{Re } \tilde{k}, \text{Im } \tilde{k})$ внутри «окружности» в заданном квадрате комплексной плоскости (наиболее детальное представление) при заданных значениях определяющих постоянных (вычисления проводились с нормированным значением D , при построении использовано значение $\text{PlotPoints} = 150$)

На рис. 2 представлены нулевые линии уровня вещественной и мнимой части величины D , построенные в той же области, что и на рис. 1. При построении изолиний, значения $\text{Re } D(\text{Re } \tilde{k}, \text{Im } \tilde{k})$ и $\text{Im } D(\text{Re } \tilde{k}, \text{Im } \tilde{k})$ нормировались множителем 10^{300} . Тем самым показано, что внутри «окружности» нулевые линии уровня на самом деле существуют и даже могут быть в определённом смысле выстроены численно.

Нулевые линии уровня вещественной и мнимой частей частотного детерминанта D внутри «окружности» в заданном квадрате наиболее детально изображены на рис. 3. Видно, что указанные линии достаточно «плотно» заполняют рассматриваемую область и характеризуются хаотической геометрией.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 10-01-00184-а).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Biot M. A. Thermoelasticity and irreversible thermodynamics // *J. Appl. Phys.*, 1956. Vol. 27, no. 3. Pp. 240–253.
2. Lord H., Shulman Y. A generalized dynamical theory of thermoelasticity // *J. Mech. Phys. Solids*, 1967. Vol. 15, no. 5. Pp. 299–309.
3. Green A. E., Lindsay K. A. Thermoelasticity // *J. Elasticity*, 1972. Vol. 2, no. 1. Pp. 1–7.
4. Green A. E., Naghdi P. M. On undamped heat waves in an elastic solid // *J. Thermal Stresses*, 1992. Vol. 15, no. 2. Pp. 253–264.
5. Green A. E., Naghdi P. M. Thermoelasticity without energy dissipation // *J. Elasticity*, 1993. Vol. 31, no. 3. Pp. 189–208.
6. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов:

- Изд-во Сарат. ун-та, 2010. 328 с. [Kovalev V. A., Radaev Yu. N. Wave problems of field theory and thermomechanics. Saratov: Izd-vo Saratov. un-ta, 2010. 328 pp.]
7. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Волновые числа плоских GNIII-термоупругих волн и неравенства, обеспечивающие их нормальность // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*, 2010. Т. 10, № 3. С. 46–53. [Kovalev V. A., Radaev Yu. N. On wavenumbers of plane harmonic type III thermoelastic waves // *Izv. Saratov. Univ. Mat. Mekh. Inform.*, 2010. Vol. 10, no. 3. Pp. 46–53].
 8. Радаев Ю. Н., Ревинский Р. А., Таранова М. В. Локализация волновых чисел связанной термоупругой волны в цилиндрическом волноводе с теплопроницаемой стенкой // *Вестн. ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2010. № 2(8). С. 588–595. [Radaev Yu. N., Revinsky R. A., Taranova M. V. Localization of wavenumbers of thermoelastic waves in a cylindrical waveguide under sidewall heat interchanging // *Vestn. CHGPU im I. Ya. Yakovleva. Ser. Mehanika predel'nogo sostoyaniya*, 2010. no. 2(8). Pp. 588–595].
 9. Cattaneo C. Sur une forme de l'équation de la chaleur éliminant le paradoxe d'une propagation instantanée // *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1958. Vol. 247. Pp. 431–433.
 10. Vernotte P. Les paradoxes de la théorie continue de l'équation de la chaleur // *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1958. Vol. 246. Pp. 3154–3155.

Поступила в редакцию 19/V/2011;
в окончательном варианте — 02/VI/2011.

MSC: 74F05

WAVENUMBERS OF TYPE III THERMOELASTIC WAVES IN A LONG WAVEGUIDE UNDER SIDEWALL HEAT INTERCHANGING

Yu. N. Radaev¹, M. V. Taranova²

¹ A. Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, 101, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russia.

² N. G. Chernyshevsky Saratov State University (National Research University), Faculty of Mathematics and Mechanics, 83, Astrakhanskaya st., Saratov, 410012, Russia.

E-mails: radaev@ipmnet.ru, y.radaev@gmail.com; taranova.mv@gmail.com

The paper presents a study of wavenumbers of coupled harmonic thermoelastic waves propagating via an infinite circular cylinder for higher azimuthal order. Heat interchanging between sidewall of the waveguide and environment is assumed. The analysis is carried in the frameworks of coupled generalized thermoelasticity theory of type III (GNIII-thermoelasticity). This theory synthesizes thermodiffusion and wave mechanisms of heat transfer in solids including as limiting cases both the theories: classical thermoelasticity (GNI/CTE) and the theory of hyperbolic thermoelasticity (GNII). The latter permits field-theoretic formulation and leads to the field equations of hyperbolic analytical type. The two principal problems: separation of 32 independent single-valued square radicals involved in the frequency equation and more accurate computation of the real-valued wavenumbers are resolved and discussed.

Key words: thermomechanics, type III thermoelasticity, cross-coupled wave, frequency equation, waveguide, heat interchanging, wavenumber.

Original article submitted 19/V/2011;
revision submitted 02/VI/2011.

Yuriy N. Radaev (Dr. Sc. (Phys. & Math.)), Leading Researcher, Lab. of Modeling in Solid Mechanics. Margarita V. Taranova, Postgraduate Student, Dept. of Mathematical Theory of Elasticity & Biomechanics.