Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2011. № 2 (23). С. 74–82

УДК 539.3

МНОГОТОЧЕЧНЫЕ МОМЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ СТРУКТУРНЫХ СВОЙСТВ ПОЛИДИСПЕРСНЫХ КОМПОЗИТОВ

М. А. Ташкинов

Пермский государственный технический университет,
614990, Пермь, Комсомольский проспект, 29а.

E-mail: m.tashkinov@mail.ru

Приведена постановка стохастической краевой задачи теории упругости для двухфазных полидисперсных композитов. Описан метод её решения с использованием моментных функций структурных свойств высших порядков. Представлен алгоритм построения моментных функций n-ного порядка для объёмных структур. Предложены аппроксимирующие зависимости для моментных функций. Приведены примеры вычисления моментных функций высших порядков для полидисперсных структур.

Ключевые слова: *композиты, моментные функции, стохастическая краевая задача, трехмерные модели, случайная полидисперсная структура, аппроксимация.*

Введение. Композиты широко применяются в инженерной практике благодаря уникальному сочетанию физико-механических свойств, возможности задания параметров материалов и предсказания его поведения. Разработка и внедрение таких материалов сопряжены с решением ряда задач, таких как выбор матрицы и наполнителя, учёт свойств каждого из компонентов для получения необходимых качеств материала, предсказание поведения материала под нагрузкой [1]. В механике композитов создано большое количество моделей. В отдельный класс можно выделить статистические модели, основанные на применении теории случайных функций. В большинстве их них для исследования структурных полей деформирования и расчета эффективных характеристик решается стохастическая краевая задача, уравнения и граничные условия которой содержат случайные величины. Наиболее широко используется дифференциальная постановка стохастической краевой задачи теории упругости [2], общая для большинства работ [3–6], когда коэффициенты дифференциального оператора являются случайными быстро осциллирующими кусочно-постоянными функциями координат (т. е. являются постоянными для каждого компонента и скачком меняют свои значения при переходе границы между компонентами) [7].

Один из способов решения стохастических краевых задач теории упругости связан с построением систем уравнений с использованием моментных функций структурных свойств, которые несут в себе информацию о геометрии структуры композитов. Получение таких моментных функций аналитическими и экспериментальными методами сопряжено с определенными трудностями. При аналитическом построении необходимо вводить гипотезы о характере взаимного расположения элементов структуры, нуждающиеся

Михаил Анатольевич Ташкинов, аспирант, каф. механики композиционных материалов и конструкций.

в достаточном обосновании. Снижение точности оценок с увеличением порядка моментных функций обуславливает необходимость большего объёма исходной информации о структуре при построении моментных функций и многомерных законов распределения на основе экспериментальных данных. В результате оба метода оказываются недостаточно эффективными. В то же время информация, получаемая лишь моментными функциями низших порядков, недостаточна для описания структуры композитов при решении краевых задач в высших многоточечных приближениях. В связи с этим возникает необходимость в построении многоточечных моментных функций высших порядков, а также в получении аналитических выражений для них в явном виде.

В данной работе рассматриваются методы решения стохастической краевой задачи теории упругости в высших приближениях с использованием многоточечных моментных функций высших порядков, а также способы построения и аппроксимации моментных функций для синтезированных моделей матричных полидисперсных композитов со случайным образом распределенными объёмными включениями.

1. Стохастическая краевая задача теории упругости. Для математического описания композитов используется структурно-феноменологический подход, который состоит в том, что однородные физико-механические свойства компонентов структуры задаются с помощью общепринятых в механике феноменологических уравнений и критериев, а характеристики структурных полей деформирования и эффективные свойства композита вычисляются из решений краевых задач. Наибольшее распространение получил способ решения, в котором исходное стохастическое уравнение преобразуется в интегро-дифференциальное методом функций Грина с использованием тензора Кельвина-Сомильяны [2], а затем полученное уравнение относительно пульсаций перемещений решается методом последовательных приближений. При решении краевой задачи принимаются следующие гипотезы: физические и геометрические величины, описывающие свойства композита, считаются статистически однородными и эргодическими случайными полями; матрица и включения — однородные, упругие и изотропные; адгезия между компонентами по границам раздела предполагается идеальной; воздействие массовых сил на компоненты композитов не учитывается; геометрия и взаимное расположение элементов структуры предполагаются заданными и неизменяющимися в процессе деформирования, а сама среда обладает свойством макроскопической однородности.

С учётом принятых гипотез краевая задача теории упругости для композитов со случайной структурой записывается следующим образом:

$$\partial\sigma_{ij}(\vec{r})/\partial x_j = 0, \quad \varepsilon_{ij}(\vec{r}) = 0{,}5\left(U_{i,j}(\vec{r}) + U_{j,i}(\vec{r})\right),$$

$$\sigma_{ij}(\vec{r}) = C_{ijkl}(\vec{r})\varepsilon_{kl}(\vec{r}), \tag{1}$$

$$U_i(\vec{r})|_{\vec{r}\in\Gamma_u} = e_{ij}r_j, \tag{2}$$

где e_{ij} — постоянный произвольно заданный симметричный тензор малых деформаций, $\vec{r}$ — радиус-вектор с компонентами $(x_1,\, x_2,\, x_3)$, граничные условия (2) заданы в перемещениях.

Геометрия структуры двухфазного композита определяется с помощью индикаторной функции

$$\lambda(\vec{r}) = \begin{cases} 1, & \vec{r} \in V_I, \\ 0, & \vec{r} \in V_M, \end{cases} \qquad (3)$$

где V_I — объём, занимаемый включениями; V_M — объём, занимаемый матрицей.

С помощью индикаторной функции поле структурных модулей упругости $C_{ijkl}(\vec{r})$ двухфазного композита записывается как

$$C_{ijkl}(\vec{r}) = \lambda(\vec{r})C^I_{ijkl} + (1 - \lambda(\vec{r}))C^M_{ijkl},$$

где C^I_{ijkl} и C^M_{ijkl} — заданные модули упругости включений и матрицы соответственно. После операции осреднения получаем

$$\langle C_{ijkl}(\vec{r})\rangle = pC^I_{ijkl} + (1 - p)C^M_{ijkl},$$

где $p = \langle\lambda(\vec{r})\rangle$ — объёмная доля включений. Предполагается, что индикаторная функция (3) обладает свойством эргодичности и статистической однородности, поэтому операцию математического осреднения можно проводить не по реализациям, а по объёму, т. е. для любых $\vec{r}$ и $\vec{r}_1$ имеем $\langle\lambda(\vec{r})\rangle = \langle\lambda(\vec{r}_1)\rangle$.

Введём величину пульсации индикаторной функции $\lambda'(\vec{r})$ как $\lambda'(\vec{r}) = \lambda(\vec{r}) - \langle\lambda(\vec{r})\rangle$ и запишем поля структурных модулей упругости и поля перемещений в виде суммы средней составляющей и пульсации:

$$C_{ijkl}(\vec{r}) = \langle C_{ijkl}(\vec{r})\rangle + C'_{ijkl}(\vec{r}), \quad U_m(\vec{r}) = \langle U_m(\vec{r})\rangle + U'_m(\vec{r}).$$

При помощи преобразований, подробно описанных в [8], краевая задача сводится к интегро-дифференциальному уравнению, содержащему функцию Грина:

$$\frac{\partial U'^{(\chi)}_i(\vec{r})}{\partial x_j} = \int_{V_1} \frac{\partial G_{im}(\vec{r}, \vec{r}_1)}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_{1n}} \Big(\left(\langle C_{mnkl}(\vec{r}_1)\rangle + C'_{mnkl}(\vec{r}_1)\right) e_{kl} + C_{mnkl}(\vec{r}_1) U'^{(\chi-1)}_{k,l}(\vec{r}_1)\Big) dV_1, \qquad (4)$$

где $G_{im}(\vec{r}, \vec{r}_1)$ — функция Грина, χ — приближение, в котором решается задача. В случае первого приближения $\chi = 1$, $U'^{(0)}_{k,l}(\vec{r}_1) = 0$. Поля напряжений и деформаций определяются через закон Гука (1) и перемещения (4):

$$\varepsilon'_{ij}(\vec{r}) = 0{,}5\left(U'_{i,j}(\vec{r}) + U'_{j,i}(\vec{r})\right), \qquad (5)$$

$$\sigma'_{ij}(\vec{r}) = \sigma_{ij}(\vec{r}) - \langle\sigma_{ij}(\vec{r})\rangle = C'_{ijmn}(\vec{r})e_{mn} - \langle C'_{ijmn}(\vec{r})\varepsilon'_{mn}(\vec{r})\rangle + C_{ijmn}(\vec{r})\varepsilon'_{mn}(\vec{r}). \qquad (6)$$

Статистические характеристики полей напряжений и деформаций представляют собой моменты первого и второго порядка тензоров (5) и (6). Безусловные моменты $M^{(\sigma)}_{ij\alpha\beta} = \langle\sigma'_{ij}(\vec{r})\sigma'_{\alpha\beta}(\vec{r})\rangle$, $M^{(\varepsilon)}_{ij\alpha\beta} = \langle\varepsilon'_{ij}(\vec{r})\varepsilon'_{\alpha\beta}(\vec{r})\rangle$ характеризуют композит как макрооднородный материал, в то время как условные моменты являются характеристиками полей деформирования в компонентах —

матрице $\langle \varepsilon_{ij}(\vec{r})\rangle_M$, $\langle \sigma_{ij}(\vec{r})\rangle_M$, $T^{(\sigma)}_{ij\alpha\beta} = \langle \sigma'_{ij}(\vec{r})\sigma'_{\alpha\beta}(\vec{r})\rangle_M$, $T^{(\varepsilon)}_{ij\alpha\beta} = \langle \varepsilon'_{ij}(\vec{r})\varepsilon'_{\alpha\beta}(\vec{r})\rangle_M$ или включениях (записываются аналогично).

2. Моментные функции структурных свойств. Идея рассматриваемого метода заключается в том, что безусловные и условные моменты второго порядка (дисперсии) можно выразить через смешанные моменты типа $\langle \lambda'(\vec{r}_1)\lambda'(\vec{r}_2)\times \times U'_{m,n}(\vec{r}_1)\rangle$, $\langle \lambda'(\vec{r}_1)\lambda'(\vec{r}_2)U'_{m,n}(\vec{r}_1)U'_{\nu,\mu}(\vec{r}_2)\rangle$, которые, в свою очередь, содержат константы и моментные функции высших порядков индикаторной функции $\lambda(\vec{r})$ (см. [8]). При решении краевой задачи во втором приближении требуются моментные функции вплоть до пятого порядка.

Запишем выражение для моментной функции n-ного порядка:

$$\begin{aligned}K(\vec{r},\vec{r}_1,\ldots,\vec{r}_n) &= \langle \lambda'(\vec{r})\lambda'(\vec{r}_1)\cdots\lambda'(\vec{r}_n)\rangle = \\ &= \langle (\lambda(\vec{r}) - \langle\lambda(\vec{r})\rangle)\,(\lambda(\vec{r}_1) - \langle\lambda(\vec{r}_1)\rangle)\cdots(\lambda(\vec{r}_n) - \langle\lambda(\vec{r}_n)\rangle)\rangle = \\ &= \langle (\lambda(\vec{r}) - p)(\lambda(\vec{r}_1) - p)\cdots(\lambda(\vec{r}_n) - p)\rangle. \end{aligned} \quad (7)$$

Так как $\lambda(\vec{r})$ — статистически однородная и изотропная функция и $\langle\lambda(\vec{r}_n)\rangle = p = \mathrm{const}$, моментные функции зависят только от расстояний между рассматриваемыми точками $|\vec{r}_m - \vec{r}_n|$, т. е. искомую моментную функцию второго порядка (корреляционную функцию) можно представить в виде

$$K^2_\lambda\left(|\vec{r} - \vec{r}_1|\right) = D^2_\lambda f^2_\lambda\left(|\vec{r} - \vec{r}_1|\right),$$

где $f^2_\lambda\left(|\vec{r} - \vec{r}_1|\right)$ — нормированная корреляционная функция, $D^2_\lambda = \langle(\lambda'(\vec{r}))^2\rangle = p(1-p)$ — центральный момент второго порядка (дисперсия). Такие же соотношения справедливы для моментных функций n-ного порядка:

$$K^n_\lambda\left(\vec{r},\, \vec{r}_1,\, \vec{r}_2,\, \ldots\right) = D^n_\lambda f^n_\lambda\left(\vec{r},\, \vec{r}_1,\, \vec{r}_2,\, \ldots\right),$$

где $D^n_\lambda = (1-p)^n p + (-p)^n(1-p)$.

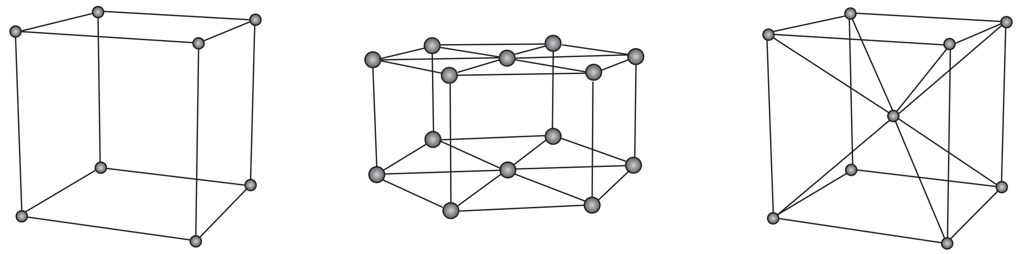
Порядок моментной функции и количество переменных, от которых она зависит, могут не совпадать. В таком случае моментные функции высших порядков могут быть выражены через моментные функции низших порядков:

$$\begin{gathered} K^3_\lambda\left(\vec{r},\, \vec{r},\, \vec{r}_1\right) = (1-2p)K^2_\lambda(\vec{r},\, \vec{r}_1), \qquad K^4_\lambda\left(\vec{r},\, \vec{r},\, \vec{r},\vec{r}_1\right) = (1-3D^2_\lambda)K^2_\lambda(\vec{r},\, \vec{r}_1), \\ K^4_\lambda\left(\vec{r},\, \vec{r},\, \vec{r}_1,\, \vec{r}_2\right) = (1-2p)K^3_\lambda(\vec{r},\, \vec{r}_1,\, \vec{r}_2) + D^2_\lambda K^2_\lambda(\vec{r}_1,\, \vec{r}_2), \\ K^5_\lambda\left(\vec{r},\, \vec{r},\, \vec{r}_1,\, \vec{r}_2,\, \vec{r}_3\right) = (1-2p)K^4_\lambda(\vec{r},\, \vec{r}_1,\, \vec{r}_2,\, \vec{r}_3) + D^2_\lambda K^3_\lambda(\vec{r}_1,\, \vec{r}_2,\, \vec{r}_3) + p^3 D^2_\lambda, \\ K^5_\lambda\left(\vec{r},\, \vec{r}_1,\, \vec{r}_1,\, \vec{r}_2,\, \vec{r}_2\right) = \left(1 - 4p + 4p^2\right) K^3_\lambda(\vec{r},\, \vec{r}_1,\, \vec{r}_2) + \\ + p\left(1 - 3p + 2p^2\right)\left[K^2_\lambda(\vec{r},\, \vec{r}_1) + K^2_\lambda(\vec{r},\, \vec{r}_2)\right]. \end{gathered}$$

Моментные функции строятся для синтезированных объёмных структур. Процедура синтеза реализована с использованием различных алгоритмов и позволяет управлять такими параметрами, как разброс диаметров сфер (включений), сторона куба (выделенного объёма), объёмная доля включений.

Значения моментной функции в зависимости от шага $|\vec{r}_m - \vec{r}_n|$ вычисляются с помощью следующей процедуры. Синтезированный фрагмент структуры разбивается сеткой с шагом $h = \omega d_{\min}$, где $d_{\min}$ — диаметр минимального включения. В узлах сетки проверяется наличие матрицы или включения, затем индикаторной функции (3) присваивается значение 0 или 1. Для получения значения моментной функции n-ного порядка (7) задаются расстояния $|\vec{r}_m - \vec{r}_n|$. Для всех пар узловых точек сетки, отстающих друг от друга на данные расстояния, вычисляются произведения $\lambda'(\vec{r})\lambda'(\vec{r}_1)\cdots\lambda'(\vec{r}_n)$ и делятся на количество таких пар узловых точек. Для вычисления следующего значения шаги пропорционально увеличиваются и процедура повторяется. При нулевом шаге точки радиус-векторов $\vec{r}$, $\vec{r}_1$, …, $\vec{r}_n$ совпадают, следовательно, $\langle\lambda'(\vec{r})\langle\lambda\rangle'(\vec{r}_1)\cdots\lambda'(\vec{r}_n)\rangle = \langle\lambda'(\vec{r})\lambda'(\vec{r})\cdots\lambda'(\vec{r})\rangle = D^n_\lambda$. Таким образом, при нулевом шаге нормированные моментные функции $f^n_\lambda(\vec{r}, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots)$ всегда принимают значение, равное единице.

В настоящей работе при вычислении значений моментных функций все расстояния между точками принимаются одинаковыми: $|\vec{r} - \vec{r}_1| = |\vec{r} - \vec{r}_2| = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = \ldots = |\vec{r}_m - \vec{r}_n|$. Для построения моментных функций второго и четвертого порядков используется кубическая сетка (рис. 1, *а*), для функций третьего порядка — гексагональная сетка (рис. 1, *б*), моментные функции пятого порядка строятся на кубической центрированной сетке (рис. 1, *в*). При расчетах расстояние между узлами сетки бралось равным радиусу наименьшего включения ($\omega = 0{,}5$).



а *б* *в*

Рис. 1. Схематическое изображение ячеек сеток, используемых при построении моментных функций

3. Аппроксимация моментных функций. Для использования моментных функций при нахождении статистических характеристик полей деформирования в компонентах композитов необходимо знать их аналитический вид. Для того чтобы точнее подобрать единую аппроксимирующую зависимость для моментных функций одинакового порядка, но построенных для разных структур, можно нормировать переменную $|\vec{r}_m - \vec{r}_n|$ на величину, отражающую свойства структуры. Это позволит «приблизить» кривые функций друг к другу. В данной работе для нормирования была использована величина осреднённого минимального расстояния между включениями d_{avg}, которая вычисляется путем осреднения расстояний от центра каждой сферы (включения) до центра ближайшей к ней сферы.

В качестве универсального выражений для аппроксимации нормированных моментных функций предлагается следующая зависимость:

$$f_\lambda^n\left(\vec{r},\vec{r}_1,\vec{r}_2,\ldots\right)=\exp\left(-\frac{c_1}{d_{avg}}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\left|\vec{r}_i-\vec{r}_j\right|\right)\times \times\cos\left(\frac{c_2}{d_{avg}^2}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\left|\vec{r}_i-\vec{r}_j\right|^2\right),\quad(8)$$

где n — порядок функции.

В настоящей работе использовались синтезированные структуры с параметрами, указанными в табл. 1. Радиусы включений (сфер) распределены по равномерному закону. Величины, характеризующие радиус и расстояние, указаны в безразмерных условных единицах.

Коэффициенты аппроксимирующего выражения вычисляются методом смешанных градиентов. На рис. 2 представлено сравнение графиков моментных функций, построенных на сетке для структуры № 2, с графиками аппроксимирующих выражений для этих функций. Коэффициенты выражения (8) можно найти в табл. 2.

Наибольшее отклонение графика аппроксимирующего выражения наблюдается при построении моментной функции 2-го порядка, но при это максимальная величина не превышает 0,05. Для моментных функций 3-го, 4-го и 5-го порядков максимальная величина отклонения составляет около 0,02, поэтому графики практически совпадают. Как видно, выражение (8) с достаточной точностью аппроксимирует моментные функции, а следовательно, может быть использовано для аналитических вычислений.

Графики нормированных многоточечных моментных функций второго, третьего и четвертого порядков для структур с параметрами, указанными в

Таблица 1

	Объёмная доля, p	Кол-во включений, N	Минимальный радиус включений	Максимальный радиус включений	Величина d_{avg}
Структура № 1	0,20	1047	4	12	18,9941
Структура № 2	0,25	1193	4	16	18,2389
Структура № 3	0,30	976	4	28	19,5464

Таблица 2

		Функция 2-го порядка	Функция 3-го порядка	Функция 4-го порядка	Функция 5-го порядка
Структура № 1	c_1	3,1762	4,1242	4,7187	4,9281
($p=0{,}20$)	c_2	3,2175	3,1281	3,8203	3,9610
Структура № 1	c_1	3,1128	3,8509	4,2839	4,5152
($p=0{,}25$)	c_2	2,4707	2,0138	2,5263	2,6647
Структура № 3	c_1	2,9704	3,5150	4,0205	4,2141
($p=0{,}30$)	c_2	1,8648	1,2450	1,5240	1,5690

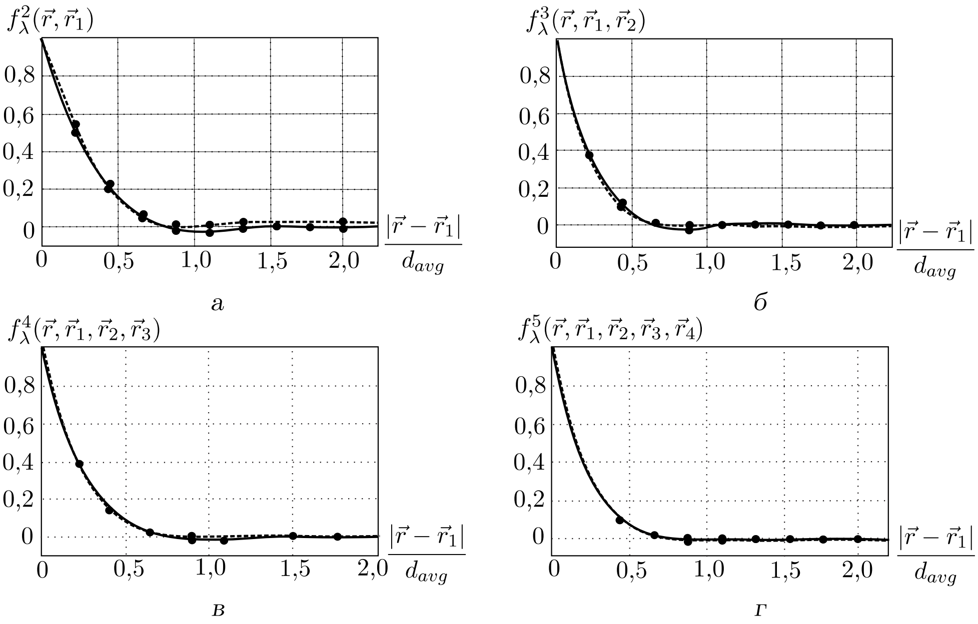


Рис. 2. Сравнение графиков моментных функций: сплошная линия — график моментной функции, построенной по сетке; штриховая линия — график аппроксимирующего выражения; *а*) моментная функция 2–го порядка, *б*) моментная функция 3–го порядка, *в*) моментная функция 4–го порядка, *г*) моментная функция 5–го порядка

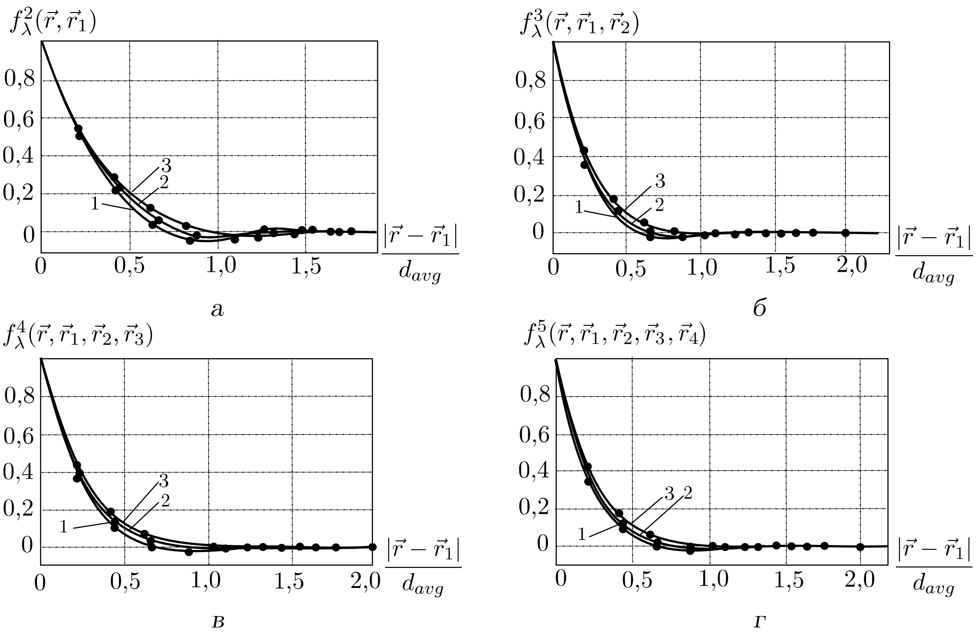


Рис. 3. Графики аппроксимирующих выражений многоточечных нормированных моментных функций для структур с различной объёмной долей: *а*) 2-го порядка, *б*) 3-го порядка, *в*) 4-го порядка, *г*) 5-го порядка; 1) $p = 0{,}2$, 2) $p = 0{,}25$, 3) $p = 0{,}3$

табл. 1, аппроксимированных выражением (8), представлены на рис. 3. Коэффициенты выражения (8) вынесены в табл. 2.

Выводы. На основании исследований моментных функций индикаторной функции $\lambda(\vec{r})$ можно сделать два важных вывода. Первый состоит в том, что моментные функции являются локальными. Область затухания моментных функций соответствует области статистической зависимости, т. е. области, в которой значения моментных функций отличны от нуля. Если моментные функции быстро затухают, то считается, что в расположении элементов структуры имеет место ближний порядок [5]. Это означает, что на формирование полей деформирования в некоторой области, содержащей произвольно выделенное включение, решающее влияние оказывают лишь ближайшие к нему включения из их произвольного большого множества. Второй вывод заключается в том, что моментные функции имеют область отрицательных значений, что свидетельствует о наличии периодических составляющих в этих случайных полях [9].

Таким образом, рассмотрен способ решения стохастической краевой задачи теории упругости с использованием моментных функций структурных свойств. Описан алгоритм построения моментных функций n-ного порядка на различных типах сетки. Приведено универсальное аналитическое выражение для аппроксимации моментных функций высших порядков. Для ряда полидисперсных структур получены графики и коэффициенты аппроксимирующего выражения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 11–01–96030–р_урал_а).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Buryachenko V. A.* Micromehcanics of heterogenous materials. New York: Springer-Verlag, 2007. 687 pp.
2. *Лифшиц И. М., Розенцвейг Л. Н.* К теории упругих свойств поликристаллов // *ЖЭТФ*, 1946. Т. 16, № 11. С. 967–980. [*Lifshits I. M., Rozentsveig L. N.* Theory of elastic properties of polycrystals // *ZhETF*, 1946. Vol. 16, no. 11. Pp. 967–980].
3. *Волков С. Д., Ставров В. П.* Статистическая механика композиционных материалов. Минск: БГУ, 1978. 206 с. [*Volkov S. D., Stavrov V. P.* Statistical mechanics of composite materials. Minsk: BGU, 1978. 206 pp.]
4. *Ломакин В. А.* Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. М.: Наука, 1970. 139 с. [*Lomakin V. A.* Statistical problems of the mechanics of solid deformable bodies. Moscow: Nauka, 1970. 139 pp.]
5. *Шермергор Т. Д.* Теория упругости микронеоднородных материалов. М.: Наука, 1977. 400 с. [*Shermergor T. D.* Theory of elasticity of microheterogeneous media. Moscow: Nauka, 1977. 400 pp.]
6. *Соколкин Ю. В., Ташкинов А. А.* Механика деформирования и разрушения структурно неоднородных тел. М.: Наука, 1984. 116 с. [*Sokolkin Yu. V., Tashkinov A. A.* Mechanics of deformation and dracture of structurally inhomogeneous bodies. Moscow: Nauka, 1984. 116 pp.]
7. *Паньков А. А.* Статистическая механика пьезокомпозитов. Пермь: ПГТУ, 2009. 480 с. [*Pankov A. A.* Statistical mechanics of piezocomposites. Perm: PGTU, 2009. 480 pp.]
8. *Ташкинов М. А., Вильдеман В. Э., Михайлова Н. В.* Метод последовательных приближений в стохастической краевой задаче теории упругости структурно-неоднородных сред // *Механика композиционных материалов и конструкций*, 2010. Т. 16, № 3. С. 369–383; англ. пер.: *Tashkinov M. A., Vil'deman V. E., Mikhailova N. V.* Method of

successive approximations in a stochastic boundary-value problem in the elasticity theory of structurally heterogeneous media // *Composites: Mechanics, Computations, Applications, An International Journal*, 2011. Vol. 2, no. 1. Pp. 21–37.

9. *Christensen R. M.* Mechanics of composite materials. New York: Willey-Interscience, 1979. 348 pp.; русск. пер.: *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов. М.: Мир, 1984. 336 с.

Поступила в редакцию 25/III/2011;
в окончательном варианте — 16/V/2011.

MSC: 74A40, 74B20

MULTIPOINT MOMENT FUNCTIONS OF STRUCTURAL PROPERTIES FOR POLYDISPERSE COMPOSITES

M. A. Tashkinov

Perm State Technical University,
29a, Komsomolskiy prospekt, Perm, Russia, 614990.

E-mail: m.tashkinov@mail.ru

The stochastic boundary-value problem of elasticity theory for two-phase polydisperse composites is stated. The solution method with using high order moment functions is described. Algorithm of synthesis of n-order moment functions for $3D$ structures is presented. Approximating expression for moment functions is suggested. Examples of calculation of high-order moment functions for polydisperse structures are given.

Key words: *composites, moment functions, random polydisperse structure, $3D$ models, boundary-value problem, approximation.*

Original article submitted 25/III/2011;
revision submitted 16/V/2011.

Mikhail A. Tashkinov, Postgraduate Student, Dept. of Mechanics of Composition Materials & Structures.