

Теоретическая и математическая физика

УДК 535.14

ПЕРЕПУТЫВАНИЕ В ДВУХАТОМНОЙ МОДЕЛИ С ВЫРОЖДЕННЫМИ РАМАНОВСКИМИ ПЕРЕХОДАМИ

Е. К. Башкиров, Е. Ю. Сочкова

Самарский государственный университет,
443011, Самара, ул. Академика Павлова, 1.

E-mails: bash@ssu.samara.ru, sochkovaelena@mail.ru

Исследованы особенности атом-полевого перепутывания в модели двух неидентичных атомов, взаимодействующих с модой когерентного электромагнитного поля в идеальном резонаторе посредством вырожденных двухфотонных рамановских переходов. Вычислены времена распутывания состояний атомов и поля как на основе анализа асимптотического поведения волновой функции системы, так и с помощью концепции линейной атомной энтропии.

Ключевые слова: атом-полевого перепутывание, два неидентичных атома, вырожденные двухфотонные рамановские переходы, линейная атомная энтропия.

Квантовые перепутанные состояния представляют собой фундаментальный ресурс современной квантовой информатики, квантовых телекоммуникаций и квантовых вычислений. В настоящее время атомы в резонаторах и ионы в магнитных ловушках Пауля рассматриваются в качестве одних из наиболее перспективных физических устройств, которые можно использовать в качестве логических элементов квантовых компьютеров [1]. С помощью лазерных импульсов для таких логических элементов реализуют перепутанные состояния. При этом для эффективного функционирования нужны максимально перепутанные чистые состояния с достаточно большим временем жизни. Долгоживущие чистые атом-атомные и атом-полевые перепутанные состояния наблюдались в ряде экспериментов с ионами и атомами в магнитных и оптических ловушках [1]. За счет взаимодействия с электромагнитным полем атом-атомные и атом-полевые перепутанные состояния оказываются нестабильными. Для стабилизации атомного перепутывания предлагается использовать взаимодействие атомов с окружением специального вида: сжатый вакуум, резонаторы низкой добротности, белый оптический шум, диполь-дипольное взаимодействие, внешнее классическое поле. Для частичной стабилизации атом-полевого перепутывания (уменьшения вероятности распутывания состояний атомов и поля) можно использовать определенные атомные состояния, а также неидентичные атомы и атомы с многофотонными переходами. Простейшей точно решаемой моделью, используемой для описания

Евгений Константинович Башкиров (д.ф.-м.н., профессор), профессор, каф. общей и теоретической физики. Елена Юрьевна Сочкова, магистрант, каф. общей и теоретической физики.

квантовой динамики системы атомов или ионов, взаимодействующих с квантовым электромагнитным полем, является точно решаемая двухатомная модель Тависа—Каммингса [2]. Модель Тависа—Каммингса представляет собой систему двух двухуровневых атомов, взаимодействующих с модой квантового поля в идеальном резонаторе. Такая модель реализована в последнее время на атомах и ионах в оптических и магнитных ловушках, квантовых точках, сверхпроводящих системах с джозефсоновскими переходами [1]. В настоящее время имеется огромное число теоретических работ, в которых исследованы динамика и статистика атомной и полевой подсистем в модели Тависа—Каммингса, в том числе особенности перепутывания атомов и поля. В ряде наших работ [3–5] исследована динамика атом-полевых перепутанных состояний в простейших обобщениях модели Тависа—Каммингса на случай многофотонных переходов в атомах. Нами рассмотрены двухатомные модели с вырожденными и невырожденными двухфотонными переходами, а также с невырожденными переходами рамановского типа. При этом было показано, что число времен, для которых наблюдается исчезновение квантовых корреляций между атомами и полем (распутывание их состояний), можно уменьшить, выбирая определенные начальные атомные состояния. В настоящей работе исследованы особенности атом-полевого перепутывания в модели двух неидентичных атомов с вырожденными двухфотонными рамановскими переходами.

Рассматриваемая модель представляет собой систему двух атомов, каждый из которых имеет два вырожденных состояния $|+\rangle$ и $|-\rangle$, взаимодействующих с модой когерентного квантового электромагнитного поля посредством вырожденных двухфотонных рамановских переходов. Гамильтониан такой модели есть [6]

$$H = \omega a^+ a + \hbar g_1 a^+ a (\sigma_1^+ + \sigma_1^-) + \hbar g_2 a^+ a (\sigma_2^+ + \sigma_2^-). \quad (1)$$

Здесь $a^+(a)$ — оператор рождения (уничтожения) фотона резонаторной моды, σ_i^+ — оператор, переводящий i -тый атом ($i = 1, 2$) из состояния $|-\rangle$ в состояние $|+\rangle$, σ_i^- — из состояния $|+\rangle$ в состояние $|-\rangle$, ω — частота резонаторного поля и g_i — константа взаимодействия i -того атома с электромагнитным полем.

В представлении взаимодействия временная волновая функция модели с гамильтонианом (1) может быть представлена в виде

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} F_n [A_n(t)|+, +\rangle + B_n(t)|+, -\rangle + C_n(t)|-, +\rangle + D_n(t)|-, -\rangle] |n\rangle. \quad (2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} A_n(t) &= C_1 \cos(\Omega_n t) + C_2 \sin(\Omega_n t) - C_3 \cos(\tilde{\Omega}_n t) - C_4 \sin(\tilde{\Omega}_n t), \\ B_n(t) &= -i \left[C_1 \sin(\Omega_n t) - C_2 \cos(\Omega_n t) + C_3 \sin(\tilde{\Omega}_n t) - C_4 \cos(\tilde{\Omega}_n t) \right], \\ C_n(t) &= -i \left[C_1 \sin(\Omega_n t) - C_2 \cos(\Omega_n t) - C_3 \sin(\tilde{\Omega}_n t) + C_4 \cos(\tilde{\Omega}_n t) \right], \\ D_n(t) &= C_1 \cos(\Omega_n t) + C_2 \sin(\Omega_n t) + C_3 \cos(\tilde{\Omega}_n t) + C_4 \sin(\tilde{\Omega}_n t), \end{aligned}$$

где $\Omega_n = n(1 + R)g_1$, $\tilde{\Omega}_n = n(1 - R)g_1$ — частоты Раби модели, $R = g_2/g_1$ и $F_n = \exp(-\bar{n}/2)\bar{n}^{n/2}/\sqrt{n!}$ ($\bar{n}$ — среднее число фотонов в резонаторной моде). Для определенности будем полагать, что $0 \leq R \leq 1$. Случай $R = 0$ соответствует одноатомной модели, а случай $R = 1$ — системе идентичных атомов. Константы C_1, C_2, C_3, C_4 определяются из начальных условий для атомной подсистемы.

Волновую функцию (2) можно использовать для вычисления наблюдаемых. В частности, вероятность обнаружить оба атома в возбужденном состоянии $|+, +\rangle$ определяется величиной $W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} |F_n|^2 |A_n(t)|^2$.

Периоды характерных восстановлений осцилляций Раби для вероятностей обнаружения атома в чистом состоянии в случае интенсивного резонаторного поля ($\bar{n} \gg 1$) можно оценить из соотношений

$$\begin{aligned} |2\Omega_{n+1} - 2\Omega_n|T_R^{(1)} &= 2\pi, & |2\tilde{\Omega}_{n+1} - 2\tilde{\Omega}_n|T_R^{(2)} &= 2\pi, \\ |\Omega_{n+1}^{(+)} - \Omega_n^{(+)}|T_R^{(3)} &= 2\pi, & |\Omega_{n+1}^{(-)} - \Omega_n^{(-)}|T_R^{(4)} &= 2\pi, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\Omega_n^{(+)} = \Omega_n + \tilde{\Omega}_n$ и $\Omega_n^{(-)} = \Omega_n - \tilde{\Omega}_n$. Из соотношений (3) получаем периоды четырех серий восстановления осцилляций Раби: $T_R^{(1)} = \pi/[(1 + R)g_1]$, $T_R^{(2)} = \pi/[(1 - R)g_1]$, $T_R^{(3)} = \pi/g_1$, $T_R^{(4)} = \pi/(Rg_1)$.

В частном случае идентичных атомов имеется две серии восстановлений осцилляций Раби с малым и большим периодами $T_R = \pi/(2g_1)$ и $\tilde{T}_R = \pi/g_1$. На рис. 1 представлены результаты численного моделирования вероятности $W(t)$ для модели с $\bar{n} = 10$ для $R = 1$ и $R = 0,5$ в случае, когда начальное состояние атомов есть $|+, +\rangle$. Как хорошо видно из рисунка, характерные времена восстановления осцилляций Раби для $W(t)$ полностью согласуются с полученными выше аналитическими выражениями, т. е. на графиках восстановления осцилляций Раби наблюдаются ровно на тех временах, которые получаются из (3) при подстановке в них значений $R = 0,5$ и $R = 1$.

Для того чтобы исследовать динамику перепутывания состояний атомов и поля в случае интенсивного когерентного резонаторного поля $\bar{n} \gg 1$, рассмотрим, следуя работам [3–5], полуклассический гамильтониан взаимодействия атомов и поля:

$$H_{SC} = \hbar g_1 \bar{n} (\sigma_1^+ + \sigma_1^-) + \hbar g_2 \bar{n} (\sigma_2^+ + \sigma_2^-). \quad (4)$$

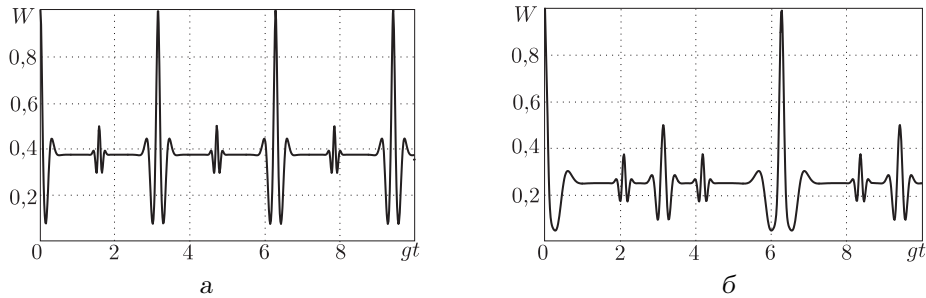


Рис. 1. Временная зависимость $W(t)$ для модели с $\bar{n} = 10$ для $R = 1$ (а) и $R = 0,5$ (б)

Собственные состояния и собственные значения E полуклассического гамильтониана взаимодействия (4) есть

$$|\Phi_i\rangle = C'_i \left[|+, +\rangle + \frac{2\lambda_i}{\lambda_i^2 + R - 1} |+, -\rangle + \right. \\ \left. + \frac{\lambda_i(\lambda_i^2 - R - 1)}{\lambda_i^2 + R - 1} |-, +\rangle + \frac{R(\lambda_i^2 - R + 1)}{\lambda_i^2 + R - 1} |-, -\rangle \right], \\ E_i = \lambda_i \bar{n} g_1, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

где $\lambda_1 = +(1 + R)$, $\lambda_2 = -(1 + R)$, $\lambda_3 = +(1 - R)$, $\lambda_4 = -(1 - R)$. Константы C'_1, C'_2, C'_3, C'_4 определяются из условия нормировки.

В случае идентичных атомов $R = 1$ собственные функции и собственные значения принимают вид

$$|\Phi_1\rangle = (1/\sqrt{4}) [|+, +\rangle + |+, -\rangle + |-, +\rangle + |-, -\rangle], \quad E_1 = 2\bar{n}g_1; \\ |\Phi_2\rangle = (1/\sqrt{4}) [|+, +\rangle - |+, -\rangle - |-, +\rangle + |-, -\rangle], \quad E_2 = -2\bar{n}g_1; \\ |\Phi_3\rangle = (1/\sqrt{2}) [|+, +\rangle - |-, -\rangle], \quad E_3 = 0; \\ |\Phi_4\rangle = (1/\sqrt{2}) [|+, -\rangle - |-, +\rangle], \quad E_4 = 0.$$

Рассмотрим теперь эволюцию атом-полевой системы при условии, что атомы приготовлены в одном из собственных состояний полуклассического гамильтониана, а поле находится в когерентном состоянии с большой интенсивностью ($\bar{n} \gg 1$). При проведении аналитических оценок для времен распутывания ограничимся рассмотрением случая идентичных атомов. В этом случае асимптотическое поведение временных волновых функций определяется выражениями

$$|\Phi_1\rangle|\alpha\rangle \rightarrow \sum_n e^{-i2ng_1t} |\Phi_1\rangle|n\rangle, \quad |\Phi_2\rangle|\alpha\rangle \rightarrow \sum_n e^{+i2ng_1t} |\Phi_2\rangle|\alpha\rangle, \quad (5)$$

$$|\Phi_3\rangle|\alpha\rangle \rightarrow |\Phi_3\rangle|\alpha\rangle, \quad |\Phi_4\rangle|\alpha\rangle \rightarrow |\Phi_4\rangle|\alpha\rangle, \quad (6)$$

где $|\alpha\rangle = \sum_n F_n |n\rangle$ — когерентное состояние поля. Из формул (6) видно, что если атомы приготовлены в состояниях $|\Phi_3\rangle$ или $|\Phi_4\rangle$, то атомы и поле распутаны в любой последующий момент времени. Соответственно, формулы (5) показывают, что если атомы приготовлены в состояниях $|\Phi_1\rangle$ или $|\Phi_2\rangle$, то состояния атомов и поля распутываются в моменты времени t_d , определяемые соотношениями $|2(n+1)g_1 - 2ng_1|t_d = 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Отсюда получаем, что $t_d = (\pi/g_1)k = \tilde{T}_R k$. Если же атомы приготовлены в симметричной $|\Phi\rangle_S$ или антисимметричной $|\Phi\rangle_A$ суперпозиции собственных функций полуклассического гамильтониана

$$|\Phi\rangle_S = (1/\sqrt{2})(|\Phi_1\rangle + |\Phi_2\rangle) = (1/\sqrt{2})(|+, +\rangle + |-, -\rangle), \\ |\Phi\rangle_A = (1/\sqrt{2})(|\Phi_1\rangle - |\Phi_2\rangle) = (1/\sqrt{2})(|+, -\rangle + |-, +\rangle),$$

распутывание состояний атома и поля будет наблюдаться на временах в два раза меньших предыдущего случая, т. е. на временах, кратных малому периоду восстановления осцилляций Раби $\tilde{T}_R$, так как в этом случае

$$|\Phi\rangle_{A(S)}|\alpha\rangle \rightarrow \sum_n e^{-i2ng_1t}(|\Phi_1\rangle \pm e^{i4ng_1t}|\Phi_2\rangle)|n\rangle.$$

Для всех остальных начальных атомных состояний времена распутывания кратны большому периоду восстановления осцилляций Раби T_R .

Анализ временного поведения полной волновой функции системы «атомы + поле» может быть дополнен расчётом линейной атомной энтропии. Известно, что для подсистем, приготовленных в начальный момент времени в чистых состояниях, линейная атомная энтропия может выступать в качестве критерия перепутанности [1]. Линейную атомную энтропию можно ввести как $S(t) = \text{Tr}_{\text{at}} \rho_{\text{at}}^2(t)$, где $\rho_{\text{at}}(t) = \text{Tr}_{\text{Field}} |\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|$ — редуцированная атомная матрица плотности и $|\Psi(t)\rangle$ — временная волновая функция системы. Значению линейной атомной энтропии $S = 1$ соответствует полностью расцепленное состояние атомов и поля, а значению $S = 1/4$ — максимальная степень перепутывания.

На рис. 2 представлены результаты численного моделирования линейной атомной энтропии для модели идентичных атомов с начальными состояниями атомов вида $|\Phi\rangle_S$ (или $|\Phi\rangle_A$) и $|+, +\rangle$. На рис. 3 показано поведение той же величины для модели с неидентичными атомами в случае начального состояния атомов вида $|+, +\rangle$ при $R = 0,5$ и $R = 0,7$. Среднее число фотонов в моде в обоих случаях $\bar{n} = 10$. Поведение энтропии, представленное на рис. 2, полностью согласуется с тем, что было предсказано выше при анализе асимптотического поведения полной волновой функции. Наиболее интересным представляется поведение энтропии для системы неидентичных атомов, представленное на рис. 3. Хорошо видно, что при определенных значениях отношения констант взаимодействия атомов с полем $R = g_2/g_1$ для любых времен наблюдения не происходит распутывания состояний атома и поля. Заметим, что в условиях эксперимента параметром R легко управлять, меняя взаимное расположение атомов в резонаторе.

Таким образом, в настоящей работе проведён детальный анализ особенностей атом-полевого перепутывания в модели двух неидентичных атомов

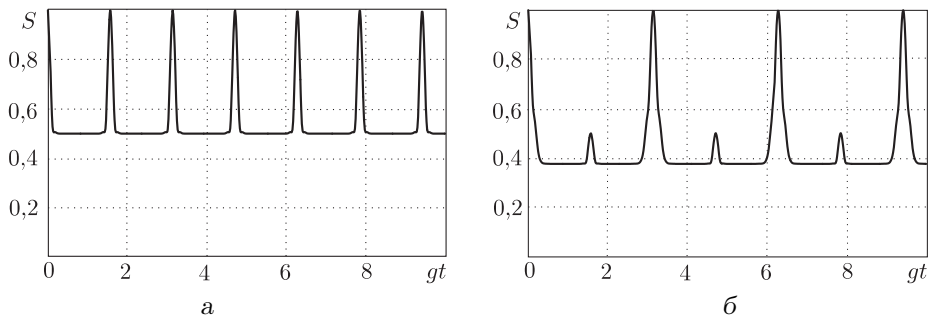


Рис. 2. Временная зависимость атомной энтропии $S(t)$ для идентичных атомов, приготовленных в состояниях $|\Phi\rangle_S$ (или $|\Phi\rangle_A$) (а) и $|+, +\rangle$ (б)

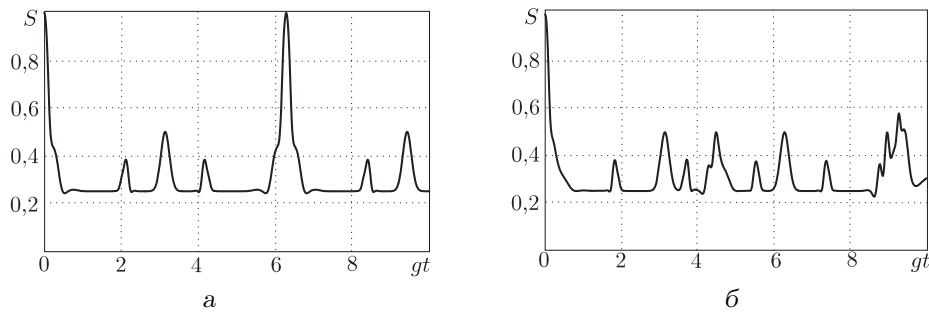


Рис. 3. Временная зависимость атомной энтропии $S(t)$ для неидентичных атомов, приготовленных в состоянии $|+, +\rangle$ при $R = 0,5$ (а) и $R = 0,7$ (б)

с вырожденными двухфотонными рамановскими переходами. При этом показано, что в случае идентичных атомов возможна частичная стабилизация атом-полевого перепутывания (уменьшение числа времен распутывания) за счет выбора определенных начальных состояний атомов. В случае неидентичных атомов за счет такого выбора возможно полное исключение эффекта распутывания состояний атомной и полевой подсистем или, как часто говорят, исключение возможности «мгновенной смерти» перепутывания.

Работа выполнена в рамках Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы по лоту 2010–1.1–122–084: «Проведение научных исследований коллективами научно-образовательных центров в области оптики, лазерной физики и лазерных технологий» (госконтракт № 14.740.11.0063).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Schumacker D., Westmoreland M. D.* Quantum processes, systems, and information. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. 469 pp.
2. *Scully M. O., Zubairy M. S.* Quantum optics. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. 630 pp.; русск. пер.: *Скалли М. О., Зубайри М. С.* Квантовая оптика. М.: Физматлит, 2003. 512 с.
3. *Bashkirov E. K., Rusakova M. S.* Atom-field entanglement in two-atom Jaynes–Cummings model with nondegenerate two-photon transitions // *Opt. Commun.*, 2008. Т. 281, № 17. С. 4380–4386.
4. *Bashkirov E. K.* Entanglement in degenerate two-photon Tavis–Cummings model // *Phys. Scr.*, 2010. Т. 82, № 1, 015401.
5. *Русакова М. С., Башкиров Е. К., Сочкова Е. Ю.* Динамика атом-полевого перепутывания в вырожденной двухфотонной модели Тависа–Каммингса с учётом штарковского сдвига уровней // *Вестн. Сам. гос. ун-та. Естественнаучн. серия*, 2010. № 6(80). С. 153–160. [*Rusakova M. S., Bashkirov E. K., Sochkova E. Yu.* Dynamics of atom-field entanglement in a degenerate two-photon Tavis–Cummings model taking into account the Stark shift of levels // *Vestn. Sam. Gos. Un-ta. Estestvennonauchn. Ser.*, 2010. no. 6(80). Pp. 153–160].
6. *Song T., Feng J., Wang W., Xu J.* Effects of the relative coupling constants on the dynamics properties of a two-atom system // *Phys. Rev. A*, 1995. Vol. 51, no. 3. Pp. 2648–2650.

Поступила в редакцию 25/ХІІ/2010;
в окончательном варианте — 06/04/2011.

MSC: 81V80, 94A17

ENTANGLEMENT IN TWO-ATOM MODEL WITH DEGENERATE RAMAN TRANSITIONS

E. K. Bashkirov, E. Yu. Sochkova

Samara State University,
1, Academician Pavlov st., Samara, 443011, Russia.

E-mails: bash@ssu.samara.ru, sochkovaelena@mail.ru

The peculiarities of atom-field entanglement in the model of two nonidentical atoms interacting with one-mode coherent electromagnetic field in lossless cavity via degenerate two-photon Raman transitions have been investigated. The times of atoms and field states disentanglement have been calculated on the basis of time-dependent wave function behavior and the linear atomic entropy concept.

Key words: *atom-field entanglement, two nonidentical atoms, degenerate two-photon Raman transitions, linear atomic entropy.*

Original article submitted 25/XII/2010;
revision submitted 06/04/2011.

Eugene K. Bashkirov (Dr. Sci. (Phys. & Math.)), Professor, Dept. of General & Theoretical Physics. *Elena Yu. Sochkova*, Master Student, Dept. of General & Theoretical Physics.