УДК 519.86

ИЕРАРХИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФИНАНСОВЫХ КРАХОВ ДЖОХАНСЕНА—СОРНЕТТА И ЕЁ УЛЬТРАМЕТРИЧЕСКОЕ ОБОБЩЕНИЕ

А. С. Пивоварова, А. А. Стеряков

Самарский государственный аэрокосмический университет им. ак. С. П. Королёва
(национальный исследовательский университет),
443086, Самара, Московское ш., 34.

E-mails: a-pivovarova@mail.ru, lubopitnij@mail.ru

Рассматривается иерархическая модель, предложенная Джохансеном и Сорнеттом, описывающая механизм возникновения логопериодических колебаний, предшествующих финансовым крахам, и проводится её численный анализ. Предлагаются обобщения данной модели на основе введения зависимости степени влияния агентов друг на друга от ультраметрического расстояния между ними. Наибольшее внимание уделяется вопросу об универсальности критической точки, который исследуется с помощью построения распределений точек краха при различном числе агентов.

Ключевые слова: *математическое моделирование, логопериодические колебания и степенной рост, ультраметрическое расстояние, p-иерархические структуры, финансовые крахи.*

Введение. При изучении поведения различных систем перед катастрофами было выяснено, что катастрофическим событиям предшествуют не только возрастание соответствующих физических величин, но и ускорение колебаний, происходящих в системе. В частности, колебания с увеличивающимися периодом и амплитудой наблюдаются на финансовых рынках вблизи точек краха, а также в химическом составе подземных вод перед землетрясением [1]. Было выяснено, что такие колебания хорошо аппроксимируются гармониками логопериодических колебаний [1–4]. Отсюда возникает задача построения математических моделей систем, обладающих свойством дискретной масштабной инвариантности, в которых реализуются режимы с обострением. В данной работе исследуются подобные модели на примере модели возникновения краха на иерархически организованном финансовом рынке.

В [2] Джохансеном и Сорнеттом был предложен подход к моделированию предкрахового поведения цен, основанный на предположении об иерархической организации агентов на рынке. В начальный момент времени каждый агент проводит свой независимый фундаментальный анализ, в результате которого выбирает своё время для покупки акций. Однако агент понимает, что его анализ может быть неполным или необъективным, и поэтому он старается узнать больше о действиях других ближайших агентов. При этом агент не проводит никакого технического анализа, т. е. цена не несёт для него никакой информации. Другое важное упрощение состоит в том, что на рынке существует некоторый постоянный уровень предложения и все рассматриваемые агенты заинтересованы только в покупке акций. Тогда задача сводится к определению количества активных покупателей среди всех агентов-

Анна Сергеевна Пивоварова, аспирант, каф. физики. *Александр Александрович Стеряков*, аспирант, каф. физики.

покупателей. Иерархическая структура агентов во многом отражает реальную иерархическую организацию фондового рынка. Такая организация может быть как постоянным свойством рынка, так и спонтанно возникшим [5, 6]. Примером постоянной может быть следующая организационная иерархия: на нижнем уровне иерархии находятся индивидуальные трейдеры, они объединяются в фирмы и банки, представляющие собой агентов следующего уровня, выше по иерархии располагаются города, страны и т. д. Важным следствием иерархической организации является то, что действия агента влияют только на ограниченное число соседних агентов, а именно на находящихся на том же уровне иерархии и ниже. В результате каскадного эффекта решение агентов на нижнем уровне, в свою очередь, влияет на более высокие уровни.

1. Модель Джохансена—Сорнетта. В модели Джохансена и Сорнетта индивидуальные трейдеры (агенты нулевого уровня) объединяются в группы по m агентов (агенты первого уровня), далее такие группы также объединяются в группы по m агентов, формируя агентов второго уровня и т. д. В результате получается иерархическая организация, в которой агенты порядка n состоят из m^n индивидуальных трейдеров. Для простоты можно положить $m = 2$.

Предполагается, что каждый агент i обладает предпочтительным временем t_i для покупки акций и все такие времена t_i имеют функцию распределения Пуассона: $P(t) = 1 - \exp(-\lambda t)$.

Один из способов описания взаимодействия агентов состоит в учёте неуверенности агентов в своём собственном решении. При этом информация о том, что некоторый агент уже совершил покупку, является для ещё не вступивших в торговлю агентов поводом пересмотреть принятое ранее решение о времени покупки.

Влияние агента i в момент времени t_i на агента j состоит в изменении времени совершения покупки:

$$t_{ij} = t_i + 2^{-\beta}(t_j - t_i),$$

где $\beta \geqslant 0$ — коэффициент влияния. Поскольку $2^{-\beta} \leqslant 1$, новое время действия удовлетворяет условию $t_i \leqslant t_{ij} \leqslant t_j$, а функция распределения времени действия для агента j принимает вид

$$\tilde{P}(t) = P\big(t_i + 2^{\beta}(t - t_i)\big) = 1 - \exp\Big(-\lambda\big(t_i + 2^{\beta}(t - t_i)\big)\Big).$$

Тогда соответствующая плотность распределения запишется как

$$\tilde{p}(t) = 2^{\beta} p\big(t_i + 2^{\beta}(t - t_i)\big). \tag{1}$$

Для простоты вычислений положим данное влияние однородным в том смысле, что все агенты на всех уровнях имеют одинаковое β.

Рассмотренный механизм, в сущности, является некоторым правилом подражания. Введение такой положительной обратной связи позволяет смоделировать сильно нелинейное (пороговое) поведение агентов. Ввиду ограниченного доступа к информации влиять друг на друга могут только агенты, находящиеся на одном уровне иерархии внутри одного кластера. При этом считается, что агент более высокого уровня иерархии совершил покупку, если совершили покупку все его дочерние элементы.

Для случая двоичного дерева можно записать выражение для $p_N(t)$ — плотности вероятности совершения покупки агентом уровня N в некоторый момент времени. Тогда $p_N(t)dt$ — вероятность того, что агент уровня N сработает на рынке в интервале времени $(t, t+dt)$. Это событие равносильно одновременному выполнению двух независимых событий: срабатыванию одного из дочерних агентов уровня $N-1$ в интервале времени (t_1, t_1+dt_1) и последующему срабатыванию второго в интервале $(t, t+dt)$. Соответствующие вероятности этих двух событий: $p_{N-1}(t_1)dt_1$ и $\tilde{p}_{N-1}(t)dt$, где $\tilde{p}_{N-1}(t)$ — плотность вероятности срабатывания второго агента при условии, что сработал первый. Из уравнения (1) имеем

$$\tilde{p}_{N-1}(t) = \frac{1}{2^{-\beta}} p_{N-1}\Big(\frac{t-(1-2^{-\beta})t_1}{2^{-\beta}}\Big).$$

Учитывая все возможные значения времени $t_1 \in (0, t)$, окончательно получим

$$p_N(t) = 2\int_0^t p_{N-1}(t_1)\tilde{p}_{N-1}(t)dt_1 = \\ = \frac{2}{2^{-\beta}}\int_0^t p_{N-1}(t_1)p_{N-1}\Big(\frac{t-(1-2^{-\beta})t_1}{2^{-\beta}}\Big)dt_1. \quad (2)$$

Коэффициент 2 учитывает, что любой из двух агентов уровня $N-1$ может совершить покупку первым.

В рамках предложенной модели можно дать определение краха. В пределе бесконечного числа агентов (т. е. бесконечного числа уровней иерархии) наличие краха в некоторый момент времени t_c означает, что при $t < t_c$ число активных покупателей остаётся относительно небольшим. Со временем это число постепенно увеличивается, и к моменту времени t_c происходит насыщение рынка. Математически критическая точка, определённая как срабатывание всех агентов на рынке, означает, что при увеличении N $p_N(t)$ стремится к δ-функции: $p_N(t) \to p_\infty(t) \equiv \delta(t-t_c)$, $N \to \infty$. Таким образом, рассматривая данное выше определение краха, мы можем получить плотность вероятности возникновения краха в данной иерархической структуре, применяя выражение (2) N раз начиная с $p_0(t)$.

В случае $\beta = 1$ можно получить точное выражение для критической точки. Итерируя начальное распределение $p_0(t) = \lambda\exp(-\lambda t)$ по формуле (2), получим рекуррентное соотношение для плотности вероятности совершения покупки агентом уровня N:

$$p_N(t) = C_N t^{2^N-1}\lambda^{2^N}\exp(-2^N\lambda t). \quad (3)$$

Очевидно, что распределение (3) стремится к δ-функции. Максимум этих распределений есть

$$t_c = \frac{2^N-1}{2^N\lambda} \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{1}{\lambda}.$$

Полученное время краха в пределе бесконечного числа агентов является математическим ожиданием начального распределения времен действия, т. е. просто средним временем действия всех агентов.

При $\beta \neq 1$ аналитическую формулу для t_c получить затруднительно. При численном исследовании данной модели строилась зависимость количества агентов, выставивших заявки на покупку от времени, т. е. фактически спроса от времени (см. рис. 1). Видно, что при приближении к критической точке на разных временных масштабах наблюдаются логопериодические колебания, наложенные на степенную зависимость.

Таким образом, можно сделать вывод, что логопериодические колебания и степенной рост цен перед обвалами является следствием дискретной иерархической структуры фондовых рынков и наличия на них положительной обратной связи.

При $N \to \infty$ время краха t_c в системе одно и то же при любой начальной реализации распределения времен действий агентов. При численном анализе системы количество агентов всегда ограниченно, поэтому время краха t_c будет различным для различных начальных реализаций. Однако при увеличении числа агентов разброс таких значений должен уменьшаться, т. е. плотность распределения времен краха t_c^j должна стремиться к δ-функции. Для подтверждения этого факта были построены графики функций плотности распределения времен крахов для систем с различным числом агентов (рис. 2). Для построения каждой функции рассматривалось несколько сотен

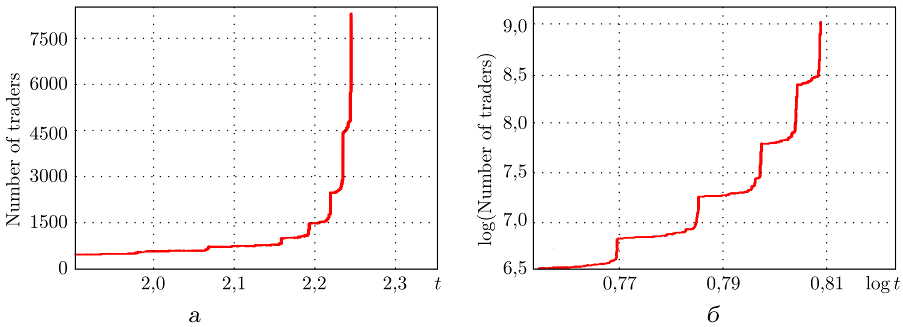

Рис. 1. Количество агентов, выставивших заявку на покупку акций к моменту времени t в обычном (*а*) и логарифмическом (*б*) масштабах при следующих параметрах системы: $n = 13$ ($N = 8192$), $\lambda = 0{,}01$, $\beta = 5$

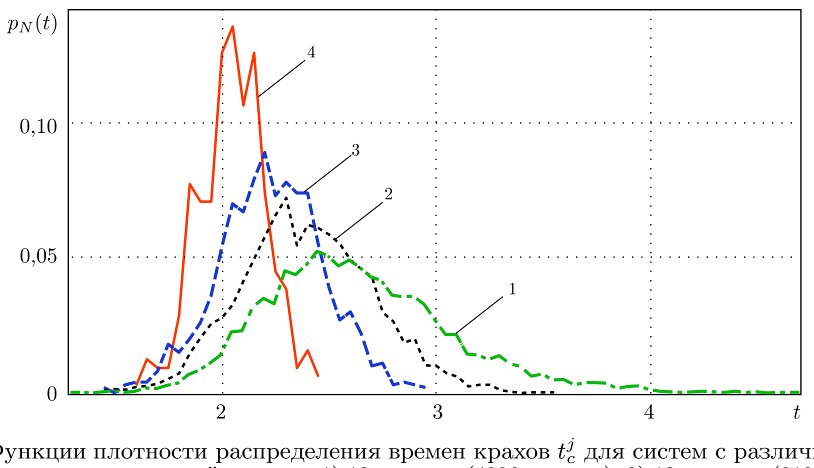

Рис. 2. Функции плотности распределения времен крахов t_c^j для систем с различным числом агентов в иерархической модели: 1) 12 уровней (4096 агентов); 2) 13 уровней (8192 агента); 3) 14 уровней (16 384 агента); 4) 16 уровней (65 536 агентов)

реализаций системы (от 2 до 50), и полученный интервал значений t_c^j разбивался на промежутки с шагом 0,05.

Из рис. 2 видно, что распределение точек краха действительно сужается с увеличением числа агентов, однако данное сужение происходит довольно медленно.

2. Ультраметрическое обобщение модели. Одним из недостатков вышеприведённой модели является то, что агенты являются однородными по взаимодействию друг с другом. Такое упрощение не вполне оправдано, поскольку введение иерархической структуры агентов в модели означает наличие ограниченности доступа одного агента к другому. Поэтому целесообразно рассмотреть зависимость степени влияния агентов друг на друга от некоторого расстояния между ними, введённого на данной иерархической структуре.

Расстояние между двумя агентами i и j определим в виде $d_{ij} = m^{n_{ij}}$, где m — арность дерева, n_{ij} — количество уровней дерева до первого общего предка от элементов i и j. Данная метрика является ультраметрикой, т. е. $d_{ik} \leqslant \max(d_{ij}, d_{jk})$. Здесь, в отличие от предыдущей модели предполагается, что агенты влияют друг на друга неодинаково, их влияние уменьшается с расстоянием. Пусть t_i и t_j — исходные времена действия агентов i и j соответственно, причём $t_i < t_j$. Пусть в момент времени t_i сработает агент i и данная информация поступит к агенту j. Тогда его время действия уменьшится до t_{ij}:

$$t_{ij} = t_j - (d_{ij})^{-\beta}(t_j - t_i).$$

В результате численных экспериментов было обнаружено, что в некоторой области параметров модели её решения представляют собой самоподобные нелинейные колебания, наложенные на возрастающий тренд. Плотность распределения точек краха также стремится к δ-функции. Сравнение распределений для исходной иерархической модели и её ультраметрического обобщения приведены на рис. 3.

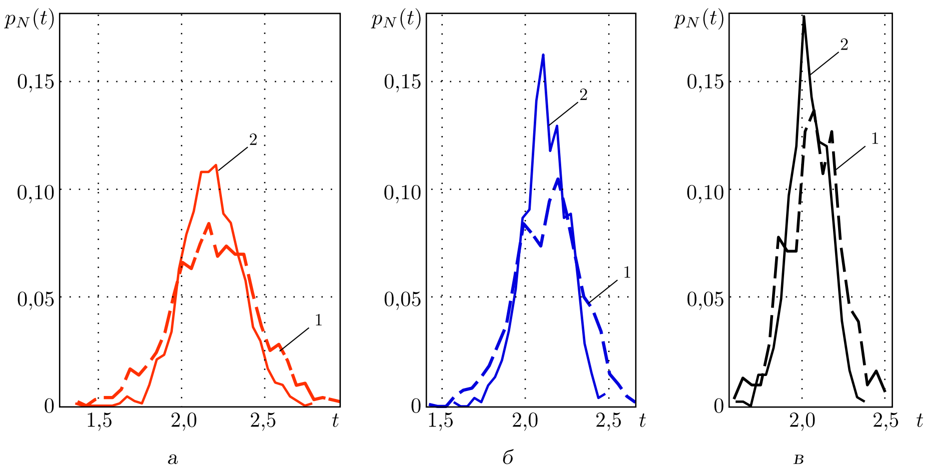

Рис. 3. Сравнение функций плотности распределения времен крахов t_c^j в двух моделях (1 — иерахическая модель, 2 — ультраметрическое обобщение) при различном числе агентов: *а*) 14 уровней (16 384 агента); *б*) 15 уровней (32 768 агентов) *в*) 16 уровней (65 536 агентов)

3. Ультраметрическая модель без порогового влияния. Следует отметить, что случай влияния сработавшего кластера лишь на соседний кластер является довольно грубым приближением реальных процессов распространения информации на рынке, поскольку влияние агентов друг на друга сильно неоднородно и зависит от взаимного расположения агентов внутри иерархической структуры.

Предположим, что в момент, когда агент с наименьшим временем выставляет свою заявку, информация о его действиях начинает влиять на всех агентов на рынке, однако данное влияние тем меньше, чем дальше в ультраметрическом смысле находятся трейдеры от данного сработавшего агента. Тогда новые времена действия ещё не сработавших агентов при условии, что некоторый агент вступил в торговлю в момент времени t_1, определяются соотношением

$$t_i^* = t_i - (d_{i1})^{-\beta}(t_i - t_1).$$

Принципиальным отличием данной модели от иерархических моделей, описанных ранее, является то, что влияние агентов учитывается не только при срабатывании некоторого кластера, а присутствует всегда. Каждый сработавший агент сокращает время срабатывания всех оставшихся агентов.

Численное исследование данной модели показало, что в малой окрестности критической точки, т. е. времени срабатывания всех агентов, наблюдается сильное пороговое изменение количества вступивших в торговлю агентов с увеличивающейся амплитудой и частотой. Отметим, что визуальное наблюдение такого поведения затруднено из-за быстрого убывания периода полученных колебаний. На рис. 4 приведены распределения точек краха в данной модели.

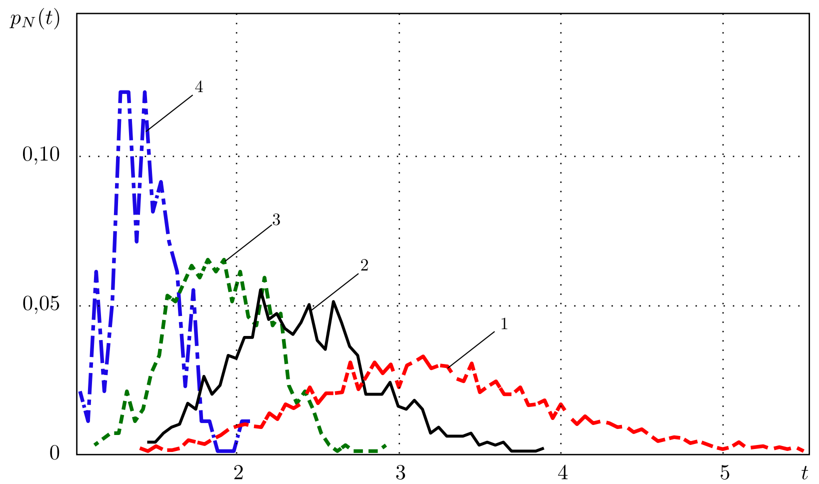

Рис. 4. Функции плотности распределения времен крахов t_c^j для систем с различным числом агентов в ультраметрической модели: 1) 10 уровней (1024 агента) 2) 11 уровней (2048 агентов) 3) 12 уровней (4096 агентов) 4) 13 уровней (8192 агента)

Заключение. Модель Джохансена—Сорнетта и её модификации, приведённые в настоящей работе, могут рассматриваться как общий подход к моделированию любых иерархически организованных систем, элементы которых оказывают влияние друг на друга, образуя тем самым положительную или отрицательную обратную связь в системе. Численные исследования показали, что распределения точек краха в моделях действительно сужаются при увеличении числа агентов в системе, т. е. в системе существует вполне определенная точка краха, положение которой в случае большого числа элементов не зависит от начальной реализации случайных времен покупки агентов. Такой результат говорит о потенциальной возможности предсказания моментов обострения в реальных системах.

Реальные иерархические системы всегда имеют конечное число элементов, и очень важно на практике найти для них наиболее быстрый и эффективный метод вычисления положения критической точки. Исследование ультраметрического обобщения модели показывает, что можно уменьшить ширину распределения точек краха при данном числе агентов, т. е. более точно определить наиболее вероятное время краха. Причём свойство универсальности критической точки при этом будет сохраняться, в противном случае такое обобщение было бы неприменимо к отысканию реальной точки краха.

Следует отметить, что новая ультраметрическая модель, разработанная авторами, имеет принципиальное отличие от двух описанных выше, заключающееся в способе введения положительной обратной связи в системе. А именно, в отличие от предыдущих моделей здесь изначально не вводится искусственное пороговое влияние. Обнаружение в новой модели динамики в виде скачков с увеличивающейся амплитудой и частотой доказывает, что логопериодические колебания, наблюдаемые в реальных системах, являются следствием их ультраметрической структуры, а не специфического способа влияния элементов системы друг на друга.

Учёт взаимного влияния агентов очень важен, так как объясняет многие хорошо известные статистические свойства финансовых временных рядов, например, наличие тяжёлых хвостов в распределении доходностей акций. Поэтому рассмотрение агентов на финансовом рынке как независимых неприемлемо при построении имитационных моделей рынка. Таким образом, описываемые модели, предоставляющие один из способов введения влияния рыночных агентов друг на друга, могут быть использованы при построении компьютерных симуляторов финансовых рынков.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Sornette D., Johansen A., Bouchaud J.-Ph.* Stock market crashes, precursors and replicas // *J. Phys. I France*, 1996. Vol. 6, no. 1. Pp. 167–175, arXiv: cond-mat/9510036.
2. *Sornette D., Johansen A.* A hierarchical model of financial crashes // *Phys. A*, 1998. Vol. 261, no. 3–4. Pp. 581–598.
3. *Бикулов А. Х., Зубарев А. П., Кайдалова Л. В.* Иерархическая динамическая модель финансового рынка вблизи точки обвала и p-адический математический анализ // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2006. № 42. С. 135–140. [Bikulov A. Kh., Zubarev A. P., Kaidalova L. V. Hierarchical dynamical model of financial market near the crash point and p-adic mathematical analysis // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2006. no. 42. Pp. 135–140].
4. *Подлазов А. В.* Режимы с обострением с комплексными показателями. Лог-периодические колебания в модели разрыва пучка волокон: Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша. № 35. Москва, 2009. 22 с. [*Podlazov A. V.* Blow-up with complex exponents. Log-periodic oscillations in the democratic fiber bundle model: Preprint No. 35, Inst. Appl. Math., Russian Academy of Science. Moscow, 2009. 22 pp.]

5. *Huang Y., Ouillon G., Saleur H., Sornette D.* Spontaneous generation of discrete scale invariance in growth models // *Phys. Rev. E*, 1997. Vol. 55, no. 56. Pp. 6433–6447.
6. *Tostesen E.* Dynamics of hierarchically clustured cooperative agents: Cand. Scient. Thesis, University of Copenhagen, 1995.

Поступила в редакцию 31/XII/2010;
в окончательном варианте — 13/III/2011.

MSC: 65C20; 93A13, 91B70

JOHANSEN–SORNETTE HIERARCHICAL MODEL OF FINANCIAL CRASHES AND ITS ULTRAMETRIC GENERALIZATION

A. S. Pivovarova, A. A. Steryakov

S. P. Korolyov Samara State Aerospace University
(National Research University),
34, Moskovskoe sh., Samara, 443086, Russia.

E-mails: `a-pivovarova@mail.ru, lubopitnij@mail.ru`

We consider the hierarchical model of financial crashes introduced by A. Johansen and D. Sornette which reproduces the log-periodic power law behavior of the price before the critical point. In order to build the generalization of this model we introduce the dependence of an influence exponent on an ultrametric distance between agents. Much attention is being paid to a problem of critical point universality which is investigated by comparison of probability density functions of the crash times corresponding to systems with various total numbers of agents.

Key words: *mathematical modeling, log-periodic power law, ultrametric distance, p-hierarchical structure, financial crashes.*

Original article submitted 31/XII/2010;
revision submitted 13/III/2011.

Anna S. Pivovarova, Postgraduate Student, Dept of Physics. *Alexander A. Steryakov*, Postgraduate Student, Dept of Physics.