

УДК 517.984

НЕКОТОРЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОБОБЩЁННОЙ МОДЕЛИ ФРИДРИХСА

Т. Х. Расулов^{1,2}, Х. Х. Турдиев¹¹ Бухарский государственный университет, физико-математический факультет, Узбекистан, 200100, Бухара, ул. Мухаммад Икбол, 11.² Университет Берна, философско-научный факультет, Швейцария, CH-3012, Берн.

E-mail: rth@mail.ru, hturdiev@mail.ru

Рассматривается самосопряжённый оператор обобщённой модели Фридрихса $h(p)$, $p \in \mathcal{T}^3$ ($\mathcal{T}^3$ — трёхмерный тор), в случае функций специального вида w_1 , w_2 , являющихся параметрами этого оператора. Эти функции имеют невырожденный минимум в нескольких различных точках. Изучены пороговые явления для рассматриваемого оператора в зависимости от точки минимума функции w_2 .

Ключевые слова: обобщённая модель Фридрихса, резонанс с нулевой энергией, собственное значение, определитель Фредгольма.

Пороговые явления для двухчастичного дискретного оператора Шрёдингера изучены в работах [1–3], а для семейства модели Фридрихса с одномерным возмущением, которые ассоциированы с системой двух частиц на решётке, изучены в работе [4]. Как известно, некоторые актуальные задачи, в частности, задачи квантовой механики, статистической механики и гидродинамики, сводятся к исследованию спектральных свойств обобщённой модели Фридрихса [5–7]. Поэтому изучение пороговых явлений для обобщённой модели Фридрихса играет важную роль в современной математической физике.

В настоящей работе рассматривается обобщённая модель Фридрихса $h(p)$ в случае функций специального вида w_1 и w_2 , являющихся параметрами оператора $h(p)$, $p = (p^{(1)}, p^{(2)}, p^{(3)}) \in \mathcal{T}^3$, где $\mathcal{T}^3$ — трёхмерный тор, т. е. куб $(-\pi, \pi]^3$ с соответствующим отождествлением противоположных граней. Показывается, что эти функции имеют невырожденный минимум в нескольких различных точках $\mathcal{T}^3$ и $(\mathcal{T}^3)^2$ соответственно. Найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы либо число $z = 0$ являлось собственным значением оператора $h(p_1)$, либо оператор $h(p_1)$ имел резонанс с нулевой энергией (в зависимости от точки минимума функции w_2) для некоторого $p_1 \in \mathcal{T}^3$. При этом $0 = \min \sigma_{\text{ess}}(h(p_1))$, где $\sigma_{\text{ess}}(h(p_1))$ — существенный спектр оператора $h(p_1)$. Получено разложение определителя Фредгольма при малых значениях $|p|$, где $|p| = \sqrt{(p^{(1)})^2 + (p^{(2)})^2 + (p^{(3)})^2}$. Результаты настоящей работы являются обобщениями соответствующих результатов работы [8]. Отметим, что в работе [9] получены аналогичные результаты (без доказательства) для модели Фридрихса.

Пусть $L_2(\mathcal{T}^3)$ — гильбертово пространство квадратично интегрируемых

Расулов Тулкин Хусенович (к.ф.-м.н., доц.), доцент, каф. алгебры и анализа¹; докторант, математический институт². Турдиев Халим Хамраевич, студент.

(комплекснозначных) функций, определённых на $\mathcal{T}^3$. Всюду $\mathcal{T}^3$ рассматривается как абелева группа, в которой операции сложения и умножения на вещественное число введены как операции сложения и умножения на вещественное число в $\mathbb{R}^3$ по модулю $(2\pi\mathbb{Z})^3$.

Обозначим через $\mathcal{H}$ прямую сумму пространств $\mathcal{H}_0 = \mathbb{C}$ и $\mathcal{H}_1 = L_2(\mathcal{T}^3)$, т. е. $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$.

Рассмотрим обобщённую модель Фридрихса $h(p)$, действующую в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ по правилу

$$h(p) = \begin{pmatrix} h_{00}(p) & h_{01} \\ h_{10} & h_{11}(p) \end{pmatrix}, \quad p \in \mathcal{T}^3,$$

где матричные элементы определяются по формулам

$$\begin{aligned} (h_{00}(p)f_0)_0 &= w_1(p)f_0, & (h_{01}f_1)_0 &= \int v(s)f_1(s)ds, \\ (h_{10}f_0)_1(q) &= v(q)f_0, & (h_{11}(p)f_1)_1(q) &= w_2(p, q)f_1(q). \end{aligned}$$

Здесь $f_i \in \mathcal{H}_i$; $v(\cdot)$ — вещественнозначная аналитическая функция на $\mathcal{T}^3$, являющаяся чётной по каждой переменной в отдельности на $\mathcal{T}^1$; а функции $w_1(\cdot)$ и $w_2(\cdot, \cdot)$ определены по формулам

$$\begin{aligned} w_1(p) &= \varepsilon(p) + \lambda, & w_2(p, q) &= \varepsilon(p) + \varepsilon(p + q) + \varepsilon(q), \\ \varepsilon(p) &= \sum_{i=1}^3 (1 - \cos mp^{(i)}), & m &\in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

где λ — фиксированное положительное число. Здесь и в дальнейшем интеграл без указания пределов всюду означает интегрирование по всей области изменения переменных интегрирования.

Очевидно, что оператор $h(p)$, $p \in \mathcal{T}^3$, ограничен и самосопряжён в $\mathcal{H}$.

Оператор h_{01} называется оператором уничтожения, а оператор h_{10} — оператором рождения.

Известно, что в импульсном представлении двухчастичный дискретный оператор Шрёдингера $\hat{h}$ действует в гильбертовом пространстве $L_2((\mathcal{T}^3)^2)$. После выделения полного квазиимпульса системы $k \in \mathcal{T}^3$ оператор $\hat{h}$ разлагается в прямой операторный интеграл (см. например [1–3]):

$$\hat{h} = \int \oplus \hat{h}(k) dk,$$

где ограниченный самосопряжённый оператор $\hat{h}(k)$, $k \in \mathcal{T}^3$, действует в гильбертовом пространстве $L_2(\Gamma_k)$ ($\Gamma_k \subset \mathcal{T}^3$ — некоторое многообразие).

Отметим, что обобщённая модель Фридрихса $h(p)$ обладает основными спектральными свойствами двухчастичного дискретного оператора Шрёдингера $\hat{h}(k)$ (см. например [8]). По этой причине гильбертово пространство $\mathcal{H}$ называется *двухчастичным обрезанным подпространством* фоковского пространства, а обобщённая модель Фридрихса $h(p)$ — гамильтонианом системы с не более чем двумя частицами на решётке.

Далее под $\sigma(\cdot)$, $\sigma_{\text{ess}}(\cdot)$ и $\sigma_{\text{disc}}(\cdot)$ будем понимать спектр, существенный спектр и дискретный спектр соответственно некоторого ограниченного самосопряжённого оператора.

Пусть оператор $h_0(p)$ действует в $\mathcal{H}$ как

$$h_0(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & h_{11}(p) \end{pmatrix}, \quad p \in \mathcal{T}^3.$$

Оператор возмущения $h(p) - h_0(p)$ оператора $h_0(p)$ является самосопряжённым оператором ранга 2. Следовательно, из известной теоремы Г. Вейля [10] о сохранении существенного спектра при возмущениях конечного ранга вытекает, что существенный спектр оператора $h(p)$ совпадает с существенным спектром оператора $h_0(p)$. Известно, что

$$\sigma_{\text{ess}}(h_0(p)) = [m_2(p); M_2(p)],$$

где

$$m_2(p) = \varepsilon(p) + 2 \sum_{k=1}^3 \left(1 - \cos \frac{mp^{(k)}}{2}\right),$$

$$M_2(p) = \varepsilon(p) + 2 \sum_{k=1}^3 \left(1 + \cos \frac{mp^{(k)}}{2}\right), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Из последних фактов следует, что $\sigma_{\text{ess}}(h(p)) = [m_2(p); M_2(p)]$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что существенный спектр оператора $h(\frac{1}{m}\bar{\pi})$, где $\bar{\pi} = (\pi, \pi, \pi) \in \mathcal{T}^3$, превращается в точку $\{12\} = [m_2(\frac{1}{m}\bar{\pi}); M_2(\frac{1}{m}\bar{\pi})]$, и, следовательно для любого $p \in \mathcal{T}^3$ нельзя сказать, что существенный спектр оператора $h(p)$ является абсолютно непрерывным.

При каждом фиксированном $p \in \mathcal{T}^3$ определим регулярную в $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(h(p))$ функцию

$$\Delta(p; z) = w_1(p) - z - \int \frac{v^2(s)ds}{w_2(p, s) - z}$$

— детерминант Фредгольма, ассоциированный с оператором $h(p)$. Установим (см. [8]) связь между собственными значениями оператора $h(p)$ и нулями функции $\Delta(p; \cdot)$.

ЛЕММА 1. *При каждом фиксированном $p \in \mathcal{T}^3$ оператор $h(p)$ имеет собственное значение $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(h(p))$ тогда и только тогда, когда $\Delta(p; z) = 0$.*

Из леммы 1 вытекает, что

$$\sigma(h(p)) = \sigma_{\text{disc}}(h(p)) \cup [m_2(p); M_2(p)],$$

где $\sigma_{\text{disc}}(h(p)) = \{z \in \mathbb{C} \setminus [m_2(p); M_2(p)] : \Delta(p; z) = 0\}$, $p \in \mathcal{T}^3$.

Обозначим через $n \equiv n(m)$ число точек $(p_i, q_j) \in (\mathcal{T}^3)^2$, $p_i = (p_i^{(1)}, p_i^{(2)}, p_i^{(3)})$, $q_j = (q_j^{(1)}, q_j^{(2)}, q_j^{(3)})$, для которых

$$p_i^{(k)}, q_j^{(k)} \in \left\{0, \pm \frac{2}{m}\pi, \pm \frac{4}{m}\pi, \dots, \pm \frac{m'}{m}\pi\right\}, \quad k = 1, 2, 3,$$

причём $p_i \neq p_j$ и $q_i \neq q_j$ при $i \neq j$; здесь

$$m' = \begin{cases} m, & \text{если } m \text{ — чётное} \\ m - 1, & \text{если } m \text{ — нечётное.} \end{cases}$$

Можно легко проверить, что функция $w_2(\cdot, \cdot)$ (соответственно, $w_1(\cdot)$) имеет невырожденный минимум в точках $(p_i, q_j) \in (\mathcal{T}^3)^2$ (соответственно, $p_i \in \mathcal{T}^3$) и $n = (m' + 1)^6$. Дополнительно будем предполагать, что $m \geq 2$ (если $m = 1$, то $n = 1$, а нам интересен случай $n > 1$).

ЗАМЕЧАНИЕ. Имеет место равенство $h(p_1) \equiv h(p_i)$, $i \in \{2, 3, \dots, \sqrt{n}\}$ (отметим, что $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$ как корень из шестой степени некоторого натурального числа).

Пусть $C(\mathcal{T}^3)$ — банахово пространство непрерывных функций, определённых на $\mathcal{T}^3$, а $L_1(\mathcal{T}^3)$ — банахово пространство интегрируемых функций, также определённых на $\mathcal{T}^3$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Говорят, что оператор $h(p_1)$ имеет резонанс с нулевой энергией, если число 1 является собственным значением оператора

$$(G\psi)(q) = \frac{v(q)}{2\lambda} \int \frac{v(t)\psi(t)dt}{\varepsilon(t)}, \quad \psi \in C(\mathcal{T}^3)$$

и по крайней мере одна (с точностью до константы) соответствующая собственная функция ψ удовлетворяет условию $\psi(q_j) \neq 0$ при некотором $j \in \{1, 2, \dots, \sqrt{n}\}$.

Функция $w_2(\cdot, \cdot)$ имеет невырожденный минимум в точках $(p_i, q_j) \in (\mathcal{T}^3)^2$, $i, j \in \{1, 2, \dots, \sqrt{n}\}$, а функция $v(\cdot)$ — аналитическая на $\mathcal{T}^3$, поэтому существует конечный интеграл

$$\int \frac{v^2(t)dt}{w_2(p, t)}, \quad p \in \mathcal{T}^3.$$

Из теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега и равенства $\Delta(p_i; 0) = \Delta(p_1; 0)$ для $i \in \{2, 3, \dots, \sqrt{n}\}$ вытекает, что

$$\Delta(p_1; 0) = \lim_{p \rightarrow p_i} \Delta(p; 0), \quad i \in \{1, 2, \dots, \sqrt{n}\}.$$

Следующая теорема формулирует необходимые и достаточные условия для того, чтобы либо число $z = 0$ являлось собственным значением оператора $h(p_1)$, либо оператор $h(p_1)$ имел резонанс с нулевой энергией.

ТЕОРЕМА 1. *Справедливы следующие утверждения:*

- а) оператор $h(p_1)$ имеет нулевое собственное значение тогда и только тогда, когда $\Delta(p_1; 0) = 0$ и $v(q_j) = 0$ для всех $j \in \{1, 2, \dots, \sqrt{n}\}$;
- б) оператор $h(p_1)$ имеет резонанс с нулевой энергией тогда и только тогда, когда $\Delta(p_1; 0) = 0$ и $v(q_j) \neq 0$ при некотором $j \in \{1, 2, \dots, \sqrt{n}\}$.

Доказательство утверждения а). Необходимость. Пусть оператор $h(p_1)$ имеет нулевое собственное значение, а $f = (f_0, f_1) \in \mathcal{H}$ — соответствующий собственный вектор. Тогда f_0 и f_1 удовлетворяют системе уравнений

$$\lambda f_0 + \int v(t) f_1(t) dt = 0, \quad v(q) f_0 + 2\varepsilon(q) f_1(q) = 0. \quad (1)$$

Из (1) вытекает, что f_0 и f_1 имеют вид

$$f_0 = \text{const} \neq 0, \quad f_1(q) = -\frac{v(q) f_0}{2\varepsilon(q)}, \quad (2)$$

и из первого уравнения системы (1) получим $\Delta(p_1; 0) = 0$.

Теперь покажем, что $f_1 \in L_2(\mathcal{T}^3)$ тогда и только тогда, когда $v(q_j) = 0$, $j \in \{1, 2, \dots, \sqrt{n}\}$. Действительно, если при некотором $j \in \{1, 2, \dots, \sqrt{n}\}$ верно $v(q_j) = 0$ (соответственно $v(q_j) \neq 0$), то из чётности аналитической функции $v(\cdot)$ по каждой переменной в отдельности на $\mathcal{T}^1$ следует, что существуют числа $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, $C_3 > 0$ и $\delta > 0$ такие, что

$$C_1 |q - q_j|^2 \leq |v(q)| \leq C_2 |q - q_j|^2, \quad q \in U_\delta(q_j), \quad (3)$$

соответственно

$$|v(q)| \geq C_3, \quad q \in U_\delta(q_j), \quad (4)$$

где $U_\delta(p_0) = \{p \in \mathcal{T}^3 : |p - p_0| < \delta\}$, $p_0 \in \mathcal{T}^3$.

Кроме этого, из определения функции $\varepsilon(\cdot)$ получим

$$C_1 |q - q_j|^2 \leq \varepsilon(q) \leq C_2 |q - q_j|^2, \quad q \in U_\delta(q_j), \quad j \in \{1, 2, \dots, \sqrt{n}\}; \quad (5)$$

$$\varepsilon(q) \geq C_3, \quad q \in \mathcal{T}_\delta \equiv \mathcal{T}^3 \setminus \bigcup_{i=1}^{\sqrt{n}} U_\delta(p_i). \quad (6)$$

Имеет место равенство

$$\int |f_1(t)|^2 dt = \frac{|f_0|^2}{4} \sum_{j=1}^{\sqrt{n}} \int_{U_\delta(q_j)} \frac{v^2(t) dt}{\varepsilon^2(t)} + \frac{|f_0|^2}{4} \int_{\mathcal{T}_\delta} \frac{v^2(t) dt}{\varepsilon^2(t)}. \quad (7)$$

Учитывая неравенства (3)–(6), имеем, что j -тое слагаемое в правой части (7) конечно тогда и только тогда, когда $v(q_j) = 0$. Если $v(q_j) = 0$ для всех $j \in \{1, 2, \dots, \sqrt{n}\}$, то имеем

$$\int |f_1(t)|^2 dt \leq C_1 \sum_{j=1}^{\sqrt{n}} \int_{U_\delta(q_j)} \frac{|t - q_j|^4}{|t - q_j|^4} dt + C_2 < \infty.$$

Если при некотором $j \in \{1, 2, \dots, \sqrt{n}\}$ верно $v(q_j) \neq 0$, то, используя неравенства (3)–(6), получим

$$\int |f_1(t)|^2 dt \geq C_1 \int_{U_\delta(q_j)} \frac{1}{|t - q_j|^4} dt = \infty.$$

Таким образом, $f_1 \in L_2(\mathcal{T}^3)$ тогда и только тогда, когда $v(q_j) = 0$ для всех $j \in \{1, 2, \dots, \sqrt{n}\}$.

Достаточность. Пусть $\Delta(p_1; 0) = 0$ и $v(q_j) = 0$ для всех $j \in \{1, 2, \dots, \sqrt{n}\}$. Легко проверить, что элемент $f = (f_0, f_1)$, где f_0 и f_1 определены по формуле (2), удовлетворяет уравнению $h(p_1)f = 0$ и $f \in \mathcal{H}$ $\square$

Доказательство утверждения б). Необходимость. Пусть оператор $h(p_1)$ имеет резонанс с нулевой энергией. Тогда по определению 1 уравнение

$$\frac{v(q)}{2\lambda} \int \frac{v(t)\psi(t)dt}{\varepsilon(t)} = \psi(q) \quad (8)$$

имеет нетривиальное решение $\psi \in C(\mathcal{T}^3)$, удовлетворяющее условию $\psi(q_j) \neq 0$ при некотором $j \in \{1, 2, \dots, \sqrt{n}\}$. Видно, что это решение совпадает (с точностью до константы) с функцией $v(\cdot)$ и, следовательно, $\Delta(p_1; 0) = 0$.

Достаточность. Пусть $\Delta(p_1; 0) = 0$ и $v(q_j) \neq 0$ при некотором $j \in \{1, 2, \dots, \sqrt{n}\}$. Тогда функция $v \in C(\mathcal{T}^3)$ является решением уравнения (8) и, следовательно, по определению 1 оператор $h(p_1)$ имеет резонанс с нулевой энергией. $\square$

В ходе доказательства утверждения а) теоремы 1 показано, что если оператор $h(p_1)$ имеет нулевое собственное значение, то элемент $f = (f_0, f_1)$, определённый по формуле (2), удовлетворяет уравнению $h(p_1)f = 0$ и $f_1 \in L_2(\mathcal{T}^3)$. Аналогично можно показать, что если оператор $h(p_1)$ имеет резонанс с нулевой энергией, то элемент $f = (f_0, f_1)$, определённый по формуле (2), удовлетворяет уравнению $h(p_1)f = 0$ и $f_1 \in L_1(\mathcal{T}^3) \setminus L_2(\mathcal{T}^3)$. Это означает, что в определении 1 требование наличия собственного значения $\mu = 1$ оператора G соответствует существованию решения уравнения $h(p_1)f = 0$, а из условия $\psi(q_j) \neq 0$ при некотором $j \in \{1, 2, \dots, \sqrt{n}\}$ следует, что решение f этого уравнения не принадлежит пространству $\mathcal{H}$.

Из доказательства утверждения б) теоремы 1 видно, что если оператор $h(p_1)$ имеет резонанс с нулевой энергией, то решение уравнения $G\psi = \psi$ совпадает (с точностью до константы) с функцией $v(\cdot)$. Поэтому далее для точности предположим, что если оператор $h(p_1)$ имеет резонанс с нулевой энергией, то функция $v(\cdot)$ отлична от нуля только в n_0 точках множества $\{q_j\}_{j=1}^{\sqrt{n}}$, $1 < n_0 \leq \sqrt{n}$. Не нарушая общности (в противном случае перенумеруем элементы) предположим, что $v(q_j) \neq 0$ при $j \in 1, 2, \dots, n_0$. Так как $\{p_j\}_{j=1}^{\sqrt{n}} \equiv \{q_j\}_{j=1}^{\sqrt{n}}$, положим $p_j = q_j$ для всех $j \in 1, 2, \dots, n_0$.

ТЕОРЕМА 2. *Справедливы следующие утверждения:*

- а) *если оператор $h(p_1)$ имеет нулевое собственное значение, то существуют числа $C > 0$ и $\delta > 0$ такие, что выполняются следующие неравенства:*

$$|\Delta(p; 0)| \geq C|p - p_i|^2, \quad p \in U_\delta(p_i), \quad i \in \{1, 2, \dots, \sqrt{n}\};$$

- б) *если оператор $h(p_1)$ имеет резонанс с нулевой энергией, то существуют числа $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ и $\delta > 0$ такие, что выполняются следующие неравенства:*

- 1) $|\Delta(p; 0)| \geq C_1|p - p_i|^2, \quad p \in U_\delta(p_i), \quad i \in \{n_0 + 1, n_0 + 2, \dots, \sqrt{n}\};$
- 2) $|\Delta(p; 0)| \geq C_2, \quad p \in \mathcal{T}_\delta.$

Сформулируем результат о разложении определителя Фредгольма.

ТЕОРЕМА 3. Если оператор $h(p_1)$ имеет резонанс с нулевой энергией, то справедливо разложение

$$\Delta(p; z) = \frac{2\pi^2}{m^2} \sum_{j=1}^{n_0} v^2(q_j) \sqrt{\frac{3}{4}|p - p_i|^2 - z} + O(|p - p_i|^2) + O(|z|)$$

при $|p - p_i| \rightarrow 0$, $i \in \{1, 2, \dots, n_0\}$, и $z \rightarrow -0$.

Теоремы 2 и 3 доказываются с использованием определения функции $w_2(\cdot, \cdot)$ и схем доказательств соответствующих утверждений работы [8].

Отметим, что теоремы 1–3 играют важную роль при изучении конечности или бесконечности дискретного спектра соответствующего гамильтониана, действующего в трёхчастичном обрезанном подпространстве фоковского пространства в зависимости от точки минимума функции $w_2(\cdot, \cdot)$ (для случая $m = 1$ см. [8]).

Работа выполнена при поддержке Deutsche Forschungsgemeinschaft (проект № TR368/6-2). Первый автор благодарит Математический Институт Университета Берна (Берн, Швейцария) за гостеприимство и поддержку. Авторы также выражают благодарность за поддержку на конференции «Математическая физика и её приложения – 2010» лабораторией математической физики СамГУ, грантами АВЦП 3341 и 10854 и контрактом ФЦП 2173.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Albeverio S., Lakaev S. N., Makarov K. A., Muminov Z. I. The threshold effects for the two-particle Hamiltonians in lattice // *Commun. Math. Phys.*, 2006. Vol. 262, no. 1. Pp. 91–115, arXiv: math-ph/0501013.
2. Albeverio S., Lakaev S. N., Muminov Z. I. Schrödinger operators on lattices. The Efimov effect and discrete spectrum asymptotics // *Ann. Henri Poincaré*, 2004. Vol. 5, no. 4. Pp. 743–772.
3. Абдуллаев Ж. И., Лакаев С. Н. Асимптотика дискретного спектра разностного трёхчастичного оператора Шрёдингера на решётке // *ТМФ*, 2003. Т. 136, № 2. С. 231–245; англ. пер.: Abdullaev J. I., Lakaev S. N. Asymptotics of the discrete spectrum of the three-particle Schrödinger difference operator on a lattice // *Theoret. and Math. Phys.*, 2003. Vol. 136, no. 2. Pp. 1096–1109.
4. Albeverio S., Lakaev S. N., Muminov Z. I. The threshold effects for a family of Friedrichs models under rank one perturbations // *J. Math. Anal. Appl.*, 2007. Vol. 330, no. 2. Pp. 1152–1168, arXiv: math/0604277 [math.SP].
5. Фаддеев Л. Д. О модели Фридрихса в теории возмущений непрерывного спектра / В сб.: *Краевые задачи математической физики. 2: Сборник работ. Посвящается памяти Владимира Андреевича Стеклова в связи со столетием со дня его рождения* / Тр. МИАН СССР, Т. 73. М.–Л.: Наука, 1964. С. 292–313. [Faddeev L. D. On a model of Friedrichs in the theory of perturbations of the continuous spectrum / In: *Boundary value problems of mathematical physics. Part 2: Collection of articles. Dedicated to the memory of Vladimir Andreevich Steklov in connection with the centennial of his birth* / Trudy Mat. Inst. Steklov., 73. Moscow–Leningrad: Nauka, 1964. Pp. 292–313].
6. Минлос Р. А., Синай Я. Г. Исследование спектров стохастических операторов, возникающих в решётчатых моделях газа // *ТМФ*, 1970. Т. 2, № 2. С. 230–243; англ. пер.: Minlos R. A., Sinai Ya. G. Spectra of stochastic operators arising in lattice models of a gas // *Theoret. and Math. Phys.*, 1970. Vol. 2, no. 2. Pp. 167–176.
7. Дынкин Е. М., Набако С. Н., Яковлев С. И. Граница конечности сингулярного спектра в самосопряженной модели Фридрихса // *Алгебра и анализ*, 1991. Т. 3, № 2. С. 77–90;

- англ. пер.: *Dyn'kin E. M., Naboko S. N., Yakovlev S. I.* A finiteness bound for the singular spectrum in a selfadjoint Friedrichs model // *St. Petersburg Math. J.*, 1992. Vol. 3, no. 2. Pp. 299–313.
8. *Albeverio S., Lakaev S. N., Rasulov T. H.* On the Spectrum of an Hamiltonian in Fock Space. Discrete Spectrum Asymptotics // *J. Stat. Phys.*, 2007. Vol. 127, no. 2. Pp. 191–220.
 9. *Расулов Т. Х.* Асимптотика дискретного спектра одного модельного оператора, ассоциированного с системой трех частиц на решетке // *ТМФ*, 2010. Т. 163, № 1. С. 34–44; англ. пер.: *Rasulov T. Kh.* Asymptotics of the discrete spectrum of a model operator associated with a system of three particles on a lattice // *Theoret. and Math. Phys.*, 2010. Vol. 163, no. 1. Pp. 429–437.
 10. *Reed M., Simon B.* Methods of modern mathematical physics. Vol. IV: Analysis of operators. New York–London: Academic Press, 1978. 396 pp.; русск. пер.: *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 4: Анализ операторов. М.: Мир, 1982. 430 с.

Поступила в редакцию 21/XII/2010;
в окончательном варианте — 04/IV/2011.

MSC: 81Q10; 35P20, 47N50

SOME SPECTRAL PROPERTIES OF A GENERALIZED FRIEDRICHS MODEL

T. Kh. Rasulov^{1,2}, *Kh. Kh. Turdiev*¹

¹ Bukhara State University, Physics and Mathematics Faculty,
11, Muhammad Ikbol, Bukhara, 200100, Uzbekistan.

² University of Bern, Faculty of Science,
5, Sidlerstrasse, Bern, CH-3012, Switzerland.

E-mail: rth@mail.ru, hturdiev@mail.ru

We consider self-adjoint generalized Friedrichs model $h(p)$, $p \in \mathcal{T}^3$ ($\mathcal{T}^3$ is the three-dimensional torus), in the case where the parameter functions w_1 and w_2 of this operator has the special forms. These functions has non-degenerate minimum at the several different points. Threshold effects for the considering operator are studied depending on the minimum points of w_2 .

Key words: *generalized Friedrichs model, zero energy resonance, eigenvalue, Fredholm determinant.*

Original article submitted 21/XII/2010;
revision submitted 04/IV/2011.

Tulkin Kh. Rasulov (Ph.D. (Phys. & Math.)), Associate Professor, Dept. of Algebra and Analysis¹; Doctoral Candidate, Mathematical Institute². *Khalim Kh. Turdiev*, Student.