УДК 517.956.3

ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ ОДНОГО ПРОСТРАНСТВЕННОГО УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА, ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ НА КООРДИНАТНЫХ ПЛОСКОСТЯХ

И. Н. Родионова

Самарский государственный университет,
443011, Самара, ул. Академика Павлова, 1.

E-mail: mvdolg@ssu.samara.ru

Для полного уравнения третьего порядка в трёхмерном евклидовом пространстве решена краевая задача с сопряжением на нехарактеристической плоскости в области, ограниченной плоскостями сингулярности коэффициентов уравнения.

Ключевые слова: *краевая задача, уравнение гиперболического типа, интегральные уравнения, интегральные условия.*

Рассмотрим на множестве $H = H_1 \cup H_2$ уравнение

$$U_{xyz} + \frac{\gamma}{z}U_{xy} + \frac{\beta}{y}U_{xz} + \frac{\alpha}{x}U_{yz} + \frac{\beta\gamma}{yz}U_x + \frac{\alpha\gamma}{xz}U_y + \frac{\alpha\beta}{xy}U_z + \frac{\alpha\beta\gamma}{xyz}U = 0, \qquad (1)$$

где $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in (0,1)$; $H_1 = \{(x,\, y,\, z) : 0 < y < x < h,\ 0 < z < +\infty\}$, $H_2 = \{(x,\, y,\, z) : 0 < y < x < h,\ 0 < z < +\infty\}$, $h > 0$.

В соответствии с классификацией [1] уравнений со старшими частными производными $\partial^N/(\partial x_1 \ldots \partial x_N)$ уравнение (1) относится к уравнениям гиперболического типа.

Задача. *Найти на множестве H непрерывное решение уравнения* (1) *с условиями*

$$\int_0^y U(t,\, y,\, z)dt = \psi(y,\, z), \quad (y,\, z) \in \mathcal{D}_1 = \{0 < y < h,\ 0 < z < +\infty\}, \qquad (2)$$

$$\big(z^\gamma U(x,\, y,\, z)\big)_{z=0} = f_1(x,\, y), \quad (x,\, y) \in \mathcal{D}_2 = \{0 < x < y < h\}, \qquad (3)$$

$$\big(z^\gamma U(x,\, y,\, z)\big)_{z=0} = f_2(x,\, y), \quad (x,\, y) \in \mathcal{D}_3 = \{0 < y < x < h\}, \qquad (4)$$

$$\big(y^\beta U(x,\, y,\, z)\big)_{y=0} = \varphi(x,z), \quad (x,\, z) \in \mathcal{D}_4 = \{0 < x < h,\ 0 < z < +\infty\} \qquad (5)$$

и условиями сопряжения на плоскости $x = y$:

$$\lim_{y\to x+0} U(x,\, y,\, z) = \lim_{y\to x-0} U(x,\, y,\, z); \qquad (6)$$

$$\lim_{y\to x+0} x^{2\alpha}(U_x - U_y) = \lim_{y\to x-0} [x^{2\beta}(U_x - U_y)] + (x^{2\beta}U(x,x,z))'_x. \qquad (7)$$

Ирина Николаевна Родионова (к.ф.-м.н., доцент), доцент, каф. математики и бизнес-информатики; научно-исследовательская лаборатория математической физики.

На заданные функции налагаются следующие требования: $f_1(x,\, y)$, $f_2(x,\, y)$, $\varphi(x,\, z)$, $\psi(y,\, z)$ *непрерывны в своих областях определения вместе со своими смешанными частными производными второго порядка*;

$$f_1(x,\, x) = f_2(x,\, x) = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x}\Big|_{y=x} = \frac{\partial f_2}{\partial x}\Big|_{y=x}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}\Big|_{y=x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}\Big|_{y=x}; \tag{8}$$
$$\int_0^y f_1(t,\, y)dt = 0, \quad 0 \leqslant y \leqslant h.$$

Замечание. Простейшим примером функции $f_1(x,\, y)$, удовлетворяющей указанным условиям, является

$$f_1(x,\, y) = f_{11}(y)\big[x^\gamma(y-x)^\delta - x^\delta(y-x)^\gamma\big], \quad \gamma > 1, \quad \delta > 1, \quad f_{11}(y) \in C^{(1)}_{[0,h]}.$$

Полагая для определённости $2\alpha - \beta > 0$, потребуем представления

$$\psi(y,\, z) = y\psi^*(y, z), \quad \varphi(x,\, z) = x\varphi^*(x,\, z), \tag{9}$$

где ψ^*, φ^* удовлетворяют условиям непрерывности в своих областях определения вместе со своими смешанными частными производными второго порядка, причём $\varphi(y,\, 0) = \psi(x,\, 0) = 0$. Для решения поставленной задачи возьмём за основу полученное методом Римана в работе [2] решение задачи Коши—Гурса для уравнения (1) в области H_1 при выполнении условий

$$U(x,\, x,\, z) = \tau_1(x,\, z), \quad (U_x - U_y)_{x=y} = \nu_1(x,\, z), \quad (x,\, z) \in \mathcal{D}_4$$

и (3). Оно имеет вид [2]:

$$U(x,\, y,\, z) = z^{-\gamma} f_1(x,\, y) + \frac{1}{2}\Big[\Big(\frac{y}{x}\Big)^\alpha \tau_1(y,\, z) + \Big(\frac{x}{y}\Big)^\beta \tau_1(x,\, z)\Big] -$$
$$- x^{-\alpha} y^{-\beta} \int_x^y t^{\alpha+\beta} \nu_1(t,\, z)dt + (\beta - \alpha) x^{-\alpha} y^{-\beta} \int_x^y t^{\alpha+\beta-1} \tau_1(t,\, z)dt. \tag{10}$$

С помощью интегрального представления функции τ_1 упростим формулу (10), положив

$$\tau_1(x,\, z) = \int_0^x T_1(s,\, z)\Big(\frac{s}{x}\Big)^{2\beta} ds, \tag{11}$$

где $T_1(x, z)$ — новая функция, непрерывная в $\mathcal{D}_4$ вместе со своей производной $\partial T_1/\partial z$; $x^{2\beta} T_1(x,\, z)$ интегрируема по x в $[0,\, h]$ при любом $z \in [0,\, +\infty)$,

$$T_1(x,\, 0) = 0. \tag{12}$$

Подставляя в функцию (10) вместо τ_1 её интегральное представление (11), после некоторых преобразований получаем

$$U(x, y, z) = z^{-\gamma} f_1(x, y) + \frac{1}{x^\beta y^\beta} \int_0^x T_1(s, z) s^{2\beta} ds + \frac{1}{x^\alpha y^\beta} \int_x^y N_1(s, z) s^{\alpha+\beta} ds, \tag{13}$$

$$N_1(s,\, z) = \frac{1}{2}[T_1(s,\, z) - \nu_1(s,\, z)]. \tag{14}$$

Аналогичными рассуждениями получаем в области H_2 решение задачи Коши—Гурса с условиями

$$U(x,\, x,\, z) = \tau_2(x,\, z), \quad (U_x - U_y)_{x=y} = \nu_2(x,\, z), \quad (x,\, z) \in \mathcal{D}_4$$

и (4), которое, при представлении

$$\tau_2(x,\, z) = \int_0^x T_2(s,\, z) \left(\frac{s}{x}\right)^{2\alpha} ds, \tag{15}$$

имеет вид

$$U(x,y,z) = \frac{1}{x^\alpha y^\alpha} \int_0^x T_2(s,z) s^{2\alpha} ds + \frac{1}{x^\alpha y^\beta} \int_y^x N_2(s,z) s^{\alpha+\beta} ds + \\ + z^{-\gamma} f_2(x,y), \tag{16}$$

$$N_2(s,\, z) = \frac{1}{2}[T_2(s,\, z) + \nu_2(s,\, z)], \tag{17}$$

где $T_2(x,z)$ вводится по аналогии с $T_1(x,z)$ и удовлетворяет условию $T_2(x,0) = = 0$.

Функции (13), (16) подчиним условиям (2), (5) соответственно, из которых находим

$$N_2(x,\, z) x^{\alpha+\beta} = -\big[x^\alpha \varphi(x,z)\big]_x^p,$$
$$\int_0^y T_1(s,\, z) s^{2\beta} ds + \frac{N_1(y,\, z) y^{1+2\beta}}{1-\alpha} = y^\beta \big[y^\beta \psi(y,\, z)\big]_y'. \tag{18}$$

Условия сопряжения (7), соотношения (14), (17) приводят к интегральному уравнению

$$x^{2\beta} T_1(x,\, z) + \frac{2(1-\alpha)}{x} \int_0^x T_1(s,\, z) s^{2\beta} ds = \frac{\mathcal{G}(x,\, z)}{x},$$

где

$$\mathcal{G}(x,\, z) = \frac{x^{\alpha-\beta+1}[x^\alpha \varphi(x,\, z)]_x'}{1-\alpha} + x^\beta [x^\beta \psi(x,\, z)]_x',$$

единственное решение которого получено методом последовательных приближений:

$$T_1(x,\, z) x^{2\beta} = \frac{\mathcal{G}(x,\, z)}{x} - \frac{2(1-\alpha)}{x} \int_0^x \frac{\mathcal{G}(t,\, z)}{t} \Big(\frac{t}{x}\Big)^{2(1-\alpha)} dt, \tag{19}$$

при этом (19) удовлетворяет условиям (12). Из условий сопряжения (6), представлений (11), (15), а также формулы (19) находим

$$\int_0^x T_2(s,\, z) s^{2\alpha} ds = x^{2\alpha-2\beta} \int_0^x \frac{\mathcal{G}(t,\, z)}{t} \Big(\frac{t}{x}\Big)^{2(1-\alpha)} dt. \tag{20}$$

Из (18) имеем

$$N_1(x,\, z)x^{\alpha+\beta} = (1-\alpha)x^{\alpha-\beta-1}\Big[x^{\beta}(x^{\beta}\psi(x,\, z))'_x - \frac{\mathcal{G}(t,\, z)}{t}\Big(\frac{t}{x}\Big)^{2(1-\alpha)}dt\Big]. \quad (21)$$

Подставляя найденные значения N_i, T_i в формулы (10), (13) получаем в явном виде решение поставленной задачи:

$$\begin{aligned} U(x,\, y,\, z) = z^{-\gamma}f_1(x,\, y) + \frac{1}{x^{\beta}y^{\beta}}\int_0^x \frac{\mathcal{G}(t,\, z)}{t}\Big(\frac{t}{x}\Big)^{2(1-\alpha)}dt + \\ + \frac{1-\alpha}{x^{\alpha}y^{\beta}}\int_x^y s^{\alpha-1}\big[s^{\beta}\psi(s,\, z)\big]'_s ds - \\ - \frac{1-\alpha}{(3\alpha-\beta-2)x^{\alpha}y^{\beta}}\Big[y^{\alpha-\beta}\int_0^y \frac{\mathcal{G}(t,\, z)}{t}\Big(\frac{t}{x}\Big)^{2(1-\alpha)}dt - \\ - \int_x^y \mathcal{G}(t,\, z)t^{\alpha-\beta-1}dt - x^{\alpha-\beta}\int_0^x \frac{\mathcal{G}(t,\, z)}{t}\Big(\frac{t}{x}\Big)^{2(1-\alpha)}dt\Big] \quad (22) \end{aligned}$$

в области H_1 и

$$\begin{aligned} U(x,\, y,\, z) = \frac{y^{\alpha-2\beta}}{x^{\alpha}}\int_0^y \frac{\mathcal{G}(t,\, z)}{t}\Big(\frac{t}{x}\Big)^{2(1-\alpha)}dt + z^{-\gamma}f_2(x,\, y) + \\ + \frac{1}{x^{\alpha}y^{\beta}}\big[x^{\alpha}\varphi(x,\, z) - y^{\alpha}\varphi(y,\, z)\big] \quad (23) \end{aligned}$$

в области H_2.

Проверкой показано, что при выполнении условий непрерывности, налагаемых на заданные функции, и условий (8), (9) функция, определяемая формулами (22), (23), является решением поставленной задачи. Единственность следует из единственности решения задачи Коши—Гурса, полученного методом Римана, и единственности решения интегрального уравнения, к которому свелась задача.

При ограничениях, налагаемых на коэффициенты уравнения и данные задачи, решение ее непрерывно на множестве $H \cup \{(x,\, y,\, z) : 0 < x = y < h,\ 0 < z < +\infty\}$, а на координатных плоскостях, являющихся частью границы множества H, обращается в бесконечность порядка меньше единицы.

Научная работа выполнена при поддержке грантом ведомственной программы Министерства образования и науки РФ (проект АВЦП № 3341, № 2.2.1.1/10854).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Жегалов В. И., Миронов А. Н.* Дифференциальные уравнения со старшими частными производными. Казань: Казан. мат. общ., 2001. 226 с. [*Zhegalov V. I., Mironov A. N.* Differential equations with higher partial derivatives. Kazan': Kazan. Mat. Obshch., 2001. 226 pp.]
2. *Захаров В. Н.* Краевая задача для одного уравнения, вырождающегося на координатных плоскостях / В сб.: *Доклады 52-ой научной конференции СГПУ*. Самара: СГПУ, 1998. С. 49–53. [*Zakharov V. N.* Boundary value problem for one equation degenerate on a coordinate planes / In: *Doklady 52-oy nauchnoy konferencii SGPU*. Samara: SGGU, 1998. Pp. 49–53].

Поступила в редакцию 01/X/2010;
в окончательном варианте — 21/II/2011.

MSC: 35L25

THE PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITION FOR ONE SPACE ANALOG OF HYPERBOLIC TYPE EQUATION DEGENERATED ON COORDINATE PLANES

I. N. Rodionova

Samara State University,
1, Academician Pavlov st., Samara, 443011, Russia.

E-mail: mvdolg@ssu.samara.ru

For the full equation of the third order in a three-dimensional Euclidean space the boundary value problem with interface on non-characteristic plane in the area limited by planes of a singularity of the equation factors is solved.

Key words: *boundary value problem, hyperbolic type equation, integral equations, integral conditions.*

Original article submitted 01/X/2010;
revision submitted 21/II/2011.

Irina N. Rodionova (Ph. D. (Phys. & Math.)), Associate Professor, Dept. of Mathematics & Business Informatics; Research Lab. of Mathematical Physics.