Дифференциальные уравнения

УДК 517.968.72

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ТЕОРИИ НАЧАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРОИЗВОДНЫМИ РИМАНА—ЛИУВИЛЛЯ

Е. Н. Огородников

Самарский государственный технический университет,
443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mail: eugen.ogo@gmail.com

Обсуждается проблема корректной постановки задач с начальными данными для дифференциальных уравнений с производными Римана—Лиувилля функций одного действительного аргумента. Приведён пример простейшего линейного однородного дифференциального уравнения с двумя дробными производными. Продемонстрировано влияние требования суммируемости старшей производной на величину порядка младшей производной или начальные значения в условиях типа Коши. Введён специальный класс функций, допускающий несуммируемость старшей производной, в котором обоснована корректность видоизменённой задачи типа Коши и начальных задач с локально-нелокальными условиями.

Ключевые слова: *дробное исчисление, дробные дифференциальные уравнения, производная Римана—Лиувилля, задача типа Коши.*

Введение. Проблема корректности задач с начальными данными, предполагающая в первую очередь обоснование существования и единственности решения, является центральным моментом как теории обыкновенных дифференциальных уравнений и некоторых типов уравнений с частными производными, так и теории дифференциальных уравнений с дробными производными в том или ином смысле их определения. В данной работе эта проблема обсуждается применительно к дифференциальным уравнениям с производными Римана—Лиувилля относительно искомой функции одного действительного аргумента [1].

К настоящему моменту времени накоплено значительное количество материалов по теории и приложениям дробных дифференциальных уравнений [2–7]. Однако анализ публикаций, появившихся за последнее время в научной литературе, позволяет сделать вывод о том, что это направление дробного исчисления продолжает интенсивно развиваться, а разработка его теории ещё далека от своего завершения. Можно с уверенностью утверждать, что даже в линейном случае она не имеет той законченности, которой обладает теория обыкновенных линейных дифференциальных уравнений.

К числу основополагающих результатов теории дифференциальных уравнений с дробными производными следует отнести теоремы существования

Евгений Николаевич Огородников (к.ф.-м.н.), доцент, каф. прикладной математики и информатики.

и единственности решения так называемой задачи типа Коши для простейшего нелинейного дифференциального уравнения произвольного комплексного порядка

$$D_{ax}^{\alpha} y = f(x, y) \tag{1}$$

с начальными условиями

$$\lim_{x \to a+} D_{ax}^{\alpha-k} y = a_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

где α, $a_k \in \mathbb{C}$; $n-1 < \operatorname{Re}\alpha < n$ ($n = [\operatorname{Re}\alpha]+1$ при $\alpha \notin \mathbb{N}$ и $n = \alpha$, если $\alpha \in \mathbb{N}$); $D_{ax}^{\alpha} y = (D_{a+}^{\alpha} y)(x)$ — левосторонняя производная Римана—Лиувилля порядка α [1], а $D_{ax}^{\alpha-k} y$ — левосторонний интегро-дифференциальный оператор Римана—Лиувилля [5]. Ясно, что при $k = n$ в (2) $D_{ax}^{\alpha-n} y = I_{ax}^{n-\alpha} y = (I_{a+}^{n-\alpha} y)(x)$ — левосторонний интеграл Римана—Лиувилля порядка $n-\alpha$ [1].

Доказательства теорем опираются на идею редукции задачи типа Коши в различных заранее оговариваемых пространствах функций ($L^{\alpha}(a,b)$, $C_{n-\alpha}^{\alpha}$, $C_{n-\alpha,\gamma}^{\alpha}$ [2]), обеспечивающих суммируемость старшей производной (в уравнении (1) — это $D_{ax}^{\alpha} y$), к соответствующему интегральному уравнению типа Вольтерры второго рода и теорему Банаха о неподвижной точке. Указанная редукция осуществляется с помощью хорошо известного свойства дробных интегралов I_{ax}^{α} и производных D_{ax}^{α} Римана—Лиувилля [1], именно, если $f(x) \in L(a,b)$ и $f_{n-\alpha}(x) = I_{ax}^{n-\alpha} f \in AC^n[a,b]$, то почти всюду на отрезке $[a,b]$ справедливо равенство

$$I_{ax}^{\alpha} D_{ax}^{\alpha} f = f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f_{n-\alpha}^{(n-k)}(a+)}{\Gamma(\alpha-k+1)} (x-a)^{\alpha-k}, \tag{3}$$

где $f_{n-\alpha}^{(n-k)}(a+) = \lim\limits_{x \to a+} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} I_{ax}^{n-\alpha} f = \lim\limits_{x \to a+} D_{ax}^{\alpha-k} f = \left(D_{ax}^{\alpha-k} f\right)(a+)$, а задание значений этих пределов равенствами (2) как раз и формирует задачу типа Коши для уравнения (1).

В монографии [2] результаты исследования задачи (1), (2) распространяются на уравнения более общего вида

$$D_{ax}^{\alpha} y = f\left(x, y, D_{ax}^{\alpha_1} y, D_{ax}^{\alpha_2} y, \ldots, D_{ax}^{\alpha_m} y\right), \quad m \in \mathbb{N} \tag{4}$$

при условии, что

$$0 = \alpha_0 < \operatorname{Re}\alpha_1 < \operatorname{Re}\alpha_2 < \ldots < \operatorname{Re}\alpha_m < \operatorname{Re}\alpha, \tag{5}$$

и доказывается существование единственного в классе функций $L^{\alpha}(a,b)$ решения $y(x)$ задачи типа Коши с условием (2) в предположении, что известны значения

$$\lim_{x \to a+} D_{ax}^{\alpha_j - k_j} y = b_{kj}, \quad j = 1, 2, \ldots, n_j, \tag{6}$$

где $n_j = [\operatorname{Re}\alpha_j] + 1$ для $\alpha_j \notin \mathbb{N}$ и $n_j = \alpha_j$, если $\alpha_j \in \mathbb{N}$ (см. [2, Theorem 3.7]).

В формулировке указанной теоремы ничего не говорится о том, как связаны между собой условия (2) и (6): является ли задание условий (6) необходимым для однозначной разрешимости начальной задачи, а числа b_{kj} —

произвольными, или же между значениями b_k и b_{kj} существует определённая связь? Само доказательство теоремы также не даёт ответа на эти вопросы.

Как следствие из теоремы 3.7 (см. [2, Corollary 3.6]) констатируется существование единственного решения $y(x) \in L^\alpha(a,b)$ линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$D^\alpha_{ax} y + \sum_{j=0}^{m} a_j(x) D^{\alpha_j}_{ax} y = g(x)$$

с начальными условиями (2), переменными коэффициентами $a_j(x) \in L_\infty(a,b)$ $(j = 0,1,\dots,m)$ и свободным членом $g(x) \in L(a,b)$ при выполнении только неравенств (5).

В [2, Proposition 5.6] приведён также другой пример линейного уравнения:

$$D^\alpha_{0x} y - \lambda D^\beta_{0x} y - \sum_{k=0}^{m} A_k D^{\alpha_k}_{0x} y = f(x), \quad x > 0,$$

с действительными параметрами α, β, α_k такими, что $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_m < \beta < \alpha$, $n-1 < \alpha \leqslant n$, и действительными коэффициентами λ, $A_k \in \mathbb{R}$ $(k = 0,1,\dots,m)$, для которого задача типа Коши (2) при $a = 0$ будет иметь единственное решение лишь при выполнении условия $\beta < \alpha - n + 1$, обеспечивающего существование у этого дифференциального уравнения фундаментальной системы решений (см. [2, Theorem 5.3]).

Из отмеченного выше становится ясно, что постановка корректной задачи с начальными условиями (2) для дифференциального уравнения (4) должна зависеть от соотношения показателей порядка α и α_j $(j = 1,2,\dots,n_j)$. Более того, как будет показано ниже на простом примере, поиск решения в классе функций с суммируемой старшей производной будет накладывать определённые ограничения на свободу выбора начальных данных. Наконец, определение класса функций $L^\alpha(a,b)$ как множества функций $y(x) \in L(a,b)$: $D^\alpha_{ax} y \in L(a,b)$, приведённое в [2], также нуждается в уточнении.

1. Некоторые определения и замечания. Пусть $[a,b]$ — конечный отрезок действительной числовой оси $\mathbb{R}$, $f(x)$ — в общем случае комплекснозначная функция с областью определения $D(f) \subset [a,b]$. Известно, что абсолютно непрерывные функции $f(x)$ имеют почти всюду на $[a,b]$ суммируемую производную $f'(x)$, однако обратное утверждение ошибочно [8]. Поэтому всякий раз, говоря, что функция $f(x) \in L(a,b)$ имеет суммируемую дробную производную $D^\alpha_{ax} f$, в соответствии с определением 2.4 из [1, стр. 50] и замечанием к нему считаем, что $I^{n-\alpha}_{ax} \in AC^n[a,b]$, $n = [\mathrm{Re}\alpha] + 1$. Таким образом, класс функций $f(x)$ при $x \in (a,b)$, допускающих суммируемую производную порядка α, будем определять следующим образом:

$$L^\alpha(a,b) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left\{ f(x) : f(x) \in L(a,b),\ I^{n-\alpha}_{ax} f \in AC^n[a,b],\ n = [\mathrm{Re}\alpha] + 1 \right\}.$$

Решением начальной задачи для изучаемого дифференциального уравнения считаем любую суммируемую функцию, удовлетворяющую заданным начальным условиям и обращающую уравнение в тождество почти всюду на отрезке $[a,b]$.

2. Пример. Рассмотрим уравнение

$$D_{0x}^{\alpha}y - \lambda D_{0x}^{\beta}y = 0 \tag{7}$$

при $0 \leqslant \beta < \alpha \leqslant 2$, полагая для определённости $1 < \alpha \leqslant 2$, $\lambda \in \mathbb{C}$ $(\lambda \neq 0)$, $x \in (0, l)$. Изучим возможные постановки начальных задач для этого уравнения и покажем, что они зависят от класса функций, в котором ищется решение, и будут разными в зависимости от того, будет ли параметр β удовлетворять неравенствам $0 \leqslant \beta < \alpha - 1 \leqslant 1$ или же $\alpha - 1 \leqslant \beta < \alpha \leqslant 2$. Интересно, что структура решения всех начальных задач будет одной и той же, различным будет лишь поведение решений в окрестности точки $x = 0$.

2.1. Попытаемся найти решение дифференциального уравнения (7) в классе функций $L^{\alpha}(0, l)$ с начальными условиями вида (2):

$$\lim_{x \to 0+} D_{0x}^{\alpha-1}y = a_1, \quad \lim_{x \to 0+} D_{0x}^{\alpha-2}y = \lim_{x \to 0+} I_{0x}^{2-\alpha}y = a_2. \tag{8}$$

Обозначим $D_{0x}^{\alpha}y = u(x)$ и рассмотрим это дифференциальное уравнение с условиями (8), полагая $u(x)$ известной функцией. Применяя к левой и правой частям этого равенства оператор I_{0x}^{α} и используя тождество (3) с учётом (8), получим представление решения уравнения (7) в виде

$$y(x) = I_{0x}^{\alpha}u + \frac{a_1}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1} + \frac{a_2}{\Gamma(\alpha - 1)}x^{\alpha-2}. \tag{9}$$

Подставим $y(x)$ из (9) в уравнение (7). После некоторых вычислений получим интегральное уравнение Вольтерры второго рода для функции $u(x)$:

$$u(x) - I_{0x}^{\alpha-\beta}u = \frac{\lambda a_1}{\Gamma(\alpha - \beta)}x^{\alpha-\beta-1} + \frac{\lambda a_2}{\Gamma(\alpha - \beta - 1)}x^{\alpha-\beta-2}. \tag{10}$$

Обозначим через $f(x)$ правую часть уравнения (10). Заметим, что если $a_2 \neq 0$, то $f(x) \in L(0, l)$ лишь при выполнении условия $\beta < 1 - \alpha$. Тогда, обозначая через I — тождественный оператор, решение уравнения (10) можно записать в виде [9]

$$u(x) = f(x) + \lambda E_{0x;\lambda}^{\alpha-\beta,\alpha-\beta}f = \left(I + \lambda E_{0x;\lambda}^{\alpha-\beta,\alpha-\beta}\right)f, \tag{11}$$

где использован интегральный оператор [10]

$$E_{0x;\lambda}^{\alpha,\sigma}f = \int_0^x (x - t)^{\alpha-1}\,\mathrm{E}_{\sigma}\left[\lambda\,(x - t)^{\sigma}; \alpha\right] f\,(t)\,dt \tag{12}$$

с функцией типа Миттаг—Леффлера $\mathrm{E}_{\sigma}\,(\lambda x^{\sigma}; \mu)$ [9] в ядре (α, $\sigma > 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$). Некоторые свойства этого оператора показаны в работах [11–14], в частности, результат применения оператора (12) к степенной функции.

В дальнейшем изложении часто возникает необходимость вычисления значений оператора $I + \lambda E_{0x;\lambda}^{\alpha,\sigma}$ от степенных функций при $\alpha = \sigma$. Имеет место тождество

$$(I + \lambda E_{0x;\lambda}^{\sigma,\sigma})x^{\alpha-1} = \Gamma(\alpha)\mathrm{Exp}(\sigma, \alpha; \lambda; x), \tag{13}$$

где

$$\mathrm{Exp}(\sigma,\alpha;\lambda;x)=x^{\alpha-1}\mathrm{E}_{\sigma}(\lambda x^{\sigma};\alpha) \tag{14}$$

— двупараметрическая дробная экспоненциальная функция [15, 16].

Вернёмся к равенству (11) и, не определяя явного вида функции $u(x)$, подставим её представление в (9). Воспользовавшись коммутативностью оператора (12) с дробным интегралом Римана—Лиувилля [12], вычислим значения $I_{0x}^{\alpha}x^{\alpha-\beta-1}$ и $I_{0x}^{\alpha}x^{\alpha-\beta-2}$, ещё раз убеждаясь в необходимости условия $\alpha-\beta-1>0$. Тогда

$$y(x)=\bigl(I+\lambda E_{0x;\lambda}^{\alpha-\beta,\alpha-\beta}\bigr)\Bigl(\frac{\lambda a_1}{\Gamma(2\alpha-\beta)}x^{2\alpha-\beta-1}+\frac{\lambda a_2}{\Gamma(2\alpha-\beta-1)}x^{2\alpha-\beta-2}\Bigr)+ \\ +\frac{\lambda a_1}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}+\frac{\lambda a_2}{\Gamma(\alpha-1)}x^{\alpha-2}. \tag{15}$$

Вычислив с привлечением тождества (13) значения $\bigl(I+\lambda E_{0x;\lambda}^{\alpha-\beta,\alpha-\beta}\bigr)\lambda x^{2\alpha-\beta-1}$ и $\bigl(I+\lambda E_{0x;\lambda}^{\alpha-\beta,\alpha-\beta}\bigr)\lambda x^{2\alpha-\beta-2}$ в формуле (15), находим решение задачи типа Коши (7), (8) в терминах дробной экспоненциальной функции (14):

$$y(x)=a_1\mathrm{Exp}\left(\alpha-\beta,\alpha;\lambda;x\right)+a_2\mathrm{Exp}\left(\alpha-\beta,\alpha-1;\lambda;x\right). \tag{16}$$

Достоверность найденного решения легко проверяется непосредственной подстановкой $y(x)$ из (16) в уравнение (7). Также проверяется соблюдение начальных условий (8), если $\beta<1-\alpha$. Для вычислений удобно использовать формулы дробного интегрирования и дифференцирования дробной экспоненциальной функции [11], которые можно объединить в одну запись:

$$D_{0x}^{\alpha}\mathrm{Exp}\left(\sigma,\mu;\lambda;x\right)=\mathrm{Exp}\left(\sigma,\mu-\alpha;\lambda;x\right), \tag{17}$$

где D_{0x}^{α} — интегро-дифференциальный оператор Римана—Лиувилля [5].

Заметим, что в случае $\mu=\alpha>0$ формула (17) будет иной:

$$D_{0x}^{\alpha}\mathrm{Exp}\left(\sigma,\alpha;\lambda;x\right)=\lambda\mathrm{Exp}\left(\sigma,\sigma;\lambda;x\right).$$

2.2. Предъявим теперь формальное решение уравнения (7) в классе функций $L^{\alpha}(0,l)$ с начальными условиями (8), полагая, что они влекут за собой равенства

$$\lim_{x\to0+}D_{0x}^{\beta-1}y=\lim_{x\to0+}D_{0x}^{\beta-2}y=\lim_{x\to0+}I_{0x}^{2-\beta}y=0. \tag{18}$$

Применим к левой и правой частям уравнения (7) оператор I_{0x}^{α}. С учётом формулы (3), полугруппового свойства дробных интегралов Римана—Лиувилля и тождества $I_{0x}^{\beta}D_{0x}^{\beta}y=y(x)$, справедливого при условиях (18), задача редуцируется к интегральному уравнению Вольтерры второго рода

$$y(x)-\lambda I_{0x}^{\alpha-\beta}y=\frac{a_1}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}+\frac{a_2}{\Gamma(\alpha-1)}x^{\alpha-2}. \tag{19}$$

Его решение

$$y(x)=\bigl(I+\lambda E_{0x;\lambda}^{\alpha-\beta,\alpha-\beta}\bigr)\Bigl(\frac{a_1}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}+\frac{a_2}{\Gamma(\alpha-1)}x^{\alpha-2}\Bigr)$$

после вычислений по формуле (13) приводит к ранее найденному (см. (16)).

Отметим простоту этого решения и тот факт, что относительно параметра β не делалось никаких дополнительных предложений, кроме $0 < \beta < \alpha < 2$. Однако при проверке соблюдения этим решением начальных условий (8) выясняется, что

$$D_{0x}^{\alpha-1}y = a_1 E_{\alpha-\beta}(\lambda x^{\alpha-\beta}; 1) + a_2 \lambda x^{\alpha-\beta-1} E_{\alpha-\beta}(\lambda x^{\alpha-\beta}; \alpha-\beta) \underset{x\to 0+}{\to} a_1,$$

если $\beta < \alpha - 1$ или $a_2 = 0$. В то же время

$$D_{0x}^{\alpha-2}y = I_{0x}^{2-\alpha}y = a_1 x E_{\alpha-\beta}(\lambda x^{\alpha-\beta}; 2) + a_2 E_{\alpha-\beta}(\lambda x^{\alpha-\beta}; 1) \underset{x\to 0+}{\to} a_2$$

при любых $\beta : 0 < \beta < \alpha < 2$.

Интересно, что нового внесёт в решение задачи типа Коши (7), (8) предположение о существовании пределов

$$\lim_{x\to 0+} D_{0x}^{\beta-1}y = b_1, \quad \lim_{x\to 0+} D_{0x}^{\beta-2}y = \lim_{x\to 0+} I_{0x}^{2-\beta}y = b_2,$$

где b_1 и b_2 — некоторые неравные одновременно нулю числа, что и предполагается в [2, Theorem 3.7].

Пусть для определённости $1 < \beta < \alpha < 2$. Применим к левой и правой частям (7) оператор I_{0x}^{α}. Используя формулу (3) для композиций операторов $I_{0x}^{\alpha}D_{0x}^{\alpha}$ и $I_{0x}^{\beta}D_{0x}^{\beta}$ и вычисляя значение интегралов $I_{0x}^{\alpha-\beta}x^{\beta-1}$ и $I_{0x}^{\alpha-\beta}x^{\beta-2}$, получим интегральное уравнение

$$y(x) - \lambda I_{0x}^{\alpha-\beta}y = \frac{a_1 - \lambda b_1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} + \frac{a_2 - \lambda b_2}{\Gamma(\alpha-1)} x^{\alpha-2},$$

решение которого имеет ту же структуру, что и (16):

$$y(x) = (a_1 - \lambda b_1)\mathrm{Exp}(\alpha-\beta, \alpha; \lambda; x) + (a_2 - \lambda b_2)\mathrm{Exp}(\alpha-\beta, \alpha-1; \lambda; x).$$

Проверка начальных условий приводит к следующим ограничениям на значения a_1, a_2, b_1 и b_2: $D_{0x}^{\alpha}y \underset{x\to 0+}{\to} a_1$ тогда и только тогда, когда $a_2 - \lambda b_2 = 0$ и $b_1 = 0$, а $D_{0x}^{\alpha-2}y \underset{x\to 0+}{\to} a_2$ лишь при $b_2 = 0$. Но тогда и $a_2 = 0$, и, таким образом, единственное решение дифференциального уравнения (7) в классе функций $L^{\alpha}(0, l)$ действительно существует и имеет вид

$$y(x) = a_1 \mathrm{Exp}(\alpha-\beta, \alpha; \lambda; x),$$

однако в начальных условиях (8) следует положить $a_2 = 0$.

Уже сейчас можно сделать вывод о том, что изначальное требование суммируемости старшей производной в дифференциальном уравнении (7) является сильным требованием. Интегральное уравнение, к которому редуцируется исходная задача с начальными данными, может иметь решение с несуммируемой старшей производной. Как будет показано в следующем пункте, это решение удовлетворяет уравнению (7) в интервале $x \in (0, l)$ и видоизменённым начальным данным.

2.3. Пусть в уравнении (7) $\beta \in (0,1)$, но условие $\beta < \alpha - 1$ нарушено, и тем самым выполняются неравенства $\alpha - 1 \leqslant \beta < 1 < \alpha \leqslant 2$.

Дифференциальное уравнение (7) по определению производной Римана—Лиувилля можно записать в виде

$$\frac{d}{dx}\big(D_{0x}^{\alpha-1}y - \lambda I_{0x}^{1-\beta}y\big) = 0.$$

Чтобы проинтегрировать это уравнение в пределах от 0 до x, потребуем, чтобы $D_{0x}^{\alpha-1}y - \lambda I_{0x}^{1-\beta}y \in L(0,l)$, и будем считать заданным значение

$$\lim_{x\to 0+}\big(D_{0x}^{\alpha-1}y - \lambda I_{0x}^{1-\beta}y\big) = a_1. \tag{20}$$

Получим интегро-дифференциальное уравнение $D_{0x}^{\alpha-1}y - \lambda I_{0x}^{1-\beta}y = a_1$. Применим к левой и правой частям этого уравнения оператор $I_{0x}^{\alpha-1}$ и используем тождество (3), считая заданным значение

$$\lim_{x\to 0+} D_{0x}^{\alpha-2}y = \lim_{x\to 0+} I_{0x}^{2-\alpha}y = a_2. \tag{21}$$

В результате приходим вновь к интегральному уравнению (19) и его известному решению (16). Нетрудно убедиться, что при $\beta > \alpha - 1$

$$\lim_{x\to 0+} D_{0x}^{\alpha-1}y = +\infty, \quad \lim_{x\to 0+} I_{0x}^{1-\beta}y = +\infty,$$

в то время как предел в (20) имеет конечное значение a_1.

2.4. Рассмотрим случай $1 < \beta < \alpha \leqslant 2$. Интегрируя один раз уравнение (7) в пределах от 0 до x при условии существования предела

$$\lim_{x\to 0+}\big(D_{0x}^{\alpha-1}y - \lambda D_{0x}^{\beta-1}y\big) = a_1, \tag{22}$$

получим дифференциальное уравнение

$$D_{0x}^{\alpha-1}y - \lambda D_{0x}^{\beta-1}y = a_1, \tag{23}$$

в котором параметры α, β удовлетворяют неравенствам $0 < \beta - 1 < \alpha - 1 \leqslant 1$.

Применяя оператор $I_{0x}^{\alpha-1}$ к левой и правой частям уравнения (23), с учётом начального условия (21) опять приходим к интегральному уравнению (19) и его решению (16).

Можно поступить иначе, интегрируя левую и правую части дифференциального уравнения (23) ещё раз при условии

$$\lim_{x\to 0+}\big(D_{0x}^{\alpha-2}y - \lambda D_{0x}^{\beta-2}y\big) = \lim_{x\to 0+}\big(I_{0x}^{2-\alpha}y - \lambda I_{0x}^{2-\beta}y\big) = a_2. \tag{24}$$

Получим интегральное уравнение $I_{0x}^{2-\alpha}y - \lambda I_{0x}^{2-\beta}y = a_1 x + a_2$. Применив к левой и правой частям этого интегрального уравнения оператор $D_{0x}^{2-\alpha}$ и вычислив значение $D_{0x}^{2-\alpha}(a_1 x + a_2)$, также приходим к интегральному уравнению (19), не используя тождество (3).

Заметим, что при $0 < \beta - 1 < \alpha - 1 \leqslant 1$ фактически $\lim\limits_{x\to 0+} I_{0x}^{2-\beta} y = 0$, и условие (24) равносильно (21). Это позволяет утверждать, что при α и β таких, что $1 < \alpha \leqslant 2$, $0 \leqslant \beta < \alpha$, существует единственное решение (16) дифференциального уравнения (7) с условиями (22) и (24).

2.5. Остался нерассмотренным случай $\beta = \alpha - 1$. Дифференциальное уравнение (7) в этом случае имеет вид $D_{0x}^{\alpha} y - \lambda D_{0x}^{\alpha-1} y = 0$, и его решение с начальными условиями (20) при $\beta = \alpha - 1$ и (21) будет следующим:

$$y(x) = a_1 \mathrm{Exp}(1, \alpha; \lambda; x) + a_2 \mathrm{Exp}(1, \alpha - 1; \lambda; x). \tag{25}$$

Хорошо видно, что также будет существовать

$$\lim_{x\to 0+} D_{0x}^{\alpha-1} y = \lim_{x\to 0+} (a_1 + \lambda a_2)\, e^{\lambda x} = a_1 + \lambda a_2.$$

В этом случае можно поставить задачу с условием $\lim\limits_{x\to 0+} D_{0x}^{\alpha-1} y = a_0$ вместо (20). Её решение находится по формуле (25), в которой следует заменить a_1 на $a_0 - \lambda a_2$. Решения дифференциального уравнения (7) в предельных случаях $\beta = 0$ и (или) $\alpha = 2$ легко находятся из формулы (16) предельными переходами по соответствующим параметрам.

3. Видоизменённая задача типа Коши. Пусть α и $\beta \in \mathbb{R}$ такие, что $\beta < \alpha$, $\alpha \in (n-1, n]$, $\beta \in (m-1, m]$, где $m \leqslant n$. Применительно к дифференциальным уравнениям с оператором $D_{0x}^{\alpha} - \lambda D_{0x}^{\beta}$ в левой части уравнения введём класс функций

$$L^{\alpha,\beta}(a,b) \overset{\mathrm{def}}{=} \bigl\{ f(x) : f(x) \in L(a,b), \\ I_{ax}^{n-\alpha} f \in AC^{n-m}[a,b], \bigl(D_{ax}^{\alpha-m} - \lambda I_{ax}^{m-\beta}\bigr) f \in AC^{m}[a,b] \bigr\}.$$

Первое условие, определяющее класс $L^{\alpha,\beta}(a,b)$, обеспечивает существование у функции $f(x)$ почти всюду на отрезке $[a,b]$ суммируемой дробной производной $D_{ax}^{\alpha-m} f$, а второе — гарантирует суммируемость линейной комбинации $D_{0x}^{\alpha} f - \lambda D_{0x}^{\beta} f$.

Если $m = n$, то считая $AC^0[a,b] \overset{\mathrm{def}}{=} C[a,b]$, определяем класс $L^{\alpha,\beta}(a,b)$:

$$L^{\alpha,\beta}(a,b) \overset{\mathrm{def}}{=} \bigl\{ f(x) : f(x) \in L(a,b), \\ I_{ax}^{n-\alpha} f \in C[a,b], \bigl(I_{ax}^{n-\alpha} - \lambda I_{ax}^{n-\beta}\bigr) f \in AC^{n}[a,b] \bigr\}.$$

Для модельного дифференциального уравнения (7) при значениях параметров α и β из указанных выше промежутков поставим следующую задачу.

Задача. Найти принадлежащее классу $L^{\alpha,\beta}(0,l)$ решение уравнения (7), удовлетворяющее следующим начальным условиям:

$$\lim_{x\to 0+} \Bigl(D_{0x}^{\alpha-k} - \lambda D_{0x}^{\beta-k} \Bigr) y = a_k, \quad k = 1, 2, \ldots, m; \tag{26}$$

$$\lim_{x\to 0+} D_{0x}^{\alpha-m-j} y = a_{m+j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n-m. \tag{27}$$

При указанных значениях параметров α и β уравнение (7) можно записать в виде
$$\left(\frac{d}{dx}\right)^m \left(D_{0x}^{\alpha-m}y - \lambda D_{0x}^{\beta-m}y\right) = 0.$$
Интегрируя m раз левую и правую части этого уравнения с учётом условий (26), приходим к интегро-дифференциальному уравнению
$$D_{0x}^{\alpha-m}y - \lambda I_{0x}^{m-\beta}y = \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k}{(m-k)!}x^{m-k}. \qquad (28)$$

Применим оператор $I_{0x}^{\alpha-m}$ к левой и правой частям равенства (28) и воспользуемся тождеством (3) с учётом условий (27). Получим уравнение
$$y(x) - \lambda I_{0x}^{\alpha-\beta}y = \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k}{(m-k)!}I_{0x}^{\alpha-m}x^{m-k} + \sum_{j=1}^{n-m} \frac{a_{m+j}}{\Gamma\left(\alpha-m-j+1\right)}x^{\alpha-m-j}.$$
Вычислим значение $I_{0x}^{\alpha-m}x^{m-k}$ и переобозначим $m+j=k$, где $k=m+1, m+2, \ldots, n$. Тогда
$$y(x) - \lambda I_{0x}^{\alpha-\beta}y = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\Gamma\left(\alpha-k+1\right)}x^{\alpha-k}. \qquad (29)$$
Решение интегрального уравнения (29) после вычисления по формуле (13) значений $\left(I + E_{0x;\lambda}^{\alpha-\beta,\alpha-\beta}\right)x^{\alpha-k}$ принимает вид
$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathrm{Exp}(\alpha-\beta, \alpha-k+1; \lambda; x). \qquad (30)$$

Если $m=n$, условия (27) исчезают, а n-кратное интегрирование уравнения (7) с начальными условиями (26) приводит к интегральному уравнению
$$I_{0x}^{n-\alpha}y - \lambda I_{0x}^{n-\beta}y = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{(n-k)!}x^{n-k}. \qquad (31)$$

Применяя к левой и правой частям уравнения (31) оператор $D_{0x}^{n-\alpha}$ и вычисляя значение $D_{0x}^{n-\alpha}x^{n-k}$, вновь приходим к интегральному уравнению (29). Заметим, что последнее условие в (26) при $m=n$ можно заменить условием $\lim\limits_{x\to 0+} I_{0x}^{n-\alpha}y = a_n$, так как при $n-\alpha < n-\beta$, $\lim\limits_{x\to 0+} I_{0x}^{n-\beta}y = 0$.

Полученный результат можно сформулировать в виде теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $\alpha \in (n-1, n]$, $\beta < \alpha$. *Тогда для дифференциального уравнения* (7) *корректно поставлена видоизменённая задача типа Коши с начальными условиями* (26), *где* $k = 1, 2, \ldots, n$, *решение которой определяется формулой* (30).

Доказательство теоремы очевидно. Существование обосновывается непосредственной подстановкой решения (30) в уравнение (7), также непосредственно проверяется соблюдение решением начальных условий, причём в случае $\beta \in (m-1, m]$, $m < n$, дробные интегралы в (26) $D_{0x}^{\beta-k} y = I_{0x}^{k-\beta} y \underset{x\to 0+}{\to} 0$, для $k = m+1, m+2, \ldots, n$, и эти $n-m$ условий переходят фактически в условия (27). Единственность доказывается от противного, а устойчивость решения следует из непрерывной зависимости решения (30) от параметров a_k, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Следствие. Нетрудно показать, что система функций

$$y_k(x) = \operatorname{Exp}\left(\alpha-\beta, \alpha-k+1; \lambda; x\right), \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

образует фундаментальную систему решений для дифференциального уравнения (7) при $\alpha \in (n-1, n]$, $\beta < \alpha$, а значит функция

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k \operatorname{Exp}\left(\alpha-\beta, \alpha-k+1; \lambda; x\right),$$

где C_k — произвольные константы, может быть названа общим решением уравнения (7). Тем самым фактически сказано, что общим решением дифференциального уравнения дробного порядка мы называем решение видоизменённой задачи типа Коши с произвольными начальными данными.

Замечание 1. Видоизменённая постановка задачи типа Коши использовалась авторами работы [11] в постановке начальной задачи для одного модельного дробного осцилляционного уравнения второго порядка с дробной производной $D_{0t}^{1+\beta} u$ ($\beta \in [0, 1]$), порядок которой больше или равен единице.

Замечание 2. Дифференциальное уравнение (7) упоминается в работе А. В. Псху [17], где с позиций общего решения при $\alpha \in (1{,}2)$ отмечена невозможность построения решения задачи типа Коши с условиями вида (8) для произвольной пары чисел a_1 и a_2. В этой же работе (см. также [18, 19]) рассмотрено неоднородное линейное дифференциальное уравнение с оператором $D_{0x}^{\alpha} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i D_{0x}^{\alpha_i}$, где $\alpha > 0$, $\alpha \in (n-1, n]$, $n \in \mathbb{N}$; $\alpha > \alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_m$; $\lambda_i \in \mathbb{R}$, и найдено решение видоизменённой задачи типа Коши с начальными условиями, наложенными на определённые линейные комбинации $D_{0x}^{\alpha-k} y - \sum_i \lambda_i D_{0x}^{\alpha_i - k} y$ ($k = 1, 2, \ldots, n$), в терминах гиперсвёртки с функцией Райта.

Замечание 3. Доказательству теорем существования и единственности решения задач типа Коши с условиями вида (2) для дифференциальных уравнений (1), (4) при $m = 1$ и одного класса квазилинейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами посвящены работы В. А. Чадаева [20–22]. В указанных публикациях, а также в ряде других работ этого же автора существование и единственность начальной задачи обосновывается в специальных весовых классах непрерывных функций, причём последнее (при $k = n$ и $a = 0$) в (2) интегральное условие заменяется локальным условием вида

$$\lim_{x\to 0+} x^{n-\alpha} y(x) = a_n. \tag{32}$$

Однако в постановках начальных задач предполагается, что порядок младших дробных производных меньше $\min\{1, \alpha\}$, где $\alpha \in (n-1, n]$ — порядок старшей дробной производной. Приведённый выше пример линейного дифференциального уравнения (7) показал, что задача типа Коши (2) с произвольными не равными нулю числовыми данными поставлена корректно лишь при условии $\beta < \alpha - n + 1$. В случае нелинейных дифференциальных уравнений вида (1) и (4) ситуация существенно осложняется, что потребует, вообще говоря, дополнительных исследований.

Возвращаясь к дифференциальному уравнению (7) в связи с возможностью постановки локальных начальных условий вида (32), приведём такой результат.

Теорема 2. *Пусть* α *и* $\beta \in \mathbb{R}$ *такие, что* $\alpha \in (n-1, n]$, $\beta < \alpha$ *и* $\alpha - s \leqslant \beta < \alpha - s + 1$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$. *Тогда существует единственное решение дифференциального уравнения* (7) *с начальными условиями* (26) *для* $k = 1, 2, \ldots, n - s$ *и локальными условиями*

$$\lim_{x \to 0+} \left[x^{n-\alpha} y(x)\right]^{(k)} = b_{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, s-1. \tag{33}$$

Решение начальной задачи (26), (33) *может быть найдено по формуле* (30) *заменой коэффициентов* a_{n-k} *на* $\frac{b_{n-k}}{k!}\Gamma(\alpha - n + k + 1)$ *и принадлежит классу* $C^{(s-1)}_{n-\alpha}[0, l]$ *функций, непрерывно дифференцируемых на отрезке* $[0, l]$ *до порядка* $s - 1$ *с весом* $x^{n-\alpha}$.

В справедливости основного утверждения теоремы 2 нетрудно убедиться путём непосредственного вычисления производных $[x^{n-\alpha} y(x)]^{(k)}$. Тот же результат можно получить, дифференцируя тождество

$$x^{n-\alpha}\bigl(y - \lambda I^{\alpha-\beta}_{0x} y\bigr) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\Gamma(\alpha - k + 1)} x^{n-k}, \tag{34}$$

которое возникает из интегрального уравнения (29) после подстановки в него решения (30). Достаточно убедиться в том, что $\lim\limits_{x \to 0+} \bigl(x^{n-\alpha} I^{\alpha-\beta}_{0x} y\bigr)^{(k)} = 0$ для $k = 0, 1, \ldots, s - 1$.

Замечание 4. Если продолжить дифференцирование тождества (34) при $k = s - 1, s, \ldots, n - 1$, то легко убедиться в возможности замены начальных условий (26) условиями вида

$$\lim_{x \to 0+} \Bigl[x^{n-\alpha}\bigl(y - \lambda I^{\alpha-\beta}_{0x} y\bigr)\Bigr]^{(k)} = b_k. \tag{35}$$

Замечание 5. При $\beta = 0$ дифференциальное уравнение (7) представляет собой хорошо известное однородное уравнение Барретта [23], а формула (30) — его решение с начальными данными (2), которым эквивалентны в этом случае условия (26) и (27). Ясно, что это же решение может быть получено с локальными начальными условиями (33) при $k = 0, 1, \ldots, n - 1$.

Заключение. Для уравнения Баррета (уравнение (7) при $\beta = 0$) условия типа Коши (2), в которых a_k — произвольные константы, являются естественными начальными условиями, переходящими при $\alpha = n$ в классические условия Коши: $y(a) = a_n$, $y'(a) = a_{n-1}$, …, $y^{(n-1)}(a) = a_1$. Однако попытка построения теории начальных задач для любых дифференциальных уравнений с производными Римана—Лиувилля по аналогии с теорией задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений даже в линейном случае будет наталкиваться на определённые трудности, приводящие к сужению множества допускаемых дифференциальным уравнением решений из-за необходимости ограничений на параметры в самом уравнении либо за счёт требования однородности части начальных условий.

Анализ процесса решения задачи типа Коши (2) для простейшего линейного дифференциального уравнения с двумя производными Римана—Лиувилля (7) в пункте **2.1** настоящей работы показал, что требование суммируемости старшей дробной производной в уравнении сразу же накладывает ограничения либо на величину порядка младшей производной, либо на свободу выбора начальных числовых значений в условии (2). Формальная редукция этого дифференциального уравнения к интегральному уравнению, продемонстрированная в пункте **2.2**, приводит к нахождению решений, удовлетворяющих обоим уравнениям, но не подчиняющихся заданным начальным условиям, и, следовательно, является неэквивалентной.

Таким образом, ряд хорошо известных результатов по теории задачи Коши для дробных дифференциальных уравнений требует как минимум некоторых уточнений. Практически все авторы предъявляют безукоризненные доказательства теорем существования и единственности решений интегральных уравнений, но они не всегда эквивалентны исходной задаче с начальными данными. По этому поводу авторы монографии [2] делают обширное замечание с приведением многочисленных литературных источников (см. [2, p. 139]).

Работа выполнена в рамках Аналитической ведомственной целевой программой «Развитие научного потенциала высшей школы» (*проект* № РНП.2.1.1/745).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987. — 688 с.
2. *A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo* Theory and Applications of Fractional Differential Equations / North-Holland Mathematics Studies, 204; ed. J. van Mill. — Amsterdam: Elsevier, 2006. — 523 p.
3. *Podlubny I.* Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, Some Methods of Their Solution and Some of Their Applications / Mathematics in Science and Engineering, 198. — San Diego: Academic Press, 1999. — 340 p.
4. *Miller K. S., Ross B.* An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. — New York: Jon Wiley & Sons. Inc., 1993. — 366 p.
5. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. — М.: Физматлит, 2003. — 272 с.
6. *Псху А. В.* Краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными дробного и континуального порядка. — Нальчик: КБНЦ РАН, 2005. — 186 с.
7. *Вірченко Н. О., Рибак В. Я.* Основи дробового інтегро-дифференцірування. — Київ: Задруга, 2007. — 361 с.
8. *Колмогоров А. Н., Фомин А. Н.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1968. — 496 с.
9. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. — М.: Наука, 1966. — 672 с.
10. *Огородников Е. Н.* О некоторых краевых задачах для системы уравнений Бицадзе—Лыкова с инволютивной матрицей / В сб.: *Тр. Десятой межвузовской научн. конф.* Ч. 3: Дифференциальные уравнения и краевые задачи / Мат. моделирование и краевые задачи. — Самара: СамГТУ, 2000. — С. 119–126.
11. *Огородников Е. Н., Яшагин Н. С.* Постановка и решение задач типа Коши для дифференциальных уравнений второго порядка с дробными производными Римана—Лиувилля // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2010. — № 1(20). —

С. 24–36.

12. *Огородников Е. Н.* Корректность задачи Коши—Гурса для системы вырождающихся нагруженных гиперболических уравнений в некоторых специальных случаях и её равносильность задачам с нелокальными краевыми условиями // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2004. — № 26. — С. 26–38.
13. *Огородников Е. Н., Арланова Е. Ю.* Некоторые нелокальные аналоги задачи Коши—Гурса и существенно нелокальные краевые задачи для систем уравнений Бицадзе—Лыкова в специальных случаях // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2005. — № 24. — С. 24–39.
14. *Огородников Е. Н., Яшагин Н. С.* О некоторых свойствах операторов с функцией Миттаг—Леффлера в ядрах / В сб.: *Тр. Шестой Всероссийск. научн. конф. с междунар. участием.* Ч. 3: Дифференциальные уравнения и краевые задачи / Мат. моделирование и краевые задачи. — Самара: СамГТУ, 2009. — С. 181–188.
15. *Огородников Е. Н.* О задаче Коши для модельных дифференциальных уравнений дробных осцилляторов / В сб.: *Современные проблемы вычислительной мат. и мат. физики*: Тезисы докладов Междунар. конференции (Москва, МГУ, 16–18 июня 2009 г.). — М.: ВМК МГУ; МАКС Пресс, 2009. — С. 229–231.
16. *Огородников Е. Н., Яшагин Н. С.* Некоторые специальные функции в решении задачи Коши для одного дробного осцилляционного уравнения // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2009. — № 1(18). — С. 276–279.
17. *Псху А. В.* К теории задачи Коши для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка // *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, 2009. — Т. 11, № 1. — С. 61–65.
18. *Псху А. В.* К теории задачи Коши для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка / В сб.: *Тр. Седьмой Всероссийской научн. конф. с междунар. участием.* Ч. 3: Дифференциальные уравнения и краевые задачи / Мат. моделирование и краевые задачи. — Самара: СамГТУ, 2010. — С. 248–251.
19. *Псху А. В.* Начальная задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка / В сб.: *Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики*: Материалы Международного Российско-Болгарского симпозиума. — Нальчик-Хабез, 2010. — С. 194–196.
20. *Чадаев В. А.* Видоизменённая задача Коши в локально-нелокальной постановке для нелинейного междупредельного дифференциального уравнения // *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, 2009. — Т. 11, № 1. — С. 93–96.
21. *Чадаев В. А.* Задача Коши в локально-нелокальной постановке для нелинейного уравнения дробного порядка в определённом классе // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2010. — № 1(20). — С. 214–217.
22. *Чадаев В. А.* Задача Коши в локально-нелокальной постановке для квазилинейного междупредельного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами в выбранном классе / В сб.: *Тр. Седьмой Всероссийск. научн. конф. с междунар. участием.* Ч. 3: Дифференциальные уравнения и краевые задачи / Мат. моделирование и краевые задачи. — Самара: СамГТУ, 2010. — С. 281–282.
23. *Barrett I. H.* Differential equations of non-integer oder // *Canad. J. Math*, 1954. — Vol. 6, No. 4. — P. 529–541.

Поступила в редакцию 05/VII/2010;
в окончательном варианте — 06/IX/2010.

MSC: 34A08, 26A33, 45K05

SOME ASPECTS OF INITIAL VALUE PROBLEMS THEORY FOR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH RIEMANN–LIOUVILLE DERIVATIVES

E. N. Ogorodnikov

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia.

E-mail: eugen.ogo@gmail.com

Some subjects of the well-formed initial value problems for ordinary differential equations with Riemann–Liouville derivatives are discussed. As an example the simplest linear homogeneous differential equation with two fractional derivatives is cited. It's shown, that the requirement of the highest derivative summability influence the value of the lowest derivative order or the initial values in Cauchy type conditions. The specific class of functions, allowing the non-summability of the highest derivative, is introduced. The correctness of the modified Cauchy type problem and initial value problems with local and nonlocal conditions is substantiated.

Key words: *fractional calculus, fractional differential equations, Riemann–Liouville derivatives, Cauchy type problem.*

Original article submitted 05/VII/2010;
revision submitted 06/IX/2010.

Eugeniy N. Ogorodnikov (Ph. D. (Phys. & Math.)), Associate Professor, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science.