Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2011. № 2 (23). С. 194–199

УДК 517.51+517.98

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФРЕЙМОВ ПАРСЕВАЛЯ

И. С. Рябцов

Самарский государственный университет,
443011, Самара, ул. Академика Павлова, 1.

E-mails: tinnulion@mail.ru

Работа посвящена исследованию свойств фреймов Парсеваля в конечномерных пространствах, а именно возможности представления одних фреймов как суммы других. Даётся новый подход к построению произвольных фреймов Парсеваля, а также описывается алгоритм разложения произвольного фрейма в сумму. В работе описывается ряд особых свойств равноугольных жёстких фреймов применительно к поставленным задачам.

Ключевые слова: *фреймы Парсеваля, эквивалентность фреймов, представление фреймов, равноугольные фреймы, жёсткие фреймы.*

Введение. Пусть M, N — натуральные числа, $M \geqslant N$. Пространство $\mathbb{R}^N$ наделяется стандартным скалярным произведением $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ и согласованной нормой $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Определение. Набор элементов $F = \{f_i\}_{i=1}^M$ называется *фреймом* в пространстве $\mathbb{R}^N$, если существуют числа A, $B > 0$ такие, что для всех $x \in \mathbb{R}^N$ выполняется двойное неравенство

$$A\|x\|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{M} |\langle x, f_i\rangle|^2 \leqslant B\|x\|^2.$$

Оговоримся, что среди векторов фрейма нет нулевых и коллинеарных векторов. В данной работе ограничимся рассмотрением фреймов в конечномерных пространствах с конечным числом элементов.

Числа A и B называются границами фрейма. Они определены неоднозначно, супремум множества всех нижних границ и инфимум множества всех верхних границ фрейма называются *оптимальными границами фрейма.* Если оптимальные нижние и верхние границы фрейма совпадают и выполняется равенство

$$A\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{M} |\langle x, f_i\rangle|^2, \tag{1}$$

то будем называть такой фрейм *жёстким.* Если при этом $A = 1$, то фрейм будем называть *фреймом Парсеваля.* Для жёстких фреймов выполняется равенство, которое эквивалентно равенству (1):

$$Ax = \sum_{i=1}^{M} \langle x, f_i\rangle f_i. \tag{1$'$}$$

Игорь Сергеевич Рябцов, аспирант, каф. функционального анализа и теории функций.

Если норма каждого вектора фрейма равна единице, то фрейм будем называть *нормированным*. Доказательство приведенных утверждений и более полную информацию по теории фреймов можно найти в работах [1, 2].

Определение. Определим оператор T для произвольного фрейма $F = \{f_i\}_{i=1}^M$. Пусть существует пара векторов $f_k,\, f_p \in F$ с $\langle f_k,\, f_p\rangle = \|f_k\|\|f_p\|$ и $k \neq p$. Тогда оператор действует на фрейм по следующему правилу:

$$T(F) = F \backslash \{f_k,\, f_p\} \cup \left\{ \sqrt{\|f_k\|^2 + \|f_p\|^2}\, \frac{f_k}{\|f_k\|} \right\}. \tag{2}$$

Если такой пары векторов не существует, то $T(F) = F$. Действие оператора на фрейм можно упростить по формуле

$$T(F) = F \backslash \{f_k,\, f_p\} \cup T\left(\{f_k,\, f_p\}\right). \tag{2$'$}$$

Легко видеть, что этот оператор фактически заменяет пару коллинеарных векторов на один.

Определение. Поскольку число коллинеарных векторов в конечном фрейме конечно, то, применяя оператор T достаточное число раз, получим фрейм без коллинеарных векторов. Обозначим такой оператор T_∞:

$$T_\infty = T \circ \cdots \circ T.$$

Основные результаты.

Определение. Будем называть фрейм Парсеваля $F = \{f_i\}_{i=1}^M$ *составным*, если существует набор неотрицательных констант $\{\alpha_i\}_{i=1}^M$ такой, что система векторов $F_\alpha = \{\alpha_i f_i\}_{i=1}^M$ — также фрейм Парсеваля, при этом хотя бы одно α_i равно нулю. Будем называть фрейм Парсеваля $F = \{f_i\}_{i=1}^M$ *простым*, если он не является составным.

Теорема. *Для любого простого фрейма Парсеваля $F = \{f_i\}_{i=1}^M$ и ортогональной матрицы Q система векторов $\{Qf_i\}_{i=1}^M$ является простым фреймом Парсеваля.*

Доказательство. Проведём доказательство методом от противного. Предположим, что $\{f_i\}_{i=1}^M$ — простой фрейм Парсеваля, а $\{Qf_i\}_{i=1}^M$ — составной фрейм. Тогда по определению существует набор коэффициентов трансформации $\{\alpha_i\}_{i=1}^M$ такой, что фрейм $\{\alpha_i Qf_i\}_{i=1}^M$ — фрейм Парсеваля, при этом какая-то из констант α_i равна нулю. Но тогда согласно определению фрейма Парсеваля имеем

$$x = \sum_{i=1}^M \langle x,\, \alpha_i Qf_i\rangle \alpha_i Qf_i = Q\sum_{i=1}^M \langle QQ^\top x,\, Q\alpha_i f_i\rangle \alpha_i f_i = \\ = Q\sum_{i=1}^M \langle Q^\top x,\, \alpha_i f_i\rangle \alpha_i f_i = \sum_{i=1}^M \langle x,\, \alpha_i f_i\rangle \alpha_i f_i.$$

Получаем, что система $\{f_i\}_{i=1}^M$ — составной фрейм Парсеваля, но это противоречит первоначальному предположению. $\square$

Определение. *Суммой* пары фреймов Парсеваля $F_1 = \left\{f_i^{F_1}\right\}_{i=1}^{M_1}$ и $F_2 = \left\{f_i^{F_2}\right\}_{i=1}^{M_2}$ будем называть фрейм Парсеваля, который состоит из векторов

$$F_1 \oplus F_2 = T_\infty \left(\left\{f_i^{F_1}\right\}_{i=1}^{M_1} \cup \left\{f_i^{F_2}\right\}_{i=1}^{M_2} \right).$$

Число векторов в результирующем фрейме не превосходит $M_1 + M_2$. Данная операция является коммутативной, ассоциативной.

Аналогично можно определить сумму конечного числа фреймов с аналогичными свойствами:

$$\overset{K}{\underset{k=1}{\oplus}} F_k = T_\infty \left(\overset{K}{\underset{k=1}{\cup}} \left\{f_i^{F_k}\right\}_{i=1}^{M_k} \right), \quad F_k = \overset{K}{\underset{k=1}{\cup}} \left\{f_i^{F_k}\right\}_{i=1}^{M_k}.$$

Взвешенная сумма $(\lambda_1 F_1) \oplus (\lambda_2 F_2)$ пары фреймов Парсеваля F_1 и F_2 при условии $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1$ снова даёт фрейм Парсеваля.

Теорема. *Любой составной фрейм Парсеваля $F = \{f_i\}_{i=1}^M$ можно представить как сумму конечного числа простых фреймов Парсеваля.*

Доказательство. Для начала докажем, что любой составной фрейм Парсеваля можно представить в виде суммы двух простых или сложных фреймов. Действительно, по определению составного фрейма существует набор констант $\{\alpha_i\}_{i=1}^M$ такой, что $\exists k : 1 \leqslant k \leqslant M$, для которого $\alpha_k = 0$, и система векторов $\{\alpha_i f_i\}_{i=1}^M$ является фреймом Парсеваля.

Рассмотрим *двойственный* набор коэффициентов $\{\beta_i\}_{i=1}^M$:

$$\beta_i = \sqrt{\frac{\alpha_{\max}^2 - \alpha_i^2}{\alpha_{\max}^2 - 1}}, \quad \alpha_{\max} = \max_{1 \leqslant i \leqslant M} |\alpha_i|.$$

Двойственная система $F_\beta = \{\beta_i f_i\}_{i=1}^M$ является фреймом Парсеваля:

$$\sum_{i=1}^M \langle x,\, \beta_i f_i\rangle \beta_i f_i = \sum_{i=1}^M \langle x,\, \sqrt{\frac{\alpha_{\max}^2 - \alpha_i^2}{\alpha_{\max}^2 - 1}} f_i\rangle \sqrt{\frac{\alpha_{\max}^2 - \alpha_i^2}{\alpha_{\max}^2 - 1}} f_i =$$
$$= \frac{1}{\alpha_{\max}^2 - 1} \sum_{i=1}^M \left(\alpha_{\max}^2 - \alpha_i^2\right) \langle x,\, f_i\rangle f_i =$$
$$= \frac{1}{\alpha_{\max}^2 - 1} \left(\alpha_{\max}^2 \sum_{i=1}^M \langle x,\, f_i\rangle f_i - \sum_{i=1}^M \langle x,\, \alpha_i f_i\rangle \alpha_i f_i \right) =$$
$$= \frac{1}{\alpha_{\max}^2 - 1} \left(\alpha_{\max}^2 x - x\right) = x.$$

Покажем корректность определения набора $\{\beta_i\}_{i=1}^M$. Докажем, что $\forall k : 1 \leqslant k \leqslant M$ константа β_k имеет смысл и является вещественным числом, при этом набор $\{\alpha_i\}_{i=1}^M$ не совпадает с набором $\{\beta_i\}_{i=1}^M$. Для этого достаточно доказать, что $\alpha_{\max} > 1$ при любом выборе системы $\{\alpha_i\}_{i=1}^M$, так как числитель в силу своей природы неотрицателен.

Предположим противное, что существует набор констант $\{\alpha_i\}_{i=1}^M$ такой, что $\exists k : 1 \leqslant k \leqslant M$, для которого $\alpha_k = 0$, и система векторов $\{\alpha_i f_i\}_{i=1}^M$ является фреймом Парсеваля, но при этом $\alpha_{\max} \leqslant 1$. Оценим сверху границу фрейма $\{\alpha_i f_i\}_{i=1}^M$:

$$\sum_{i=1}^M |\langle x,\, \alpha_i f_i\rangle|^2 = \sum_{i=1}^M |\alpha_i|^2\, |\langle x,\, f_i\rangle|^2 < \alpha_{\max}^2 \sum_{i=1}^M |\langle x,\, f_i\rangle|^2 = \alpha_{\max}^2.$$

Строгое неравенство обеспечивается наличием нулевых компонент в наборе $\{\alpha_i\}_{i=1}^M$. Противоречие с первоначальным предположением доказывает то, что $\alpha_{\max} > 1$.

Для любой пары двойственных наборов $\{\alpha_i\}_{i=1}^M$ и $\{\beta_i\}_{i=1}^M$ существуют номера $1 \leqslant k \leqslant M$ и $1 \leqslant p \leqslant M$ такие, что $k \neq p$ и при этом

$$\alpha_k = 0, \quad \beta_k \neq 0, \quad \alpha_p \neq 0, \quad \beta_p = 0.$$

Это свойство следует из определения соотвествующих наборов. Оно завершает доказательство корректности определения набора $\{\beta_i\}_{i=1}^M$.

Любой составной фрейм Парсеваля раскладывается в объединение фреймов $\{\alpha_i f_i\}_{i=1}^M$ и $\{\beta_i f_i\}_{i=1}^M$. Возьмём конкретные значения λ_α и λ_β:

$$\lambda_\alpha = \frac{1}{\alpha_{\max}}, \quad \lambda_\beta = \frac{\sqrt{\alpha_{\max}^2 - 1}}{\alpha_{\max}}, \quad \lambda_\alpha^2 + \lambda_\beta^2 = \frac{1}{\alpha_{\max}^2} + \frac{\alpha_{\max}^2 - 1}{\alpha_{\max}^2} = 1$$

и вычислим $F_\alpha \oplus F_\beta$. Поскольку фрейм F коллинеарных векторов не содержит, то единственными парами коллинеарных векторов в сумме могут быть только $\alpha_k f_k$ и $\beta_k f_k$ для $1 \leqslant k \leqslant M$. Подействуем на эту пару оператором T согласно (2):

$$T\left(\{\lambda_\alpha \alpha_i f_i,\, \lambda_\beta \beta_i f_i\}\right) = \sqrt{\|\lambda_\alpha \alpha_i f_i\|^2 + \|\lambda_\beta \beta_i f_i\|^2}\, \frac{\lambda_\alpha \alpha_i f_i}{\|\lambda_\alpha \alpha_i f_i\|} = \sqrt{\lambda_\alpha^2 \alpha_i^2 + \lambda_\beta^2 \beta_i^2}\, f_i,$$

$$\lambda_\alpha^2 \alpha_i^2 + \lambda_\beta^2 \beta_i^2 = \frac{\alpha_i^2}{\alpha_{\max}^2} + \frac{\alpha_{\max}^2 - 1}{\alpha_{\max}^2} \cdot \frac{\alpha_{\max}^2 - \alpha_i^2}{\alpha_{\max}^2 - 1} = \frac{\alpha_i^2 + \alpha_{\max}^2 - \alpha_i^2}{\alpha_{\max}^2} = 1.$$

Таким образом, получим представление фрейма F в виде

$$F = (\lambda_\alpha F_\alpha) \oplus (\lambda_\beta F_\beta)\,.$$

Если полученные фреймы F_α и F_β являются простыми, то процесс разложения окончен. В противном случае, чтобы получить разложение в сумму простых фреймов Парсеваля, нужно применить приведенный выше метод несколько раз. Введём оператор D по следующей рекурсивной формуле:

$$D(F,\, k) = \begin{cases} \lambda_\alpha D(F_\alpha,\, k+1) \oplus \lambda_\beta D(F_\beta, k+1), & F \text{ — составной фрейм,} \\ F, & F \text{ — простой фрейм.} \end{cases}$$

Остаётся доказать, что глубина рекурсии k не превосходит некоторой константы. Согласно только что доказанному свойству при увеличении k на единицу также на единицу уменьшается число векторов в фреймах F_α и F_β:

$$|F_\alpha| \leqslant |F| - 1, \quad |F_\beta| \leqslant |F| - 1.$$

Исходя из того, что фреймы Парсеваля с наименьшим числом векторов — это ортонормированные базисы, получаем оценку $k \leqslant M - N$, где M — размерность фрейма при $k = 0$, а N — размерность пространства. □

Равноугольные жёсткие фреймы.

Определение. Будем называть нормированный фрейм $F = \{f_i\}_{i=1}^M$ *равноугольным*, если существует константа $c \in [\,0{,}1)$ такая что, для всех $i \leqslant j$ выполняется следующее равенство:

$$\langle f_i, f_j \rangle = \begin{cases} 1, & i = j, \\ \pm c, & i \neq j. \end{cases}$$

В работе [5] доказывается, что равноугольная система является жёстким фреймом тогда и только тогда, когда

$$c = \sqrt{\frac{M - N}{N(M-1)}}.$$

Для любой пары M и N существует не более одного равноугольного жесткого фрейма, причём для большинства пар таких фреймов нет. Известными примерами равноугольных жёстких фреймов являются ортонормированные базисы, системы Мерседес—Бенц и другие [5].

Теорема. *Для любого равноугольного жесткого фрейма $F = \{f_i\}_{i=1}^M$ существует один и только один фрейм Парсеваля, получаемый перенормировкой $\left\{\sqrt{\frac{N}{M}} f_i\right\}_{i=1}^M$ векторов фрейма, причём этот фрейм простой.*

Доказательство. Докажем, что система $\left\{\sqrt{\frac{N}{M}} f_i\right\}_{i=1}^M$ является фреймом Парсеваля. Это утверждение является тривиальным следствием того, что граница любого нормированного жёсткого фрейма равна M/N [2].

Докажем, что полученный фрейм — простой. Для этого воспользуемся определением (2). Подставим вместо x каждый из векторов перенормированного фрейма и получим необходимое условие того, что фрейм является фреймом Парсеваля:

$$k = 1, 2, \ldots, M, \quad \sum_{i=1}^{M} \left| \left\langle \sqrt{\tfrac{N}{M}} f_k, \alpha_i \sqrt{\tfrac{N}{M}} f_i \right\rangle \right|^2 = 1 \Rightarrow \frac{N}{M} \sum_{i=1}^{M} |\langle f_k, f_i \rangle|^2 |\alpha_i|^2 = 1.$$

Введём обозначение $y_i = |\alpha_i|^2$. Получаем систему уравнений

$$Cy = e, \quad C = (N/M)\mathrm{circ}\left\{1, c^2, \ldots, c^2\right\}, \quad e = \big(1, \ldots, 1\big)^\top.$$

Матрица C является невырожденной при $c^2 \neq 1$, система уравнений имеет единственное решение. Подстановкой легко проверить, что решение всегда положительно и имеет следующий вид:

$$y_k = (N/M)\left(c^2(M-1)+1\right), \quad \alpha_k = \sqrt{(N/M)\left(c^2(M-1)+1\right)}.$$

Это противоречит определению составного фрейма, где требуется хотя бы одно значение α_k, равное нулю, так как это автоматически влечёт равенство нулю всех констант. Это противоречие доказывает, что полученный фрейм Парсеваля — простой. □

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Christensen O.* An introduction to frames and Riesz bases. Applied and Numerical Harmonic Analysis. Boston, MA: Birkhäuser Boston, Inc., 2003. 440 pp.
2. *Casazza P. G., Tremain J. C.* A brief introduction to Hilbert-space frame theory and its applications: preprint posted on www.framerc.org.
3. *Истомина М. Н., Певный А. Б.* О расположении точек на сфере и фрейме Мерседес–Бенц / Матем. просв., сер. 3, Т. 11. М.: Изд-во МЦНМО, 2007. С. 105–112. [*Istomina M. N., Pevnyi A. B.* On disposition of points on a sphere and Mercedes–Benz frame / Mat. Pros., Ser. 3, 11. Moscow: Izd-vo MCNMO, 2007. Pp. 105–112].
4. *Novikov S. Ya., Ryabtsov I. S.* Optimization of Frame Representations for Compressed Sensing and Mercedes-Benz Frame // *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2009. Vol. 265. Pp. 199–207.
5. *Casazza P. G., Redmond D., Tremain J. C.* Real equiangular frames / In: *Proc.* 42*th Annu. Conf. Information Sciences and Systems* (*CISS* 2008). Princeton, NJ, 2008. Pp. 715–720.

Поступила в редакцию 20/XII/2010;
в окончательном варианте — 10/V/2011.

MSC: 42C15

ON REPRESENTATION OF PARSEVAL FRAMES

I. S. Ryabtsov

Samara State University,
1, Academician Pavlov st., Samara, 443011, Russia.

E-mails: tinnulion@mail.ru

This paper investigates properties of Parseval frames in finite dimensional vector spaces, namely, the possibility of representing some frames as sums of others. A new approach in constructing arbitrary Parseval frames and the decomposition arbitrary frame into the sum are described. Besides there is a number of special properties of equiangular tight frames.

Key words: *Parseval frames, frame equivalency, frame representations, equiangular frames, tight frames.*

Original article submitted 20/XII/2010;
revision submitted 10/V/2011.

Igor S. Ryabtsov, Postgraduate Student, Dept. of Functional Analysis and Fucntions Theory.