УДК 517.977

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ГИБРИДНЫХ ОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ

А. Ю. Александров, А. В. Платонов

Санкт-Петербургский государственный университет,
факультет прикладной математики – процессов управления,
198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр., 35.

E-mails: alex43102006@yandex.ru, al-platon1@yandex.ru

Рассматривается гибридная система, состоящая из семейства подсистем с однородными правыми частями и закона переключения между ними. Предполагается, что нулевое решение каждой из подсистем асимптотически устойчиво. С помощью метода функций Ляпунова определяются классы допустимых законов переключения, при которых соответствующая гибридная система также будет асимптотически устойчивой. Исследуется область асимптотической устойчивости нулевого решения.

Ключевые слова: *системы с переключениями, устойчивость, однородные системы, функции Ляпунова, область асимптотической устойчивости.*

Введение. Проблема анализа устойчивости систем с переключениями — одна из наиболее актуальных проблем современной теории управления [1, 2]. Система с переключениями представляет собой гибридную динамическую систему, состоящую из семейства подсистем и закона переключения, определяющего в каждый момент времени, какая из подсистем является активной. Такие системы широко применяются в задачах управления механическими, энергетическими, транспортными системами, при управлении технологическими процессами, а также в ряде других областей [1, 2].

Известно [1], что из устойчивости системы при каждом фиксированном режиме функционирования, вообще говоря, не следует её устойчивость при переключении этих режимов. Поэтому важной задачей является определение классов допустимых законов переключения, для которых можно гарантировать устойчивость соответствующей гибридной системы. Было показано (см. [1]), что при некоторых дополнительных ограничениях на правые части изучаемых систем устойчивость имеет место, если длины интервалов между последовательными моментами переключения достаточно велики. Однако данный подход хорошо разработан только для линейных и квазилинейных систем [1–3]. Основной целью настоящей статьи является его распространение на нелинейные системы с однородными правыми частями.

1. Постановка задачи. Пусть задана гибридная система

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_\sigma(\mathbf{x}). \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$; $\sigma = \sigma(t)$ — кусочно-постоянная функция, определяющая закон переключения, $\sigma(t) : [0, +\infty) \to Q = \{1, 2, \ldots, N\}$. Таким образом, в каждый момент времени поведение системы (1) описывается одной из подсистем

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_s(\mathbf{x}), \quad s \in Q. \tag{2}$$

Александр Юрьевич Александров (д.ф.-м.н., профессор), зав. кафедрой , каф. управления медико-биологическими системами. *Алексей Викторович Платонов* (к.ф.-м.н., доцент), доцент, каф. управления медико-биологическими системами.

Будем считать, что элементы векторов $\mathbf{f}_1(\mathbf{x})$, $\mathbf{f}_2(\mathbf{x})$, ..., $\mathbf{f}_N(\mathbf{x})$ — непрерывные при $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ однородные функции порядка μ, где μ — положительное рациональное число с нечетными числителем и знаменателем. Случай, когда $\mu = 1$, исследовался во многих работах (см., например, [1] и цитируемую там литературу). Поэтому в данной статье будем предполагать, что $\mu \neq 1$.

Обозначим через θ_i, $i = 1, 2, \ldots$, моменты переключения, $0 < \theta_1 < \theta_2 < \ldots$. Пусть $\theta_0 = 0$. Считаем, что функция $\sigma(t)$ в точках разрыва непрерывна справа, и последовательность θ_1, θ_2, ... является минимальной, т.е. $\sigma(\theta_i) \neq \neq \sigma(\theta_{i+1})$, $i \in \mathbb{N}$. Кроме того, будем рассматривать только такие законы переключения, для которых функция $\sigma(t)$ на промежутке $[0, +\infty)$ имеет бесконечное количество точек разрыва, а на любом ограниченном промежутке их может быть только конечное число.

Пусть нулевые решения подсистем (2) асимптотически устойчивы, и для этих подсистем найдены непрерывно дифференцируемые при $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ положительно-однородные порядка $\gamma > 1$ функции Ляпунова $V_1(\mathbf{x})$, $V_2(\mathbf{x})$, ..., $V_N(\mathbf{x})$, удовлетворяющие требованиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости. Существование таких функций доказано в работах [4, 5].

Согласно свойствам однородных функций [4], для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ справедливы оценки

$$a_{1s}\|\mathbf{x}\|^\gamma \leqslant V_s(\mathbf{x}) \leqslant a_{2s}\|\mathbf{x}\|^\gamma, \quad \left(\frac{\partial V_s}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{f}_s(\mathbf{x})\right) \leqslant -a_{3s}\|\mathbf{x}\|^{\gamma+\mu-1}. \tag{3}$$

Здесь $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора, a_{js} — положительные постоянные, $j \in \{1, 2, 3\}$; $s \in Q$. Следовательно, число $\alpha > 0$ можно выбрать так, чтобы при $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ выполнялись неравенства

$$\left(\frac{\partial V_s}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{f}_s(\mathbf{x})\right) \leqslant -\alpha V_s^{1+\frac{\mu-1}{\gamma}}(\mathbf{x}), \qquad s \in Q. \tag{4}$$

Положим $c = \max\limits_{s,j \in Q} \max\limits_{\|\mathbf{x}\|=1} (V_s(\mathbf{x})/V_j(\mathbf{x}))$, $b = c^{(1-\mu)/\gamma}$. Тогда $c \geqslant 1$, и для любых $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$V_s(\mathbf{x}) \leqslant cV_j(\mathbf{x}), \quad s, j \in Q. \tag{5}$$

Определим условия на закон переключения, при выполнении которых нулевое решение гибридной системы (1) также является асимптотически устойчивым. Как будет видно из дальнейшего, получающиеся результаты зависят от того, больше или меньше единицы порядок однородности подсистем (2).

Замечание 1. Если $c = 1$, то $V_1(\mathbf{x}) \equiv V_2(\mathbf{x}) \equiv \cdots \equiv V_N(\mathbf{x})$, т.е. для подсистем (2) существует общая функция Ляпунова. Тогда [1] при любом законе переключения нулевое решение системы (1) равномерно асимптотически устойчиво в целом. Поэтому далее считаем, что $c > 1$.

2. Случай $\mu > 1$. Пусть нам заданы моменты переключения θ_i, $i = 1, 2, \ldots$, однако порядок переключений между подсистемами может быть неизвестен. Положим $T_i = \theta_i - \theta_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots$; $\psi(m,1) = 0$ и $\psi(m, k) = \sum\limits_{i=1}^{k-1} T_{m+i} b^{k-i}$ при $k = 2, 3, \ldots$; $m = 1, 2, \ldots$.

Теорема 1. *Если*

$$\psi(1,k) \to +\infty \quad \text{при} \quad k \to \infty, \tag{6}$$

то нулевое решение системы (1) *асимптотически устойчиво в целом.*

Доказательство. Используя известные частные функции $V_1(\mathbf{x})$, $V_2(\mathbf{x})$, …, $V_N(\mathbf{x})$, строим составную функцию Ляпунова $V_{\sigma(t)}(\mathbf{x})$, соответствующую закону переключения $\sigma(t)$.

Выберем начальный момент времени $t_0 \geqslant 0$ и начальную точку $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$. Рассмотрим решение $\mathbf{x}(t)$ системы (1), выходящее при $t = t_0$ из точки $\mathbf{x}_0$. Найдем натуральное число m такое, что $t_0 \in [\theta_{m-1}, \theta_m)$. Из выполнения неравенств (4) следует [4], что при $t \in [t_0, \theta_m)$ справедлива оценка

$$V_{\sigma(\theta_{m-1})}^{-\frac{\mu-1}{\gamma}}(\mathbf{x}(t)) \geqslant V_{\sigma(\theta_{m-1})}^{-\frac{\mu-1}{\gamma}}(\mathbf{x}_0) + \frac{\alpha(\mu-1)}{\gamma}\,(t-t_0)\,. \tag{7}$$

Для каждого $t \geqslant \theta_m$ можно указать такое натуральное число k, что $\theta_{m+k-1} \leqslant t < \theta_{m+k}$. При этом $k \to \infty$, когда $t \to +\infty$. Последовательно интегрируя на промежутках $[\theta_{m+k-1}, t]$, $[\theta_{m+k-2}, \theta_{m+k-1}], \ldots, [t_0, \theta_m]$ соответствующие дифференциальные неравенства из семейства (4) и учитывая соотношения (5), имеем

$$\begin{aligned} V_{\sigma(\theta_{m+k-1})}^{-\frac{\mu-1}{\gamma}}(\mathbf{x}(t)) &\geqslant V_{\sigma(\theta_{m+k-1})}^{-\frac{\mu-1}{\gamma}}(\mathbf{x}(\theta_{m+k-1})) + \frac{\alpha(\mu-1)}{\gamma}\,(t-\theta_{m+k-1}) \geqslant \\ &\geqslant bV_{\sigma(\theta_{m+k-2})}^{-\frac{\mu-1}{\gamma}}(\mathbf{x}(\theta_{m+k-1})) + \frac{\alpha(\mu-1)}{\gamma}\,(t-\theta_{m+k-1}) \geqslant \ldots \geqslant \\ &\geqslant b^k V_{\sigma(\theta_{m-1})}^{-\frac{\mu-1}{\gamma}}(\mathbf{x}_0) + \frac{\alpha(\mu-1)}{\gamma}\Big((t-\theta_{m+k-1}) + \psi(m,k) + b^k\,(\theta_m - t_0)\Big). \end{aligned} \tag{8}$$

Используя оценки (3), (7) и (8), получаем, что

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leqslant a_1^{-\frac{1}{\gamma}}\left(a_2^{\frac{1-\mu}{\gamma}}\|\mathbf{x}_0\|^{1-\mu} + \frac{\alpha(\mu-1)}{\gamma}\,(t-t_0)\right)^{-\frac{1}{\mu-1}} \quad \text{при } t \in [t_0, \theta_m),$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}(t)\| \leqslant a_1^{-\frac{1}{\gamma}}\Big(b^k a_2^{\frac{1-\mu}{\gamma}}\|\mathbf{x}_0\|^{1-\mu} + \frac{\alpha(\mu-1)}{\gamma}\big((t-\theta_{m+k-1}) + \\ + \psi(m,k) + b^k\,(\theta_m - t_0)\big)\Big)^{-\frac{1}{\mu-1}} \quad \text{при } t \in [\theta_{m+k-1}, \theta_{m+k}),\ k \geqslant 1. \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь $a_1 = \min\{a_{11}, \ldots, a_{1N}\}$, $a_2 = \max\{a_{21}, \ldots, a_{2N}\}$. Заметим, что если справедливо предельное соотношение (6), то для любого натурального m имеем $\psi(m,k) \to +\infty$ при $k \to \infty$.

Зададим $\varepsilon > 0$ и $t_0 \geqslant 0$. Выберем натуральные числа m и k_0, удовлетворяющие условиям $t_0 \in [\theta_{m-1}, \theta_m)$ и

$$\psi(m,k) > \frac{\gamma}{\alpha(\mu-1)}\left(\varepsilon a_1^{\frac{1}{\gamma}}\right)^{1-\mu} \quad \text{для всех} \quad k \geqslant k_0.$$

Пусть $\delta = \varepsilon\,(a_1/a_2)^{1/\gamma}\,b^{k_0/(\mu-1)}$. Получим, что если $\|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta$, то $\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon$ при всех $t \geqslant t_0$. Кроме того, из выполнения неравенств (9) следует, что для любого решения $\mathbf{x}(t)$ системы (1) имеем $\|\mathbf{x}(t)\| \to 0$ при $t \to +\infty$. $\square$

Следствие 1. *Если $\psi(m,k) \to +\infty$ при $k \to \infty$ равномерно относительно $m \in \mathbb{N}$, то нулевое решение системы* (1) *равномерно асимптотически устойчиво в целом.*

Следствие 2. *Если $T_i \to +\infty$ при $i \to \infty$, то нулевое решение системы* (1) *равномерно асимптотически устойчиво в целом.*

Замечание 2. В случае, когда $\mu = 1$, существует число $L > 0$ такое, что при любых $T_i \geqslant L$, $i \in \mathbb{N}$, нулевое решение соответствующей гибридной системы асимптотически устойчиво в целом [3]. Теорема 1 не позволяет получить аналогичного результата при $\mu > 1$ (например, если $T_i = L = \mathrm{const} > 0$, $i \in \mathbb{N}$, то условие (6) не выполняется ни при одном значении L). Однако при $\mu > 1$ можно рассмотреть задачу о сильной практической устойчивости [6], т. е. о попадании всех решений в заданную окрестность начала координат за конечное время и дальнейшем пребывании их там.

Следствие 3. *Для любого $\varepsilon > 0$ существуют числа $L_1 > 0$ и $L_2 > 0$ такие, что если $T_i \geqslant L_1$, $i \in \mathbb{N}$, то для всех $t_0 \geqslant 0$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ имеем $\|\mathbf{x}(t,\mathbf{x}_0,t_0)\| < \varepsilon$ при $t \geqslant t_0 + L_2$. Здесь $\mathbf{x}(t,\mathbf{x}_0,t_0)$ — решение системы* (1), *выходящее при $t = t_0$ из точки $\mathbf{x}_0$.*

Предположим теперь, что нам известны не только моменты переключения, но и порядок переключений между подсистемами. В этом случае можно использовать другой подход для получения достаточных условий асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1). Выберем одну из подсистем семейства (2) и выясним, насколько более длительными должны быть промежутки активности этой подсистемы по сравнению с промежутками активности остальных подсистем, чтобы нулевое решение гибридной системы было асимптотически устойчиво.

Пусть выбрана первая подсистема. Ей соответствует функция Ляпунова $V_1(\mathbf{x})$. При всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ имеют место оценки

$$\left(\frac{\partial V_1}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{f}_s(\mathbf{x})\right) \leqslant \beta_s V_1^{1+\frac{\mu-1}{\gamma}}(\mathbf{x}), \quad s \in Q. \tag{10}$$

Здесь $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N$ — некоторые постоянные, причём $\beta_1 < 0$.

По заданному закону переключения $\sigma(t)$ строим вспомогательную кусочно-постоянную функцию $\eta(t)$. Пусть $\eta(t) = -\beta_{\sigma(t)}$, $t \geqslant 0$. Тогда для функции $V_1(\mathbf{x})$ будет справедливо дифференциальное неравенство

$$\dot V_1\big|_{(1)} \leqslant -\eta(t) V_1^{1+\frac{\mu-1}{\gamma}}(\mathbf{x}). \tag{11}$$

Теорема 2. *Если*

$$\int_0^t \eta(\tau)\,d\tau \to +\infty \quad \textit{при} \quad t \to +\infty,$$

то нулевое решение системы (1) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Рассмотрим некоторый закон переключения $\sigma(t)$ и соответствующую ему функцию $\eta(t)$. Зададим числа $\varepsilon > 0$ и $t_0 \geqslant 0$. Если выполнено условие теоремы, то существует постоянная ρ_0 такая, что

$$\int_{t_0}^{t} \eta(\tau)\, d\tau \geqslant \rho_0 \quad \text{при всех} \quad t \geqslant t_0.$$

Выберем $\delta > 0$ так, чтобы имело место соотношение

$$a_{21}^{\frac{1-\mu}{\gamma}} \delta^{1-\mu} + \frac{\mu-1}{\gamma}\rho_0 > \left(a_{11}^{\frac{1}{\gamma}}\varepsilon\right)^{1-\mu}.$$

Рассмотрим решение $\mathbf{x}(t)$ системы (1), выходящее при $t = t_0$ из точки $\mathbf{x}_0$. Используя оценки (3) и (11), нетрудно показать, что если $0 < \|\mathbf{x}_0\| < \delta$, то при $t \geqslant t_0$ справедливы неравенства

$$a_{11}^{\frac{1-\mu}{\gamma}} \|\mathbf{x}(t)\|^{1-\mu} \geqslant V_1^{\frac{1-\mu}{\gamma}}(\mathbf{x}(t)) \geqslant V_1^{\frac{1-\mu}{\gamma}}(\mathbf{x}_0) + \frac{\mu-1}{\gamma}\int_{t_0}^{t} \eta(\tau)\, d\tau \geqslant$$
$$\geqslant a_{21}^{\frac{1-\mu}{\gamma}} \|\mathbf{x}_0\|^{1-\mu} + \frac{\mu-1}{\gamma}\int_{t_0}^{t} \eta(\tau)\, d\tau \geqslant a_{21}^{\frac{1-\mu}{\gamma}} \delta^{1-\mu} + \frac{\mu-1}{\gamma}\rho_0 \geqslant a_{11}^{\frac{1-\mu}{\gamma}} \varepsilon^{1-\mu}.$$

Значит, $\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon$ для всех $t \geqslant t_0$, и $\|\mathbf{x}(t)\| \to 0$ при $t \to +\infty$. $\square$

Следствие 4. *Если*

$$\int_{t_0}^{t_0+t} \eta(\tau)\, d\tau \to +\infty \quad \textit{при} \quad t \to +\infty$$

равномерно по $t_0 \geqslant 0$*, то нулевое решение системы* (1) *равномерно асимптотически устойчиво.*

Замечание 3. Теорема 2, в отличие от теоремы 1, гарантирует только локальную асимптотическую устойчивость нулевого решения.

Замечание 4. Теорема 2 справедлива и в случае, когда нулевые решения каких-то из подсистем с номерами 2, 3, ..., N или всех этих подсистем не являются асимптотически устойчивыми.

Замечание 5. При некоторых дополнительных ограничениях на закон переключения для системы (1) можно получить условия асимптотической устойчивости в целом при фиксированной оценке на длины промежутков активности подсистем.

Снова считаем, что нулевые решения всех подсистем (2) асимптотически устойчивы, и для функции Ляпунова $V_1(\mathbf{x})$, соответствующей первой подсистеме, справедливы неравенства (10), причем среди постоянных $\beta_1, \ldots, \beta_N$ имеется l отрицательных, $1 \leqslant l \leqslant N-1$, а остальные больше нуля или равны ему. Пусть для определенности $\beta_s < 0$ при $s = 1, 2, \ldots, l$.

Обозначим через A множество подсистем с номерами $1, 2, \ldots, l$, а через B — множество остальных подсистем из семейства (2). По заданному закону переключения $\sigma(t)$ построим подпоследовательность $\{\zeta_i\}_{i=1}^{\infty}$ исходной последовательности $\{\theta_i\}_{i=1}^{\infty}$. В качестве ζ_i выбираем только те моменты времени

θ_i, в которые гибридная система переключается или с подсистемы из множества B на подсистему из множества A, или с подсистемы из множества A на подсистему из множества B. При этом $\zeta_1 < \zeta_2 < \ldots$.

Не умаляя общности, будем считать, что при $t \in [\theta_0, \theta_1)$ активна подсистема из множества A. Положим $\zeta_0 = 0$. Тогда на промежутках $[\zeta_{2i-2}, \zeta_{2i-1})$ переключения могут происходить только между подсистемами из совокупности A, а на промежутках $[\zeta_{2i-1}, \zeta_{2i})$ — только между подсистемами из совокупности B, $i \in \mathbb{N}$. Пусть $U_i = \zeta_i - \zeta_{i-1}$, $i \in \mathbb{N}$.

Следствие 5. *Для любого числа $L_1 > 0$ существует такое $L_2 > 0$, что если $U_{2i-1} \geqslant L_2$, $U_{2i} \leqslant L_1$ при всех $i \in \mathbb{N}$, то нулевое решение системы* (1) *равномерно асимптотически устойчиво в целом.*

3. Случай $\boldsymbol{0 < \mu < 1}$. Принципиальная особенность данного случая заключается в том, что при $0 < \mu < 1$ из асимптотической устойчивости подсистем (2) следует, что каждое решение этих подсистем за конечное время входит в начало координат и остается там при дальнейшем возрастании времени [4]. Поэтому нулевое решение системы (1) будет асимптотически устойчивым для любого закона переключения. Цель настоящего раздела статьи — исследование области асимптотической устойчивости нулевого решения.

Снова сначала считаем, что нам заданы моменты переключения θ_i, $i = 1, 2, \ldots$, однако порядок переключений может быть неизвестен. Положим $\varphi(m,1) = 0$ и $\varphi(m,k) = \sum_{i=1}^{k-1} T_{m+i} b^{-i}$ при $k = 2, 3, \ldots$; $m = 1, 2, \ldots$.

Теорема 3. *Если*

$$\varphi(1,k) \to +\infty \quad \textit{при} \quad k \to \infty, \tag{12}$$

то нулевое решение системы (1) *асимптотически устойчиво в целом.*

Доказательство. Построим составную функцию Ляпунова $V_{\sigma(t)}(\mathbf{x})$. Выберем начальный момент времени $t_0 \geqslant 0$ и начальную точку $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$. Рассмотрим решение $\mathbf{x}(t)$ системы (1), выходящее при $t = t_0$ из точки $\mathbf{x}_0$, и покажем существование числа $T \geqslant t_0$ такого, что $\mathbf{x}(T) = \mathbf{0}$.

Предположим противное. Пусть $\mathbf{x}(t) \neq \mathbf{0}$ для всех $t \geqslant t_0$. Найдем натуральное число m такое, что $t_0 \in [\theta_{m-1}, \theta_m)$. Из выполнения неравенств (4) следует [4], что

$$V_{\sigma(\theta_{m-1})}^{\frac{1-\mu}{\gamma}}(\mathbf{x}(t)) \leqslant V_{\sigma(\theta_{m-1})}^{\frac{1-\mu}{\gamma}}(\mathbf{x}_0) - \frac{\alpha(1-\mu)}{\gamma}\,(t - t_0) \quad \text{при} \;\; t \in [t_0, \theta_m).$$

Для каждого $t \geqslant \theta_m$ можно указать такое натуральное число k, что $\theta_{m+k-1} \leqslant t < \theta_{m+k}$. При этом $k \to \infty$, когда $t \to +\infty$. Последовательно интегрируя на промежутках $[\theta_{m+k-1}, t]$, $[\theta_{m+k-2}, \theta_{m+k-1}], \ldots, [t_0, \theta_m]$ соответствующие дифференциальные неравенства из семейства (4) и учитывая оценки (5), получаем

$$V_{\sigma(\theta_{m+k-1})}^{\frac{1-\mu}{\gamma}}(\mathbf{x}(t)) \leqslant b^k \Bigg(V_{\sigma(\theta_{m-1})}^{\frac{1-\mu}{\gamma}}(\mathbf{x}_0) - \\ - \frac{\alpha(1-\mu)}{\gamma}\Big(b^{-k}\,(t - \theta_{m+k-1}) + \varphi(m,k) + (\theta_m - t_0)\Big)\Bigg). \tag{13}$$

Если справедливо соотношение (12), то для любого натурального m имеем $\varphi(m,k) \to +\infty$ при $k \to \infty$. Таким образом, левая часть неравенства (13) положительна, а правая стремится к минус бесконечности, когда $k \to \infty$. Приходим к противоречию. Значит, найдется $T \geqslant t_0$ такое, что $\mathbf{x}(T) = \mathbf{0}$. А поскольку нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво, решение $\mathbf{x}(t)$, попав в начало координат, уже из него не выйдет. □

Следствие 6. *Пусть $T_i \geqslant \lambda_i b^i$, $i \in \mathbb{N}$, где λ_i — положительные числа, для которых ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i$ расходится. Тогда нулевое решение системы* (1) *асимптотически устойчиво в целом.*

Следствие 7. *Если $\varphi(m,k) \to +\infty$ при $k \to \infty$ равномерно относительно $m \in \mathbb{N}$, то нулевое решение системы* (1) *равномерно асимптотически устойчиво в целом.*

Для заданного $t_0 \geqslant 0$ обозначим через $A(t_0)$ область притяжения [4] нулевого решения системы (1).

Замечание 6. В случае, когда соотношение (12) не выполнено, используя неравенство (13), можно получить оценки областей притяжения.

Выберем $t_0 \geqslant 0$ и найдем натуральное число m такое, что $t_0 \in [\theta_{m-1}, \theta_m)$. Пусть $a_2 = \max\{a_{21}, \ldots, a_{2N}\}$, $\omega(t_0) = \theta_m - t_0 + \lim_{k\to\infty} \varphi(m,k)$. Если условие (12) не выполнено, то $0 < \omega(t_0) < +\infty$. Получим, что множество

$$H(t_0) = \left\{ \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n : \ \|\mathbf{x}_0\| < a_2^{-\frac{1}{\gamma}} \left(\frac{\alpha(1-\mu)}{\gamma} \omega(t_0) \right)^{\frac{1}{1-\mu}} \right\}$$

содержится в области $A(t_0)$.

Замечание 7. Теорема 3, как и теорема 1, не гарантирует существование положительного числа L такого, что если длины промежутков между последовательными моментами переключения не меньше этого числа, то нулевое решение гибридной системы асимптотичеси устойчиво в целом. Если $T_i = L = \mathrm{const} > 0$, $i \in \mathbb{N}$, то условие (12) не выполняется ни при каком значении L. Однако за счет выбора величины L можно обеспечить, чтобы любая наперед заданная ограниченная область при каждом $t_0 \geqslant 0$ содержалась в области притяжения $A(t_0)$ нулевого решения.

Следствие 8. *Для любого $\Delta > 0$ существует число $L > 0$ такое, что если $T_i \geqslant L$, $i \in \mathbb{N}$, то $\{\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n : \ \|\mathbf{x}_0\| < \Delta\} \subset A(t_0)$ при всех $t_0 \geqslant 0$.*

Предположим теперь, что мы обладаем полной информацией о законе переключения, и для функции Ляпунова $V_1(\mathbf{x})$, соответствующей первой подсистеме, выполнены неравенства (10). Снова строим вспомогательную кусочно-постоянную функцию $\eta(t)$. Положим

$$I(t) = \int_0^t \eta(\tau)\, d\tau,$$

где $t \geqslant 0$.

Теорема 4. *Если функция $I(t)$ не ограничена сверху при $t \in [0, +\infty)$, то нулевое решение системы* (1) *асимптотически устойчиво в целом.*

Доказательство. Зададим начальный момент времени $t_0 \geqslant 0$ и начальную точку $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$. Рассмотрим решение $\mathbf{x}(t)$ системы (1), выходящее при $t = t_0$ из точки $\mathbf{x}_0$.

Пусть $\mathbf{x}(t) \neq \mathbf{0}$ на некотором промежутке $[t_0, t_1]$. Используя оценки (3) и (11), нетрудно показать, что тогда при $t \in [t_0, t_1]$ справедливы соотношения

$$0 < a_{11}^{\frac{1-\mu}{\gamma}} \|\mathbf{x}(t)\|^{1-\mu} \leqslant V_1^{\frac{1-\mu}{\gamma}}(\mathbf{x}(t)) \leqslant V_1^{\frac{1-\mu}{\gamma}}(\mathbf{x}_0) - \frac{1-\mu}{\gamma}\big(I(t) - I(t_0)\big). \tag{14}$$

Функция $I(t)$ не ограничена сверху на промежутке $[0, +\infty)$. Поэтому из полученных неравенств следует существование числа $T \geqslant t_0$ такого, что рассматриваемое решение при $t = T$ входит в начало координат и остается там при дальнейшем возрастании времени. □

Замечание 8. В отличие от теоремы 2, теорема 4 не будет справедлива, если нулевое решение хотя бы одной из подсистем с номерами $2, 3, \ldots, N$ является неустойчивым.

Замечание 9. В случае, когда функция $I(t)$ ограничена сверху при $t \in [0, +\infty)$, неравенства (14) можно использовать для получения оценок областей притяжения $A(t_0)$ нулевого решения системы (1).

Действительно, выберем $t_0 \geqslant 0$. Пусть $\omega(t_0) = \sup_{t\in[t_0,+\infty)} I(t) - I(t_0)$. Если $\omega(t_0) > 0$, то множество

$$H(t_0) = \left\{ \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n : \ \|\mathbf{x}_0\| < a_{21}^{-\frac{1}{\gamma}} \left(\frac{(1-\mu)\omega(t_0)}{\gamma} \right)^{\frac{1}{1-\mu}} \right\}$$

содержится в области $A(t_0)$.

4. Пример. Пусть семейство (2) состоит из двух подсистем

$$\dot{x}_1 = -x_1^3 - x_2^3, \qquad \dot{x}_2 = 10x_1^3 - x_2^3, \tag{15}$$

$$\dot{x}_1 = -x_1^3 - 10x_2^3, \qquad \dot{x}_2 = x_1^3 - x_2^3. \tag{16}$$

Однородные функции Ляпунова для этих подсистем выбираем в следующем виде: $V_1(x_1, x_2) = 10x_1^4 + x_2^4$, $V_2(x_1, x_2) = x_1^4 + 10x_2^4$. Тогда $\dot{V}_1\big|_{(15)} = -40x_1^6 - 4x_2^6$, $\dot{V}_2\big|_{(16)} = -4x_1^6 - 40x_2^6$, т. е. в данном примере $n = 2$, $\mu = 3$, $\gamma = 4$, $c = 10$, $b = 1/\sqrt{10}$.

Применяя теорему 1, получаем, что если выполнено предельное соотношение

$$\sum_{i=1}^{k-1} T_{i+1} 10^{\frac{i-k}{2}} \to +\infty \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

то при любом порядке переключений между подсистемами нулевое решение соответствующей гибридной системы асимптотически устойчиво в целом.

Предположим теперь, что нам известны не только моменты переключения, но и порядок переключений между подсистемами. Не умаляя общности, будем считать, что на промежутках $[\theta_{2i-2}, \theta_{2i-1})$ активна подсистема (15), а на промежутках $[\theta_{2i-1}, \theta_{2i})$ — подсистема (16), $i \in \mathbb{N}$.

Для функции $V_1(x_1, x_2)$ справедливы дифференциальные неравенства

$$\dot{V}_1\big|_{(15)} \leqslant -1{,}2 \cdot V_1^{3/2}, \quad \dot{V}_1\big|_{(16)} \leqslant 23{,}1 \cdot V_1^{3/2}.$$

Используя теорему 2, получаем, что если $1{,}2 \cdot T_{2i-1} \geqslant 23{,}1 \cdot T_{2i} + \delta$, $i \in \mathbb{N}$, где δ — некоторая положительная постоянная, то нулевое решение соответствующей гибридной системы асимптотически устойчиво.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 08-08-92208ГФЕН_а).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Liberzon D., Morse A. S.* Basic problems in stability and design of switched systems // *Control Systems Magazine, IEEE*, 1999. — Vol. 19, No. 5. — P. 59–70.
2. *Decarlo R. A., Branicky M. S., Pettersson S., Lennartson B.* Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems // *Proc. of the IEEE*, 2000. — Vol. 88, No. 7. — P. 1069–1082.
3. *Zhai G., Hu B., Yasuda K., Michel A. N.* Disturbance attenuation properties of time-controlled switched systems // *J. of the Franklin Institute*, 2001. — Vol. 338, No. 7. — P. 765–779.
4. *Зубов В. И.* Устойчивость движения. — М.: Высш. шк., 1973. — 272 с.
5. *Rosier L.* Homogeneous Lyapunov function for homogeneous continuous vector field // *Systems and Control Letters*, 1992. — Vol. 19, No. 6. — P. 467–473.
6. *Ла-Салль Ж., Лефшец С.* Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. — М.: Мир, 1964. — 168 с.

Поступила в редакцию 08/VI/2010;
в окончательном варианте — 26/VIII/2010.

MSC: 34A38, 34D20

ON THE STABILITY OF HYBRID HOMOGENEOUS SYSTEMS

A. Yu. Aleksandrov, A. V. Platonov

St. Petersburg State University,
Faculty of Applied Mathematics and Control Processes,
35, Universitetsky pr., Old Peterhof, St. Petersburg, 198504, Russia.

E-mails: alex43102006@yandex.ru, al-platon1@yandex.ru

The hybrid system consisting of the family of subsystems with homogeneous right-hand sides and a switching law is considered. It is assumed that the zero solution of each subsystem is asymptotically stable. By the use of the Lyapunov functions method, the classes of admissible switching laws are determined under which the corresponding hybrid system is also asymptotically stable. The region of asymptotic stability of the zero solution is investigated.

Key words: *switched systems, stability, homogeneous systems, Lyapunov functions, region of asymptotic stability.*

Original article submitted 08/VI/2010;
revision submitted 26/VIII/2010.

Alexander Yu. Aleksandrov (Dr. Sc. (Phys. & Math.)), Head of Dept., Dept. of Medical & Biological Systems Control. *Alexey V. Platonov* (Ph. D. (Phys. & Math.)), Associate Professor, Dept. of Medical & Biological Systems Control.