Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2010. — № 5 (21). — С. 33–41

УДК 517.958

ОБ ОДНОРОДНОЙ МОДЕЛИ ТЕРМОКОНВЕКЦИИ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ КЕЛЬВИНА—ФОЙГТА НЕНУЛЕВОГО ПОРЯДКА

Т. Г. Сукачева, О. П. Матвеева

Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого,
173003 Великий Новгород, ул. Б. С.-Петербургская, 41.

E-mails: tamara.sukacheva@novsu.ru, oltan.72@mail.ru

Рассматривается однородная задача термоконвекции несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина-Фойгта ненулевого порядка. Проведенное исследование основано на результатах теории полулинейных уравнений соболевского типа, поскольку первая начально-краевая задача для соответствующей системы дифференциальных уравнений в частных производных сводится к абстрактной задаче Коши для указанного уравнения. При этом используется понятие p-секториального оператора и порожденной им разрешающей полугруппы операторов задачи Коши для линейного однородного уравнения соболевского типа. Доказана теорема существования единственного решения рассматриваемой задачи термоконвекции, являющегося квазистационарной полутраекторией. Получено полное описание фазового пространства этой задачи.

Ключевые слова: *уравнения соболевского типа, несжимаемая вязкоупругая жидкость, фазовое пространство.*

Введение. Система уравнений

$$\begin{cases} (1-\lambda\nabla^2)\boldsymbol{v}_t = \nu\nabla^2\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} + \sum\limits_{l=1}^{k}\beta_l\nabla^2 w_l - g\boldsymbol{q}\theta - \boldsymbol{p} + \boldsymbol{f}, \\ 0 = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v}), \quad \frac{\partial w_l}{\partial t} = v + \alpha_l w_l, \quad \alpha_l \in \mathbb{R}_-, \quad l \in K, \\ \theta_t = \text{æ}\nabla^2\theta - \boldsymbol{v}\cdot\nabla\theta + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{q} \end{cases} \tag{1}$$

моделирует эволюцию скорости $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2 \ldots, v_n)$, $v_i = v_i(x,t)$, градиента давления $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, $p_i = p_i(x,t)$ и температуры $\theta = \theta(x,t)$ несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина—Фойгта порядка $k > 0$ [1]. Параметры $\lambda \in \mathbb{R}$, $\nu \in \mathbb{R}_+$ и $\text{æ} \in \mathbb{R}_+$ характеризуют упругость, вязкость и теплопроводность жидкости соответственно; $g \in \mathbb{R}_+$ — ускорение свободного падения; вектор $\boldsymbol{q} = (0, \ldots, 0, 1)$ — орт в $\mathbb{R}^n$. Параметры $\beta_l \in \mathbb{R}_+$ определяют время ретардации (запаздывания) давления. Свободный член $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, $f_i = f_i(x,t)$ отвечает внешнему воздействию на жидкость, $w_l = w_l(x,t)$, $l \in K$ — некоторые функции, $K = \{1, 2, \ldots, k\}$.

Рассмотрим разрешимость первой начально-краевой задачи

$$\begin{matrix} \boldsymbol{v}(x,0) = \boldsymbol{v}_0(x), & w_l(x,0) = w_{l_0}(x), & \theta(x,0) = \theta_0(x), \ \forall x \in \Omega; \\ \boldsymbol{v}(x,t) = 0, & w_l(x,t) = 0, & \theta(x,t) = 0, \ \forall (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \ l \in K \end{matrix} \tag{2}$$

для однородной системы (1) ($f \equiv 0$). Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \{2,3,4\}$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. Ранее задача (1), (2) в случае, когда $k = 0$, $f = f(x)$, изучалась Г. А. Свиридюком [2].

Тамара Геннадьевна Сукачева (д.ф.-м.н., доц.), профессор, каф. математического анализа.
Ольга Павловна Матвеева, старший преподаватель, каф. математического анализа.

Статья состоит из трёх частей. В первой части приводятся известные результаты из теории полулинейных уравнений соболевского типа, основанные на понятии p-секториального оператора и полугрупповом подходе [3, 4]. Во второй части проводится редукция однородной задачи (1), (2) к задаче Коши для полулинейного уравнения соболевского типа. В третьей части устанавливается существование квазистационарных полутраекторий и описывается фазовое пространство исходной задачи.

1. Полулинейные уравнения соболевского типа. Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ — банаховы пространства, оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$, причём $\ker L \neq \{0\}$; оператор $M \in \in \mathcal{C}l(\mathcal{U};\mathcal{F})$. Обозначим через $\mathcal{U}_M = \{u \in \operatorname{dom} M : \|u\| = \|Mu\|_{\mathcal{F}} + \|u\|_{\mathcal{U}}\}$. Пусть оператор $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_M;\mathcal{F})$.

Рассмотрим задачу Коши

$$u(0) = u_0 \tag{3}$$

для *полулинейного уравнения соболевского типа*

$$L\dot{u} = Mu + F(u). \tag{4}$$

Локальным решением (далее просто — *решением*) задачи (3), (4) назовём вектор-функцию $u \in \mathcal{C}^\infty((0,T);\mathcal{U}_M)$, удовлетворяющую уравнению (4) и такую, что $u(t) \to u_0$ при $t \to 0+$.

Будем рассматривать задачу (3), (4) при условии, что оператор M сильно $(L,\ p)$-секториален [3, 4]. Известно, что при этом условии решение задачи (3), (4) может быть не единственным [5]. Мы ограничиваемся поиском только таких решений уравнения (4), которые являются *квазистационарными полутраекториями*.

Определение 1. Пусть $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 \oplus \mathcal{U}_1$, причём $\ker L \subset \mathcal{U}_0$. Решение $u = v + + w$, где $v(t) \in \mathcal{U}_0$, $w(t) \in \mathcal{U}_1$ при всех $t \in (0,T)$, назовём *квазистационарной полутраекторией*, если $L\dot{v} \equiv 0$.

Также хорошо известно [6–8], что решения задачи (3), (4) существуют не для всех $u_0 \in \mathcal{U}_M$. Поэтому введём

Определение 2. Множество $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}_M$ назовём *фазовым пространством* уравнения (4), если для любой точки $u_0 \in \mathcal{B}$ существует единственное решение задачи (3), (4), причём $u(t) \in \mathcal{B}$.

В силу того, что оператор M сильно (L,p)-секториален, пространства $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ расщепляются в прямые суммы $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$, где $\mathcal{U}^0$, $\mathcal{F}^0$ — ядра, а $\mathcal{U}^1$, $\mathcal{F}^1$ — образы аналитических разрешающих полугрупп U^t, F^t линейного однородного уравнения

$$L\dot{u} = Mu. \tag{5}$$

Обозначим через $L_k(M_k)$ сужение оператора $L(M)$ на $\mathcal{U}^k$ $(\mathcal{U}^k \cap \operatorname{dom} M)$, $k \in \in \{0,1\}$. Тогда $L_k : \mathcal{U}^k \to \mathcal{F}^k$, $M_k : \mathcal{U}^k \cap \operatorname{dom} M \to \mathcal{F}^k$, $k \in \{0,1\}$, причём M_0 и L_1 являются линейными непрерывными операторами и имеют ограниченные обратные операторы.

В силу этих результатов [3, 4] приведём задачу (3), (4) к эквивалентной системе, которую назовём *нормальной формой* задачи (3), (4):

$$R\dot{u}^0 = u^0 + G(u), \quad u^0(0) = u_0^0, \quad \dot{u}^1 = Su^1 + H(u), \quad u^1(0) = u_0^1. \tag{6}$$

Здесь $u^k \in \mathcal{U}^k$, $k \in \{0,1\}$, $u = u^0 + u^1$, операторы $R = M_0^{-1}L_0$, $S = L_1^{-1}M_1$, $G = M_0^{-1}(I-Q)F$, $H = L_1^{-1}QF$.

Далее будем изучать такие квазистационарные полутраектории, для которых $R\dot{u}^0 \equiv 0$. Для этого предположим, что оператор R — *бирасщепляющий* [9], т. е. его ядро $\ker R$ и образ $\operatorname{im} R$ дополняемы в пространстве $\mathcal{U}$. Обозначим $\mathcal{U}^{00} = \ker R$, а через $\mathcal{U}^{01} = \mathcal{U}^0 \ominus \mathcal{U}^{00}$ обозначим некоторое дополнение к подпространству $\mathcal{U}^{00}$. Тогда первое уравнение (6) примет следующий вид:

$$R\dot{u}^{01} = u^{00} + u^{01} + G(u), \quad u = u^{00} + u^{01} + u^1.$$

Теорема 1. *Пусть оператор M сильно (L,p)-секториален, а оператор R — бирасщепляющий. Пусть существует квазистационарная полутраектория* (4). *Тогда она удовлетворяет соотношениям*

$$0 = u^{00} + u^{01} + G(u), \quad u^{01} = \mathrm{const}. \tag{7}$$

Теорема 1 даёт необходимые условия существования квазистационарной полутраектории уравнения (4). Рассмотрим теперь достаточные условия. Известно, что при условии сильной (L,p)-секториальности оператора M оператор S секториален. Следовательно, он порождает на $\mathcal{U}^1$ аналитическую полугруппу, которую мы обозначим через $\{U_1^t : t \in \bar{\mathbb{R}}_+\}$, так как оператор U_1^t есть сужение оператора U^t на $\mathcal{U}^1$. Из того, что $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$ следует, что существует проектор $P \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$, соответствующий данному расщеплению. Оказывается, что $P \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_M)$, и тогда $\mathcal{U}_M = \mathcal{U}_M^0 \oplus \mathcal{U}_M^1$, причём вложение $\mathcal{U}_M^k \subset \mathcal{U}^k$, $k \in \{0,1\}$ плотно и непрерывно [3, 4].

Теорема 2. *Пусть оператор M сильно (L,p)-секториален, оператор R — бирасщепляющий, оператор $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_M;\mathcal{F})$. Пусть выполняются следующие условия:*

(A1) *в некоторой окрестности $\mathcal{O}_{u_0} \subset \mathcal{U}_M$ точки u_0 выполнено соотношение*

$$0 = u_0^{01} + (I - P_R)(G(u^{00} + u_0^{01} + u^1)); \tag{8}$$

(A2) *проектор $P_R \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_M^0)$, и оператор $I + P_R G'_{u_0} : \mathcal{U}_M^{00} \to \mathcal{U}_M^{00}$ — топлинейный изоморфизм ($\mathcal{U}_M^{00} = \mathcal{U}_M \cap \mathcal{U}^{00}$);*

(A3) *для аналитической полугруппы $\{U_1^t : t \in \bar{\mathbb{R}}_+\}$ выполнено соотношение*

$$\int_0^\tau \|U_1^t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}^1;\mathcal{U}_M^1)} dt < \infty \quad \forall \tau \in \mathbb{R}_+. \tag{9}$$

Тогда существует единственное решение задачи (3), (4), *являющееся квазистационарной полутраекторией уравнения* (4).

Замечание 1. Условие (9) для обычных аналитических полугрупп, имеющих оценку $\|U_1^t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}^1;\mathcal{U}_M^1)} < t^{-1}\mathrm{const}$, не выполняется. Обозначим через $\mathcal{U}_\alpha^1 = [\mathcal{U}^1; \mathcal{U}_M^1]_\alpha$, $\alpha \in [0,1]$ — некоторое интерполяционное пространство, построенное по оператору S. В теореме 2 условие "$F \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_M^1;\mathcal{F})$" дополним условием "$H \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_M^1;\mathcal{U}_\alpha^1)$", а соотношение (9) заменим соотношением

$$\int_0^\tau \|U_1^t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}^1;\mathcal{U}_\alpha^1)} dt < \infty \quad \forall \tau \in \mathbb{R}_+. \tag{10}$$

Тогда утверждение теоремы 2 не изменится. Обсуждение этого круга вопросов см. в [10, гл. 9]. Очевидно, что окрестность $\mathcal{O}_{u_0}$ является частью фазового пространства уравнения (4).

Пусть теперь $\mathcal{U}_k$ и $\mathcal{F}_k$ — банаховы пространства, операторы $A_k \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_k, \mathcal{F}_k)$, а операторы $B_k : \operatorname{dom} B_k \to \mathcal{F}_k$ линейны и замкнуты с областями определений $\operatorname{dom} B_k$ плотными в $\mathcal{U}_k$, $k \in \{1,2\}$. Построим пространства $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \times \mathcal{U}_2$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ и операторы $L = A_1 \otimes A_2$, $M = B_1 \otimes B_2$. По построению оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$, а оператор $M : \operatorname{dom} M \to \mathcal{F}$ линеен, замкнут и плотно определён, $\operatorname{dom} M = \operatorname{dom} B_1 \times \operatorname{dom} B_2$.

Теорема 3. *Пусть операторы B_k сильно (A_k, p_k)-секториальны, $k \in \in \{1,2\}$. Тогда оператор M сильно (L,p)-секториален, $p = \max(p_1, p_2)$.*

2. Редукция к полулинейному уравнению соболевского типа. Для того чтобы редуцировать задачу (1), (2) к задаче (3), (4), введём, следуя [11, 12], пространства $\mathbf{H}^2_\sigma$, $\mathbf{H}^2_\pi$, $\mathbf{H}_\sigma$ и $\mathbf{H}_\pi$: $\mathbf{H}^2_\sigma$ и $\mathbf{H}_\sigma$ — подпростанства соленоидальных функций в пространствах $(W^2_2(\Omega))^n \cap (\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega))^n$ и $(L_2(\Omega))^n$ соответственно, а $\mathbf{H}^2_\pi$ и $\mathbf{H}_\pi$ — их ортогональные (в смысле $(L_2(\Omega))^n$) дополнения. Обозначим через Σ ортопроектор на $\mathbf{H}_\sigma$, причём его сужение на пространство $(W^2_2(\Omega))^n \cap \cap (\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega))^n$ будем обозначать тем же символом. Положим $\Pi = I - \Sigma$. Формулой $A = \nabla^2 E_n : \mathbf{H}^2_\sigma \oplus \mathbf{H}^2_\pi \to \mathbf{H}_\sigma \oplus \mathbf{H}_\pi$, где E_n — единичная матрица порядка n, зададим линейный непрерывный оператор с дискретным конечнократным спектром $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$, сгущающимся лишь на $-\infty$. Формулой $B : \boldsymbol{v} \to \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{v})$ зададим линейный непрерывный сюръективный оператор $B : \mathbf{H}^2_\sigma \oplus \mathbf{H}^2_\pi \to \mathbf{H}_\pi$ с ядром $\ker B = \mathbf{H}^2_\sigma$. Положим $\mathcal{U}_{10} = \mathbf{H}^2_\sigma \times \mathbf{H}^2_\pi \times \mathbf{H}_p$, $\mathcal{F}_{10} = \mathbf{H}_\sigma \times \mathbf{H}_\pi \times \mathbf{H}_p$, где $\mathbf{H}_p = \mathbf{H}_\pi$; $\mathcal{U}_{1i} = \mathbf{H}^2 \cap \overset{\circ}{\mathbf{H}}{}^1 = \mathbf{H}^2_\sigma \times \mathbf{H}^2_\pi$ и $\mathcal{F}_{1i} = \mathbf{L}_2 = \mathbf{H}_\sigma \times \mathbf{H}_\pi$, $i \in K$. Тогда пространства $\mathcal{U}_1 = \oplus^k_{l=0} \mathcal{U}_{1l}$, $\mathcal{F}_1 = \oplus^k_{l=0} \mathcal{F}_{1l}$. Операторы A_1 и $B_1 : \mathcal{U}_1 \to \mathcal{F}_1$ определим формулами $A_1 = \operatorname{diag}[\hat{A}_1, E_k]$, где

$$\hat{A}_1 = \begin{pmatrix} \check{A}_1 & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad \check{A}_1 = \begin{pmatrix} \Sigma(I - \lambda A)\Sigma & \Sigma A(I - \lambda A)\Pi \\ \Pi(I - \lambda A)\Sigma & \Pi A(I - \lambda A)\Pi \end{pmatrix};$$

$B_1 = (B_1^{ij})^2_{i,j=1}$, где

$$B_1^{11} = \begin{pmatrix} \nu\Sigma A & \nu\Sigma A & O \\ \nu\Pi A & \nu\Pi A & -I \\ O & B & O \end{pmatrix}, \quad B_1^{12} = \begin{pmatrix} \beta_1\Sigma A & \ldots & \beta_k\Sigma A \\ \beta_1\Pi A & \ldots & \beta_k\Pi A \\ O & \ldots & O \end{pmatrix},$$

B_1^{21} содержит k строк вида $(I,\ I,\ O)$, $B_1^{22} = \operatorname{diag}[\alpha_1, \ldots, \alpha_k]$.

Замечание 2. Обозначим через A_σ сужение оператора ΣA на $\mathbf{H}^2_\sigma$. По теореме Солонникова—Воровича—Юдовича спектр $\sigma(A_\sigma)$ вещественен, дискретен, конечнократен и сгущается лишь на $-\infty$.

Из соответствующих результатов [12] вытекает следующая

Теорема 4. (i) *Операторы A_1, $B_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_1; \mathcal{F}_1)$, и, если $\lambda^{-1} \notin \sigma(A)$, то оператор A_1 — бирасщепляющий,* $\ker A_1 = \{0\} \times \{0\} \times \mathbf{H}_p \times \underbrace{\{0\} \times \ldots \times \{0\}}_{k}$, $\operatorname{im} A_1 = \mathbf{H}_\sigma \times \mathbf{H}_\pi \times \{0\} \times \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 \times \ldots \times \mathcal{F}_k$.

(ii) *Если* $\lambda^{-1} \notin \sigma(A) \cup \sigma(A_\sigma)$, *то оператор* B_1 $(A_1, 1)$-*ограничен.*

Замечание 3. Впервые понятие (A, σ)-ограниченного оператора B введено в [13]. Оператор (L, p)-ограничен, если порядок несущественной особой точки в бесконечности равен p.

Далее положим $\mathcal{U}_2 = \mathcal{F}_2 = L_2(\Omega)$ и формулой $B_2 = \text{æ}\nabla^2 : \operatorname{dom} B_2 \to \mathcal{F}_2$ определим линейный замкнутый и плотно определенный оператор B_2, $\operatorname{dom} B_2 = W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Положим $A_2 \equiv I$. Тогда в силу секториальности оператора B_2 справедлива

Теорема 5. *Оператор* B_2 *сильно* A_2-*секториален.*

Положим $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$. Вектор u пространства $\mathcal{U}$ имеет вид $u = \operatorname{col}(u_\sigma, u_\pi, u_p, w_1, \ldots, w_k, u_\theta)$, где $\operatorname{col}(u_\sigma, u_\pi, u_p, w_1, \ldots, w_k) \in \mathcal{U}_1$, а $u_\theta \in \mathcal{U}_2$. Здесь $u_\sigma = \Sigma v$, $u_\pi = (I - \Sigma)v = \Pi v$, $u_p = \bar{p}$. Операторы L и M определим формулами $L = A_1 \otimes A_2$ и $M = B_1 \otimes B_2$. Оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$, а оператор $M : \operatorname{dom} M \to \mathcal{F}$ линеен, замкнут и плотно определен, $\operatorname{dom} M = \mathcal{U}_1 \times \operatorname{dom} B_2$. Из теоремы 4 и замечания 2.1.1 [4] следует, что оператор B_1 сильно $(A_1,1)$-секториален. В силу этого и теорем 3, 5 справедлива

Теорема 6. *Пусть* $\lambda^{-1} \notin \sigma(A)$, *тогда оператор* M *сильно* $(L,1)$-*секториален.*

Перейдём к построению нелинейного оператора F. В данном случае его можно представить в виде $F = F_1 \otimes F_2$, где

$$
\begin{aligned}
F_1 = F_1(u_\sigma, u_\pi, u_\theta) = \\
&= \operatorname{col}\Big(-\Sigma\Big(\big((u_\sigma + u_\pi)\cdot\nabla\big)(u_\sigma + u_\pi) + gqu_\theta\Big), \\
&\qquad -\Pi\Big(\big((u_\sigma + u_\pi)\cdot\nabla\big)(u_\sigma + u_\pi) + gqu_\theta\Big), \underbrace{0, \ldots, 0}_{k+1}\Big),
\end{aligned}
$$

а $F_2 = F_2(u_\sigma, u_\pi, u_\theta) = (u_\sigma + u_\pi)\cdot(q - \nabla u_\theta)$. Найдём формально производную Фреше F'_u оператора F в точке u:

$$
F'_u = \begin{pmatrix}
\Sigma a(u_\sigma, u_\pi) & \Sigma a(u_\sigma, u_\pi) & O & \ldots & O & -g\Sigma q \\
\Pi a(u_\sigma, u_\pi) & \Pi a(u_\sigma, u_\pi) & O & \ldots & O & -g\Pi q \\
O & O & O & \ldots & O & O \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
O & O & O & \ldots & O & O \\
(q - \nabla u_\theta)\cdot(*) & (q - \nabla u_\theta)\cdot(*) & O & \ldots & O & -(u_\sigma + u_\pi)\cdot(*)
\end{pmatrix},
$$

где $a(u_\sigma, u_\pi) = -\big((*)\cdot\nabla\big)(u_\sigma + u_\pi) - \big((u_\sigma + u_\pi)\cdot\nabla\big)(*)$, а на место символа “$*$” следует ставить соответствующую координату вектора v в случае, когда мы хотим найти вектор $F'_u v$.

В нашем случае пространство $\mathcal{U}_M = \mathcal{U}_1 \times \operatorname{dom} B_2$. Нетрудно показать [6, 7], что при любых $u \in \mathcal{U}_M$ оператор $F'_u \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_M; \mathcal{F})$. Аналогично вторая производная Фреше F''_u оператора F — непрерывный билинейный оператор из $\mathcal{U}_M \times \mathcal{U}_M$ в $\mathcal{F}$, а $F'''_u \equiv O$. Таким образом, справедлива

Теорема 7. *Оператор* $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_M; \mathcal{F})$.

Итак, редукция задачи (1), (2) к задаче (3), (4) закончена.

3. Фазовое пространство и квазистационарные полутраектории. В дальнейшем всюду будем отождествлять задачи (1), (2) и (3), (4). Теперь перейдём к проверке условий теорем 1 и 2.

В силу теоремы 6 и теоремы 2.2.1 [4] существует аналитическая полугруппа $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ разрешающих операторов уравнения (5), которую в данном случае естественно представить в виде $U^t = V^t \times W^t$, где $V^t(W^t)$ — сужение оператора U^t на $\mathcal{U}_1(\mathcal{U}_2)$. Так как оператор B_2 секториален, то $W^t = \exp(tB_2)$, откуда следует, что ядро этой полугруппы $\mathcal{W}^\circ = \{0\}$, а образ $\mathcal{W}^1 = \mathcal{U}_2$.

Рассмотрим полугруппу $\{V^t : t \in \mathbb{R}_+\}$. В силу теорем 4 и 6 и замечания 2.2.2 [4] данная полугруппа продолжима до группы $\{V^t : t \in \mathbb{R}\}$. Её ядро $\mathcal{V}^0 = \mathcal{U}_1^{00} \oplus \mathcal{U}_1^{01}$, где $\mathcal{U}_1^{00} = \{0\} \times \{0\} \times \mathbf{H}_p \times \{0\} \times \ldots \times \{0\}$ ($= \ker A_1$ по теореме 5), а $\mathcal{U}_1^{01} = \Sigma A_\lambda^{-1} A_{\lambda\pi}^{-1}[\mathbf{H}_\pi^2] \times \mathbf{H}_\pi^2 \times \underbrace{\{0\} \times \ldots \times \{0\}}_{k+1}$. Здесь $A_\lambda = I - \lambda A$, $A_{\lambda\pi}$ — сужение оператора ΠA_λ^{-1} на $\mathbf{H}_\pi$. В [11] показано, что если $\lambda^{-1} \notin \sigma(A) \cup \cup \sigma(A_\sigma)$, то оператор $A_{\lambda\pi} : \mathbf{H}_\pi \to \mathbf{H}_\pi^2$ — топлинейный изоморфизм. Обозначим через $\mathcal{U}_1^1$ образ $\mathcal{V}^1$. Тогда в силу сильной $(A_1, 1)$-секториальности оператора B_1 пространство $\mathcal{U}_1$ разлагается в прямую сумму подпространств: $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_1^{00} \oplus \oplus \mathcal{U}_1^{01} \oplus \mathcal{U}_1^1$.

Построим оператор $R = B_{10}^{-1} A_{10} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_1^{00} \oplus \mathcal{U}_1^{01})$, где $A_{10}(B_{10})$ — сужение оператора $A_1(B_1)$ на $\mathcal{V}^0 = \mathcal{U}_1^{00} \oplus \mathcal{U}_1^{01}$. (Оператор B_{10}^{-1} существует в силу теоремы 6, следствия 2.2.2 и замечания 2.1.1 [4]). По построению $\ker R = = \mathcal{U}_1^{00}$, а в [11] показано, что $\operatorname{im} R = \mathcal{U}_1^{01}$. Значит, оператор R — бирасщепляющий. Обозначим через P_R проектор пространства $\mathcal{U}_1^{00} \oplus \mathcal{U}_1^{01}$ на $\mathcal{U}_1^{00}$ вдоль $\mathcal{U}_1^{01}$. В силу конструкции пространства $\mathcal{U}_M$ проектор $P_R \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_M^0)$, где $\mathcal{U}_M^0 = = \mathcal{U}_M \cap (\mathcal{U}_1^{00} \oplus \mathcal{U}_1^{01})$ ($\equiv \mathcal{U}_1^{00} \oplus \mathcal{U}_1^{01}$). Зафиксируем это в следующем утверждении.

Лемма 1. *Пусть $\lambda^{-1} \notin \sigma(A) \cup \sigma(A_\sigma)$. Тогда оператор R — бирасщепляющий, причём $P_R \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_M^0)$.*

Введём в рассмотрение проекторы $P_k = \operatorname{diag}[\hat{P}_k, 0]$, $Q_k = \operatorname{diag}[\hat{Q}_k, 0]$, $k \in \{0, 1\}$. (Подробное описание этих проекторов см. в [12]). Из результатов [12] и в силу того, что ядро $\mathcal{W}^0 = \{0\}$, следует, что $I - P = (P_0 + P_1) \times O$, $Q = = (I - Q_0 - Q_1) \times I$, $P : \mathcal{U} \to \mathcal{U}^1$, $Q : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^1$. Применяя проектор $I - P$ к уравнению (4) в данной интерпретации, получаем

$$\Pi\Big(\nu A(u_\sigma + u_\pi) - \big((u_\sigma + u_\pi) \cdot \nabla\big)(u_\sigma + u_\pi) + \\ + \sum_{l=1}^{k} \beta_l \nabla^2 w_l - u_p - gqu_\theta\Big) = 0, \quad Bu_\pi = 0. \quad (11)$$

Отсюда в силу теоремы 1 и свойств оператора B получаем необходимое условие квазистационарности полутраектории $u_\pi \equiv 0$, то есть все решения нашей задачи (если они существуют) с необходимостью должны лежать в плоскости $\mathcal{B} = \{u \in \mathcal{U}_M : u_\pi = 0\}$. А так как $\Pi u_p = u_p$, то из первого уравнения (11) получаем соотношение (7) в нашей транскрипции:

$$u_p = \Pi\Big(\nu A u_\sigma - (u_\sigma \cdot \nabla) u_\sigma + \sum_{l=1}^{k} \beta_l \nabla^2 w_l - gqu_\theta\Big). \quad (12)$$

Очевидно, что $P_0 \equiv P_R$, поэтому второе уравнение (11) есть соотношение (8) применительно к нашей ситуации. Итак, справедлива

Лемма 2. *В условиях леммы* 1 *любое решение задачи* (1), (2) *лежит во множестве*

$$\mathcal{A} = \Big\{u \in \mathcal{U}_M : u_\pi = 0,\, u_p = \Pi\Big(\nu A u_\sigma - (u_\sigma \cdot \nabla)u_\sigma + \sum_{l=1}^{k} \beta_l \nabla^2 w_l - gq u_\theta\Big)\Big\}.$$

Замечание 4. Из (12) сразу следует условие (A2) теоремы 2 для любой точки $u_0^0 \in \mathcal{U}_M^{00} (\equiv \mathcal{U}_1^{00} \times \{0\})$. Поэтому множество $\mathcal{A}$ — простое банахово многообразие $\mathcal{C}^\infty$-диффеоморфное подпространству $\mathcal{U}_1^1 \times \mathcal{U}_2$ — является кандидатом на роль фазового пространства $\mathcal{B} \supset \mathcal{A}$ задачи (1), (2).

Приступим к проверке условий (9) и (10). Построим пространство $\mathcal{U}_\alpha = \mathcal{U}_1 \times \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Данное пространство, очевидно, будет интерполяционным пространством для пары $[\mathcal{U}, \mathcal{U}_M]_\alpha$, причём $\alpha = 1/2$. Как отмечено выше, полугруппа $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ продолжается до группы $\{V_1^t : t \in \mathbb{R}\}$ на $\mathcal{U}_1^1$, где V_1^t — сужение оператора V^t на $\mathcal{U}_1^1$. Поскольку $\mathcal{U}_M^1 = \mathcal{U}_M \cap \mathcal{U}_1^1$ (по построению) и оператор B_1 непрерывен (теорема 4), то в силу равномерной ограниченности полугруппы $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ имеем

$$\int_0^\tau \|V_1^t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}_1^1;\mathcal{U}_M^1)} dt \leqslant \mathrm{const} \|B_1\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}_1;\mathcal{F}_1)} \int_0^\tau \|V_1^t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}_1^1)} dt < \infty \quad \forall \tau \in \mathbb{R}_+. \tag{13}$$

Далее, в силу неравенства Соболева [10, гл. 9], полугруппа $\{W^t : t \in \bar{\mathbb{R}}_+\}$ удовлетворяет оценке

$$\int_0^\tau \|W^t\|_{\mathcal{L}(\mathrm{dom}\ B_2;\, \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))} dt < \infty. \tag{14}$$

Положим $\mathcal{U}_\alpha^1 = \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}^1$, где $\mathcal{U}^1 = \mathcal{U}_1^1 \times \mathcal{U}_2$. Тогда из (13) и (14) вытекает

Лемма 3. *В условиях леммы* 1 *выполняется соотношение* (14).

Наконец, выполняя требование (10), найдём оператор H. Оператор H естественно представить в виде $H = H_1 \otimes H_2$, где $H_1 = A_{11}^{-1}(I - Q_0 - Q_1)F_1$, а $H_2 \equiv F_2$ (A_{11} — сужение оператора A_1 на $\mathcal{U}_1^1$). Включение $H \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_M^1; \mathcal{U}_\alpha^1)$ показывается аналогично тому, как было показано включение $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_M; \mathcal{F})$.

Таким образом, все условия теоремы 2 выполнены. Поэтому справедлива

Теорема 8. *Пусть* $\lambda^{-1} \notin \sigma(A) \cup \sigma(A_\sigma)$. *Тогда при любом* u_0 *таком, что* $u_0 \in \mathcal{A}$, *и некотором* $T \in \mathbb{R}_+$ *существует единственное решение* $u \in \mathcal{C}^\infty((0,T); \mathcal{U}_M)$ *задачи* (1), (4), *являющееся квазистационарной полутраекторией, причём* $u(t) \in \mathcal{A}$.

Работа поддержана программой «Развитие научного потенциала высшей школы» (2009–2010 *годы*), (*проект* № 2.1.1/2301).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Осколков А. П.* Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина—Фойгта и жидкостей Олдройта / В сб.: *Краевые задачи математической физики.* 13: Сборник работ / Тр. МИАН СССР, 1988. — Т. 179. — С. 126–164; англ. пер.: *Oskolkov A. P.* Initial-boundary value problems for the equations of motion of Kelvin–Voigt fluids and Oldroyd fluids // *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1989. — Vol. 179. — P. 137–182.
2. *Свиридюк Г. А.* Разрешимость задачи термоконвекции вязкоупругой несжимаемой жидкости // *Изв. вузов. Матем.*, 1990. — № 12. — С. 65–70; англ. пер.: *Sviridyuk G. A.* Solvability of the problem of thermal convection of a viscoelastic incompressible liquid // *Sov. Math.*, 1990. — Vol. 34, No. 12. — P. 80–86.
3. *Sviridyuk G. A., Fedorov V. E.* Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / Inverse and Ill-posed Problems Series. — Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2003. — 216 pp.
4. *Свиридюк Г. А.* К общей теории полугрупп операторов // *УМН*, 1994. — Т. 49, № 4(298). — С. 47–74; англ. пер.: *Sviridyuk G. A.* On the general theory of operator semigroups // *Russian Math. Surveys*, 1994. — Vol. 49, No. 4. — P. 45–74.
5. *Свиридюк Г. А.* Квазистационарные траектории полулинейных динамических уравнений типа Соболева // *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1993. — Т. 57, № 3. — С. 192–207; англ. пер.: *Sviridyuk G. A.* Quasistationary Trajectories of Semilinear Dynamical Equations of Sobolev Type // *Russian Academy of Sciences. Izvestiya Mathematics*, 1994. — Vol. 42, No. 3. — P. 601-614.
6. *Свиридюк Г. А., Сукачева Т. Г.* Фазовые пространства одного класса операторных уравнений // *Дифференц. уравнения*, 1990. — Т. 26, № 2. — С. 250–258.
7. *Свиридюк Г. А., Сукачева Т. Г.* Задача Коши для одного класса полулинейных уравнений типа Соболева // *Сиб. матем. ж.*, 1990. — Т. 31, № 5. — С. 109–119.
8. *Levine H. A.* Some Nonexistance and Instability Theorems for Solutions of Formally Parabolic Equations of Form $Du_t = -Au + F(u)$ // *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 1973. — Vol. 51, No. 5. — P. 371–386.
9. *Борисович Ю. Г., Звягин В. Г., Сапронов Ю. И.* Нелинейные фредгольмовы отображения и теория Лере—Шаудера // *УМН*, 1977. — Т. 32, № 4(196). — С. 3–54; англ. пер.: *Borisovich Yu. G., Zvyagin V. G., Sapronov Yu. I.* Non-linear Fredholm maps and the Leray-Schauder theory // *Russian Math. Surveys*, 1977. — Vol. 32, No. 4. — P. 1–54.
10. *Marsden J. E., McCracken M.* The Hopf Bifurcation and Its Applications / Applied Mathematical Sciences. — New York: Springer-Verlag, 1976. — Vol. 19. — 408 pp.; русск. пер.: *Марсден Дж., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. — М.: Мир, 1980. — 368 с.
11. *Свиридюк Г. А.* Об одной модели динамики слабосжимаемой вязкоупругой жидкости // *Изв. вузов. Матем.*, 1994. — № 1. — С. 62–70; англ. пер.: *Sviridyuk G. A.* On a model for dynamics of weak-compressible viscous-elastic liquid // *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 1994. — Vol. 38, No. 1. — P. 59–68.
12. *Сукачева Т. Г.* Об одной модели движения несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина—Фойгта ненулевого порядка // *Дифференц. уравнения*, 1997. — Т. 33, № 4. — С. 552–557; англ. пер.: *Sukacheva T. G.* On a certain model of motion of an incompressible visco-elastic Kelvin-Voight fluid of nonzero order // *Differ. Equations*, 1997. — Vol. 33, No. 4. — P. 557–562.
13. *Свиридюк Г. А.* Полулинейные уравнения типа Соболева с относительно ограниченным оператором // *ДАН СССР*, 1991. — Т. 318, № 4. — С. 828–831; англ. пер.: *Sviridyuk G. A.* Semilinear equations of Sobolev type with a relatively bounded operator // *Sov. Math. Dokl.*, 1991. — Vol. 43, No. 3. — P. 797–801.

Поступила в редакцию 29/VI/2010;
в окончательном варианте — 10/IX/2010.

MSC: 35R20, 35G25, 35Q72, 35Q35, 76A05

ON A HOMOGENOUS THERMOCONVECTION MODEL OF THE NON-COMPRESSIBLE VISCOELASTIC KELVIN-VOIGHT FLUID OF THE NON-ZERO ORDER

T. G. Sukacheva, O. P. Matveea

Novgorod State University,
41, B. St.-Petersburgskaya, Velikiy Novgorod, 173003, Russia.

E-mails: `tamara.sukacheva@novsu.ru, oltan.72@mail.ru`

The homogeneous thermoconvection problem of the non-compressible viscoelastic Kelvin-Voight fluid of the non-zero order is considered. The conducted research is based on the results of the semilinear Sobolev type equations theory, because the first initial value problem for the corresponding system of the differential equations in private derivatives is reduced to the abstract Cauchy problem for the specified equation. The concepts of the p-sectorial operator and the resolving semigroup of operators of the Cauchy problem for the corresponding linear homogeneous Sobolev type equation are used. The existence and uniqueness theorem of the solution which is a quasi-stationary semi-trajectory is proved. The complete description of the phase space is obtained.

Key words: *Sobolev type equations, non-compressible viscoelastic fluid, phase space.*

Original article submitted 29/VI/2010;
revision submitted 10/IX/2010.

Tamara G. Sukacheva (Dr. Sci. (Phys. & Math.)), Professor, Dept. of Mathematical Analysis. *Olga P. Matveeva*, Senior Teacher, Dept. of Mathematical Analysis.