

УДК 530.12

ТОЧНЫЕ КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ
ДЛЯ ТАХИОННЫХ ПОЛЕЙС. В. Червон¹, О. Г. Панина², М. Сами³¹ Ульяновский государственный педагогический университет им. И. Н. Ульянова, 432000, Ульяновск, пл. 100-летия со дня рождения В. И. Ленина, 4.² Самарский государственный аэрокосмический университет им. ак. С. П. Королёва (национальный исследовательский университет), 443086, Самара, Московское ш., 34.³ Университет Джамаи Миллиа (Центральный университет), Нью-Дели, 110025, Индия.

E-mails: chervon.sergey@gmail.com, panina.ph@gmail.com, sami@iucaa.ernet.in

Рассматривается приложение метода суперпотенциала к решению задач космологии с тахионными полями. Найдены классы точных решений и установлены периоды времени с преобладанием тёмной энергии.

Ключевые слова: космология, тахионное поле, поля тёмного сектора, точные решения.

Введение. Тахионные поля по отдельности или во взаимодействии с другими полями тёмного сектора используются многими авторами для построения космологических моделей [1]. Тахионное поле имеет отрицательный квадрат массы и поэтому противоположный знак массового члена, а также достаточно легко реализуется в простых механических моделях и может встречаться при описании неустойчивых сред в физике твёрдого тела.

Лагранжиан тахионного поля имеет следующий вид [2, 3]:

$$\mathcal{L}_T = -V(\phi)\sqrt{1 - \phi_{,\mu}\phi^{,\mu}}.$$

Действие для тахионного поля записывается так:

$$S_{ssf} = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{R}{2\kappa} + \mathcal{L}_T \right). \quad (1)$$

Структура гамильтониана в этой теории алгебраически очень похожа на гамильтониан релятивистской частицы. Скалярное поле описывается уравнением состояния $w = p/\rho$.

Будем рассматривать тахионное поле ϕ во Вселенной с пространственно-плоской метрикой Фрийдмана–Робертсона–Уокера. Тензор энергии-импульса (ТЭИ) $T_{\nu}^{\mu} = \text{diag}(\rho, -p, -p, -p)$, где плотность энергии ρ положительна, а давление отрицательно. Варьируя действие (1) по скалярному полю ϕ , получаем уравнение тахионного поля [3]

$$\frac{\ddot{\phi}}{1 - \dot{\phi}^2} + 3H\dot{\phi} + \frac{1}{V(\phi)} \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} = 0, \quad (2)$$

Сергей Викторович Червон (д.ф.-м.н., проф.), профессор, каф. физики. *Ольга Геннадьевна Панина*, ассистент, каф. физики. *М. Сами*, профессор, директор, центр теоретической физики.

которое вместе с уравнениями Эйнштейна [4] образует самосогласованную систему динамических уравнений. На сегодняшний день существует небольшое количество решений для тахионных полей [1], в основном эти решения приближённые, так как получены численно. Поэтому является актуальной задача поиска точных решений в тахионной космологии.

1. Метод суперпотенциала для тахионных полей. Суперпотенциал для тахионного поля строится по аналогии с методом построения для обычного скалярного поля [5]. Определяем суперпотенциал W как

$$W(\phi) = \ln \frac{V(\phi)}{\sqrt{1 - U^2(\phi)}}, \quad U(\phi) = \dot{\phi}, \quad (3)$$

тогда уравнение тахионного поля (2) принимает вид

$$3HU(\phi) + \frac{\partial W(\phi)}{\partial \phi} = 0.$$

Отсюда можно получить выражение для суперпотенциала

$$W(\phi) = \ln \frac{4M_p^2}{3\left(\int U(\phi)d\phi\right)^2}.$$

Используя уравнения Эйнштейна, находим

$$H^2 = \frac{e^{W(\phi)}}{3M_p^2}, \quad H = \frac{2}{3\int U(\phi)d\phi}.$$

Потенциал выразим из уравнения (3):

$$V(\phi) = e^{W(\phi)}\sqrt{1 - U^2(\phi)}.$$

Теперь можно продолжать поиск решений с заданным типом эволюции скалярного поля. Рассмотрим несколько случаев, отличающихся видом зависимости скалярного поля ϕ от времени.

Логарифмическая эволюция тахионного поля $\phi = A \ln(\lambda t)$:

$$W = \ln \frac{4M_p^2}{3\left(C_1 - \frac{A^2}{t}\right)^2}, \quad H = \frac{2}{3\left(C_1 - \frac{A^2}{t}\right)}, \quad a(t) = C_2 e^{\frac{2}{3C_1}t} \left(A^2 - C_1 t\right)^{\frac{2A^2}{3C_1}},$$

$$V(t) = \sqrt{1 - \frac{A^2}{t^2}} \frac{4M_p^2}{3\left(C_1 - \frac{A^2}{t}\right)^2}, \quad V(\phi) = \sqrt{1 - (A\lambda e^{-(\phi/A)})^2} \frac{4M_p^2}{3\left(C_1 - A^2\lambda e^{-(\phi/A)}\right)^2}.$$

Степенная эволюция тахионного поля $\phi = At^l$, $l \neq 0$, $l \neq 1/2$:

$$W = \ln \frac{4M_p^2}{3\left(C_1 + \frac{A^{2l^2}}{2l-1}t^{2l-1}\right)^2}, \quad H = \frac{2}{3\left(C_1 + \frac{A^{2l^2}}{2l-1}t^{2l-1}\right)},$$

$$V(t) = \sqrt{1 - (Alt^{l-1})^2} \frac{4M_p^2}{3(C_1 + \frac{A^2 l^2}{2l-1} t^{2l-1})^2},$$

$$V(\phi) = \sqrt{1 - \left(Al(\phi/A)^{\frac{l-1}{l}}\right)^2} \frac{4M_p^2}{3(C_1 + \frac{A^2 l^2}{2l-1} (\phi/A)^{\frac{2l-1}{l}})^2}.$$

В случае $l = 1/2$:

$$W = \ln \frac{4M_p^2}{3(C_1 + \frac{A^2}{4} \ln t)^2}, \quad H = \frac{2}{3(C_1 + \frac{A^2}{4} \ln t)},$$

$$V(t) = \sqrt{1 - \frac{A^2}{4t} \frac{4M_p^2}{3(C_1 + \frac{A^2}{4} \ln t)^2}}, \quad V(\phi) = \sqrt{1 - \frac{A^4}{4\phi^2} \frac{4M_p^2}{3(C_1 + \frac{A^2}{2} \ln(\phi/A))^2}}.$$

Экспоненциальная эволюция тахионного поля $\phi = Ae^{-\lambda t}$:

$$W = \ln \frac{4M_p^2}{3(C_1 - \frac{A^2 \lambda}{2} e^{-2\lambda t})^2}, \quad H = \frac{2}{3(C_1 - \frac{A^2 \lambda}{2} e^{-2\lambda t})},$$

$$a(t) = C_2(2C_1 e^{2\lambda t} - \lambda A^2)^{\frac{1}{3C_1 \lambda}}, \quad V(t) = \sqrt{1 - (A\lambda e^{-\lambda t})^2} \frac{4M_p^2}{3(C_1 - \frac{A^2 \lambda}{2} e^{-2\lambda t})^2},$$

$$V(\phi) = \sqrt{1 - (\lambda\phi)^2} \frac{4M_p^2}{3(C_1 - \frac{\lambda\phi^2}{2})^2}.$$

Эволюция тахионного поля типа $\phi = A \ln(\text{th}(\lambda t))$:

$$W = \ln \frac{4M_p^2}{3(C_1 - A^2 \lambda (\text{th} \lambda t + \frac{1}{\text{th} \lambda t}))^2}, \quad H = \frac{2}{3(C_1 - A^2 \lambda (\text{th} \lambda t + \frac{1}{\text{th} \lambda t}))},$$

$$V(t) = \sqrt{1 - \left(\frac{2A\lambda}{\text{sh} 2\lambda t}\right)^2} \frac{4M_p^2}{3(C_1 - A^2 \lambda (\text{th} \lambda t + \frac{1}{\text{th} \lambda t}))^2},$$

$$V(\phi) = \sqrt{1 - (2A\lambda \text{ch}(\phi/A))^2} \frac{4M_p^2}{3(C_1 - 2A^2 \lambda \text{ch}(\phi/A))^2}.$$

Эволюция тахионного поля типа $\phi = A \ln(\text{tg}(\lambda t))$:

$$W = \ln \frac{4M_p^2}{3(C_1 + A^2 \lambda (\text{tg} \lambda t - \frac{1}{\text{tg} \lambda t}))^2}, \quad H = \frac{2}{3(C_1 + A^2 \lambda (\text{tg} \lambda t - \frac{1}{\text{tg} \lambda t}))},$$

$$V(t) = \sqrt{1 - \left(\frac{2A\lambda}{\sin 2\lambda t}\right)^2} \frac{4M_p^2}{3(C_1 + A^2 \lambda (\text{tg} \lambda t - \frac{1}{\text{tg} \lambda t}))^2},$$

$$V(\phi) = \sqrt{1 - (2A\lambda \text{ch}(\phi/A))^2} \frac{4M_p^2}{3(C_1 + 2A^2 \lambda \text{sh}(\phi/A))^2}.$$

Эволюция тахионного поля типа $\phi = A \operatorname{sh}^{-1}(\lambda t)$:

$$W = \ln \frac{4M_p^2}{3(C_1 - \frac{A^2\lambda}{3} (\operatorname{cth} \lambda t (\operatorname{cth}^2 \lambda t + 2)))^2}, \quad H = \frac{2}{3(C_1 - \frac{A^2\lambda}{3} \operatorname{cth} \lambda t (\operatorname{cth}^2 \lambda t + 2))},$$

$$V(t) = \sqrt{1 - \left(\frac{A\lambda \operatorname{cth} \lambda t}{\operatorname{sh} \lambda t}\right)^2} \frac{4M_p^2}{3(C_1 - \frac{A^2\lambda}{3} \operatorname{cth} \lambda t (\operatorname{cth}^2 \lambda t + 2))^2},$$

$$V(\phi) = \sqrt{1 - (A\lambda)^2 + (\lambda\phi)^2} \frac{4M_p^2}{3\left(C_1 - \frac{A^2\lambda}{3} \sqrt{(A/\phi)^2 - 1} ((A/\phi)^2 + 1)\right)^2}.$$

Эволюция тахионного поля типа $\phi = A \sin^{-1}(\lambda t)$:

$$W = \ln \frac{4M_p^2}{3(C_1 - \frac{A^2\lambda}{3} \operatorname{ctg}^3 \lambda t)^2}, \quad H = \frac{2}{3(C_1 - \frac{A^2\lambda}{3} \operatorname{ctg}^3 \lambda t)},$$

$$V(t) = \sqrt{1 - \left(\frac{A\lambda \operatorname{ctg} \lambda t}{\sin \lambda t}\right)^2} \frac{4M_p^2}{3(C_1 - \frac{A^2\lambda}{3} \operatorname{ctg}^3 \lambda t)^2},$$

$$V(\phi) = \sqrt{1 - (A\lambda)^2 + (\lambda\phi)^2} \frac{4M_p^2}{3\left(C_1 - \frac{A^2\lambda}{3} ((A/\phi)^2 - 1)^{3/2}\right)^2}.$$

Здесь A, λ, l — произвольные постоянные, C_1, C_2 — постоянные интегрирования.

2. Графическое представление результатов. В качестве примера для логарифмической эволюции тахионного поля график зависимости параметра w из уравнения состояния от времени изображен на рис. 1, зависимость потенциала от поля ϕ представлена на рис. 2.

Для тахионных полей должно выполняться ограничение $\dot{\phi}^2 < 1$, которое следует из формы Лагранжиана тахионного поля. Отсюда при типе эволюции скалярного поля $\phi = A \ln(\lambda t)$ можно выразить значение для времени t_T ,

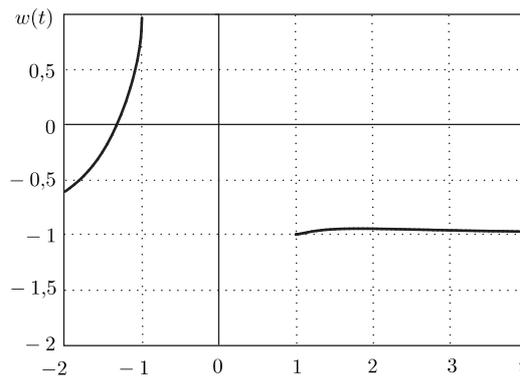
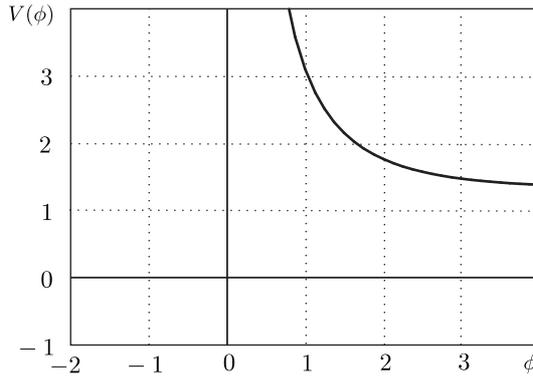


Рис. 1. Параметр уравнения состояния $w(t)$

Рис. 2. Потенциал поля $V(\phi)$

определяющего временной интервал существования тахионного поля. В рассматриваемом случае при $t > t_T = A/\lambda$ указанное ограничение выполняется. Это объясняет вид графика на рис. 1, поскольку с учётом выбранных при построении графика значений произвольных констант $t_T = 1$.

Подставив значение t_T в уравнение эволюции поля ϕ , можно найти ϕ_T , определяющее возможные значения тахионного поля. Выполнив несложный расчет и учитывая, что скалярное поле возрастает, получим $\phi > \phi_T = A \ln A$, что совпадает с графиком на рис. 2. При выбранных значениях произвольных констант $\phi_T = 0$.

Заключение. Метод суперпотенциала является универсальным и упрощает процесс нахождения точных решений для заданного типа полей тёмного сектора. Чтобы получить решение, необходимо записать суперпотенциал, затем задать вид эволюции скалярного поля. Далее находятся параметр Хаббла и физический потенциал. Масштабный фактор в явном виде получен не во всех приведенных решениях, но, тем не менее, для всех приведенных выше решений построены графики зависимостей физического потенциала от тахионного поля $V(\phi)$ и исследовано уравнение состояния. Из этого можно сделать вывод, что исследуемое скалярное поле относится к полям тёмного сектора, что соответствует теоретическим предположениям.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (проекты 2.2.1.1/3341, 2.2.1.1/10854), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы, в рамках мероприятия 1.3.1 (госконтракт № 5163) и в рамках программы Российско-Индийского сотрудничества РФФИ (проект № 08-02-91307-ИНД_a) и ДСТ (проект № RUS P/84-DST)

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Copeland E. J., Sami M., Tsujikawa S. Dynamics of dark energy // *IJMPD*, 2006. Vol. 15, no. 11. Pp. 1753–1935, arXiv: hep-th/0603057.
2. Padmanabhan T. Accelerated expansion of the universe driven by tachyonic matter // *Phys. Rev. D*, 2002. Vol. 66, no. 2, 021301(R). 4 pp., arXiv: hep-th/0204150.
3. Frolov A., Kofman L., Starobinsky A. Prospects and problems of tachyon matter cosmology // *Phys. Let. B*, 2002. Vol. 545, no. 1–2. Pp. 8–16, arXiv: hep-th/0204187.

4. Wald R. M. General Relativity. London: University of Chicago Press, 1984. 506 pp.
5. Червон С. В., Сами М. Точные решения космологической инфляции на бране Рэндалл–Сандрум // *Электронный научный журнал «Исследовано в России»*, 2009, 088. С. 1151–1160, <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2009/088.pdf>. [Chervon S. V., Sami M. Exact solutions of cosmological inflation on the brane Randall–Sandrum // *Élektronniy nauchniy zhurnal “Issledovano v Rossii”*, 2009, 088. Pp. 1151–1160].

Поступила в редакцию 20/XII/2010;
в окончательном варианте — 17/II/2011.

MSC: 83F05

THE EXACT COSMOLOGICAL SOLUTIONS FOR TACHYON FIELDS

*S. V. Chervon*¹, *O. G. Panina*², *M. Sami*³

¹ I. N. Ul'yanov's Ul'yanovsk State Pedagogical University,
4, pl. 100-letiya so dnya rozhdeniya V. I. Lenina, Ul'yanovsk, 432000, Russia.

² S. P. Korolyov Samara State Aerospace University
(National Research University),
34, Moskovskoe sh., Samara, 443086, Russia.

³ Jamia Millia Islamia (A Central University),
Jamia Nagar, New Delhi, 110025, India.

E-mails: chervon.sergey@gmail.com, panina.ph@gmail.com, sami@iucaa.ernet.in

The application of the method of super-potential to the solution of the problems of cosmology with the tachyon fields is examined. The classes of exact solutions are found and the periods of time with the predominance of dark energy are established.

Key words: *cosmology, tachyon field, dark sector field, exact solutions.*

Original article submitted 20/XII/2010;
revision submitted 17/II/2011.

Sergey V. Chervon (Dr. Sci (Phys. & Math.)), Professor, Dept. of Physics. *Ol'ga G. Panina*, Assistant, Dept. of Physics. *M. Sami*, Professor & Director, Centre for Theoretical Physics.