

Механика деформируемого твёрдого тела

УДК 539.376

РАВНОНАПРЯЖЁННОЕ АРМИРОВАНИЕ КОЛЬЦЕВЫХ ИЗГИБАЕМЫХ МЕТАЛЛОКОМПОЗИТНЫХ ПЛАСТИН, РАБОТАЮЩИХ В УСЛОВИЯХ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

А. П. Янковский

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, 630090, Новосибирск, ул. Институтская, 4/1.

E-mail: nemirov@itam.nsc.ru

Сформулирована задача равнонапряжённого армирования (РА) поперечно изгибаемых кольцевых пластин, работающих в условиях установившейся ползучести материалов всех компонент композиции. Проанализирована система разрешающих уравнений и определены граничные условия, при которых гладкие решения задачи РА не существуют. Показаны возможность существования нескольких альтернативных решений задачи РА при одних и тех же входных данных и управления полученными РА-проектами. На конкретном примере продемонстрирована возможность возникновения краевого эффекта в связующем изгибаемой РА-пластины.

Ключевые слова: *металлокомпозиты, равнонапряжённое армирование, изгибаемые пластины, установившаяся ползучесть, неединственность решения.*

Введение. При проектировании металлокомпозитных пластин целесообразно осуществлять их оптимизацию. Одним из наиболее естественных прочностных критериев рационального армирования тонкостенных конструкций является требование равнонапряжённости силовых элементов — волокон (проволок) — вдоль их траекторий, так как при этом несущая способность арматуры используется наиболее полно.

При длительной эксплуатации изделия в случае стационарного термосилового нагружения подавляющую часть времени металлокомпозитная конструкция работает в условиях установившейся ползучести [1], поэтому актуальной является проблема равнонапряжённого армирования (РА) тонкостенных конструкций, работающих в условиях установившейся ползучести материалов всех компонент композиции.

Постановка задачи РА и асимптотический метод её решения для металлокомпозитных пластин в условиях установившейся ползучести, нагруженных в своей плоскости, приведены в [2, 3]. Однако на практике тонкостенные элементы конструкций часто нагружаются в поперечном направлении, поэтому актуальной является проблема РА пластин, испытывающих изгиб.

Андрей Петрович Янковский (д.ф.-м.н.), ведущий научный сотрудник, лаб. физики быстротекающих процессов.

В связи с этим настоящая работа посвящена исследованию задачи РА кольцевых осесимметрично нагруженных металлокомпозитных пластин, работающих в условиях установившейся ползучести всех фаз композиции при поперечном изгибе.

1. Система исходных уравнений и граничные условия. Рассматриваются кольцевые пластины постоянной толщины $2h = \text{const}$, ограниченные кромками радиусов r_0, r_1 ($r_0 < r_1$) и осесимметрично нагруженные в поперечном направлении z . Предполагается: к рассматриваемому моменту времени деформации ползучести получили настолько значительное развитие, что по сравнению с ними можно пренебречь начальными упругими и пластическими деформациями [1]; прогибы считаются малыми; кирхгофская пластина (допустимость гипотез Кирхгофа при расчёте установившейся ползучести изгибаемых пластин обоснована в [1]) испытывает поперечный изгиб и состоит из изотропной металлической матрицы и внедренных в неё N семейств тонковолокнистой однородной арматуры (металлических проволок, возможно, изготовленных из разных материалов) постоянного поперечного сечения; пластина по толщине имеет регулярную и квазиоднородную структуру; в плане структура армирования осесимметрична; температура однородна.

Так как геометрия, нагружение и структура армирования пластины в плане обладают осевой симметрией, то и решение задачи РА будет осесимметричным (не будет зависеть от полярного угла ϕ). Для формулировки осесимметричной задачи РА поперечно изгибаемых кольцевых пластин, работающих в условиях установившейся ползучести, необходимо использовать общеизвестные уравнения равновесия в перерезывающих силах $F_r(r)$ и изгибающих моментах $M_r(r), M_\varphi(r)$ [1, 4]:

$$F_r' + F_r/r = -p(r), \quad M_r' + (M_r - M_\varphi)/r = F_r; \quad (1)$$

соотношения между скоростями изгибных деформаций ξ_r, ξ_φ , скоростями параметров искривления срединной поверхности κ_r, κ_φ и скоростью прогиба v :

$$\xi_r(r, z) = z\kappa_r(r) = -zv''(r), \quad \xi_\varphi(r, z) = z\kappa_\varphi(r) = -zv'(r)/r, \quad (2)$$

$$|z| \leq h, \quad r_0 \leq r \leq r_1,$$

где $p(r)$ — поперечная распределенная нагрузка; штрих означает обыкновенную производную по полярному радиусу r .

Система (1), (2) должна быть дополнена определяющими уравнениями, связывающими между собой M_r, M_φ и κ_r, κ_φ . В случае степенного закона установившейся ползучести для всех материалов компонент композиции имеем (см. (14), (15) в [5])

$$M_r = C_{rr}\kappa_r + C_{r\varphi}\kappa_\varphi, \quad M_\varphi = C_{r\varphi}\kappa_r + C_{\varphi\varphi}\kappa_\varphi, \quad (3)$$

где

$$C_{rr} = 2D_0 \left(1 - \sum_k \omega_k \right) \kappa^{\mu_0-1} + \sum_k D_k \omega_k \kappa_k^{\mu_1-1} \cos^4 \psi_k,$$

$$C_{\varphi\varphi} = 2D_0 \left(1 - \sum_k \omega_k \right) \kappa^{\mu_0-1} + \sum_k D_k \omega_k \kappa_k^{\mu_1-1} \sin^4 \psi_k, \quad (4)$$

$$C_{r\varphi} = D_0 \left(1 - \sum_k \omega_k \right) \kappa^{\mu_0-1} + \sum_k D_k \omega_k \kappa_k^{\mu_1-1} \cos^2 \psi_k \sin^2 \psi_k;$$

$$\kappa(r) = 2\sqrt{\kappa_r^2 + \kappa_r\kappa_\varphi + \kappa_\varphi^2}, \quad \kappa_k(r) = \kappa_r \cos^2 \psi_k(r) + \kappa_\varphi \sin^2 \psi_k(r), \quad (5)$$

$$1 \leq k \leq N;$$

$$D_0 = 4\bar{B}_0 h^{\mu_0+2}/(\mu_0 + 2) = \text{const}, \quad D_k = 2\bar{B}_k h^{\mu_k+2}/(\mu_k + 2) = \text{const};$$

$$\bar{B}_0 = (\sqrt{3^{m_0+1}} B_0)^{-\mu_0} = \text{const}, \quad \bar{B}_k = B_k^{-\mu_k} = \text{const}; \quad (6)$$

$$\mu_0 = m_0^{-1}, \quad \mu_k = m_k^{-1}; \quad 1 \leq k \leq N;$$

B_0, m_0, B_k, m_k — известные характеристики (константы) материалов связующего и арматуры k -того семейства, определяющие степенной закон установившейся ползучести $\xi_k = B_k \sigma^{m_k}$ ($0 \leq k \leq N$) материалов компонент композиции; ω_k, ψ_k — плотность и угол (отсчитываемый от полярного радиуса r) армирования проволокой k -того семейства; суммирование производится по указанному индексу от 1 до N .

На верхней ($z = h$) лицевой поверхности пластины выполняется условие РА для всех семейств волокон (проволок):

$$\sigma_k(r, z) = \sigma_k^0 = \text{const} \neq 0, \quad z = h, \quad r_0 \leq r \leq r_1, \quad 1 \leq k \leq N, \quad (7)$$

где σ_k — напряжение в арматуре k -того семейства; σ_k^0 — заданное значение. (В силу реализации условий поперечного изгиба пластины на нижней лицевой поверхности ($z = -h$) также будут выполняться условия РА, но только $\sigma_k(r, -h) = -\sigma_k^0 = \text{const}$.)

Так как непрерывные волокна имеют постоянные площади поперечных сечений, то в осесимметричном случае параметры армирования ω_k, ψ_k связаны соотношением [6]

$$\omega_k(r) = \Omega_k / (r \cos \psi_k(r)), \quad \Omega_k = r_i \omega_{0k} \cos \psi_k(r_i) = \text{const}, \quad (8)$$

$$\omega_{0k} \equiv \omega_k(r_i) \quad (i = 0 \text{ или } i = 1, 1 \leq k \leq N),$$

где Ω_k — постоянные, пропорциональные количеству арматуры k -того семейства, пересекающей кромку пластины (например, радиуса $r = r_0$). Величины Ω_k (или ω_{0k}) являются входными параметрами задачи РА.

На кромках пластины r_0, r_1 должны быть заданы статические граничные условия по изгибающему моменту $M_n^{(i)}$ и поперечной силе $F_{zn}^{(i)}$:

$$M_r(r_i) = M_n^{(i)}, \quad F_r(r_i) = F_{zn}^{(i)} \quad (i = 0 \text{ и/или } i = 1), \quad (9)$$

а также кинематические условия по скорости прогиба v_i и скорости угла поворота θ_i :

$$v(r_i) = v_i, \quad v'(r_i) = -r_i \kappa_\varphi(r_i) = \theta_i \quad (i = 0 \text{ и/или } i = 1). \quad (10)$$

(Возможно задание смешанных из (9), (10) граничных условий.)

Разыскиваемая РА-структура должна удовлетворять физическим ограничениям

$$\omega_k \geq 0, \quad \sum_k \omega_k \leq \omega_* \leq 1, \quad (11)$$

где $\omega_* = \text{const}$ — предельно допустимая суммарная плотность армирования (на практике $\omega_* \approx 0,7$).

2. Система разрешающих уравнений и ее свойства. Проинтегрируем первое равенство (1), тогда вместо системы (1) получим одно уравнение

$$(rM_r)' - M_\varphi = P(r), \quad P(r) \equiv rF_r(r) = r_0F_r^0 - \int_{r_0}^r sp(s)ds, \quad (12)$$

где F_r^0 — постоянная интегрирования, определяемая либо из второго граничного условия (9), либо в процессе решения задачи РА (если второе условие (9) не задано ни на одной из кромок).

Из условия РА (7) и степенного закона установившейся ползучести $\xi_k = B_k\sigma_k^{m_k}$ на верхней лицевой поверхности ($z = h$) получаем постоянство скорости деформаций ползучести в арматуре k -того семейства ($\xi_k(r, h) = \xi_k^0 = \text{const}$), поэтому с учётом (2) и второго соотношения (5) имеем

$$\xi_k(r, h) = h\kappa_k(r) = \xi_k^0 = B_k(\sigma_k^0)^{m_k} = \text{const} \neq 0,$$

отсюда

$$\kappa_k(r) = \kappa_k^0 = \xi_k^0/h = h^{-1}B_k(\sigma_k^0)^{m_k} = \text{const} \neq 0 \quad (h = \text{const}, 1 \leq k \leq N), \quad (13)$$

т. е. скорость параметра искривления пластины κ_k в направлении армирования проволокой k -того семейства в задаче РА постоянна.

Выражения для моментов (3) с учётом (8), (13) и второго равенства (5) примут вид

$$\begin{aligned} M_r(r) &= D_0 \left(1 - \sum_k \frac{\Omega_k}{r \cos \psi_k} \right) \kappa^{\mu_0-1} (2\kappa_r + \kappa_\varphi) + \sum_k S_k \Omega_k \frac{\cos \psi_k}{r}, \\ M_\varphi(r) &= D_0 \left(1 - \sum_k \frac{\Omega_k}{r \cos \psi_k} \right) \kappa^{\mu_0-1} (\kappa_r + 2\kappa_\varphi) + \\ &\quad + \sum_k S_k \frac{\Omega_k}{r} (\cos^{-1} \psi_k - \cos \psi_k), \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$S_k = D_k(\kappa_k^0)^{\mu_k} = \text{const} \neq 0, \quad 1 \leq k \leq N; \quad (15)$$

$$\kappa_r = -v'', \quad \kappa_\varphi = -v'/r. \quad (16)$$

Из равенств (16) вытекает условие совместности

$$\kappa'_\varphi = (\kappa_r - \kappa_\varphi)/r, \quad (17)$$

а из второго соотношения (5) с учётом (13) получаем условие РА

$$\kappa_r \cos^2 \psi_k + \kappa_\varphi \sin^2 \psi_k = \kappa_k^0 = \text{const} \neq 0, \quad (18)$$

которое можно переписать так:

$$(\kappa_r - \kappa_\varphi) \cos^2 \psi_k + \kappa_\varphi = \kappa_k^0 = \text{const} \neq 0, \quad 1 \leq k \leq N. \quad (19)$$

Система уравнений (12), (14), (17), (19) замкнута, так как состоит из $N + 4$ уравнений и содержит $N + 4$ неизвестных функций $M_r, M_\varphi, \kappa_r, \kappa_\varphi, \psi_k, 1 \leq k \leq N$. Прежде чем преобразовывать эту систему к окончательному разрешающему виду, обратим внимание на то, что во всех указанных соотношениях и в первом граничном условии (9) функции ψ_k выступают как аргументы косинуса ($\cos \psi_k$). Это означает, что если некоторый набор функций ψ_k удовлетворяет уравнениям рассматриваемой задачи РА, то этой же задаче будет удовлетворять и набор углов армирования $\bar{\psi}_k = -\psi_k, 1 \leq k \leq N$. Следовательно, при осесимметричном поперечном изгибе целесообразно в пластину внедрять чётное число семейств проволок, причём это множество семейств должно состоять из пар, изготовленных из одного и того же материала и уложенных по радиально-симметричным траекториям армирования, поэтому далее будем считать

$$N = 2K, \quad \sigma_k^0 = \sigma_{K+k}^0, \quad B_k = B_{K+k}, \quad m_k = m_{K+k}, \\ \psi_k = -\psi_{K+k}, \quad 1 \leq k \leq K. \quad (20)$$

Случаи $K = 1$ и $K \geq 2$ следует рассматривать по отдельности.

Пусть $K \geq 2$, тогда из системы (12), (14), (17), (18) и граничных условий (9) можно исключить функции $M_r, M_\varphi, \kappa_r, \kappa_\varphi$. В результате получим систему разрешающих уравнений и статических граничных условий, содержащих в качестве неизвестных функций только углы армирования $\psi_k, 1 \leq k \leq K$. Действительно, рассмотрим два первых условия РА (18) при $k = 1$ и $k = 2$. Из этих двух уравнений, как из СЛАУ, по правилу Крамера можно определить

$$\kappa_r = \frac{\kappa_1^0 \sin^2 \psi_2 - \kappa_2^0 \sin^2 \psi_1}{\cos^2 \psi_1 \sin^2 \psi_2 - \cos^2 \psi_2 \sin^2 \psi_1}, \\ \kappa_\varphi = \frac{\kappa_2^0 \cos^2 \psi_1 - \kappa_1^0 \cos^2 \psi_2}{\cos^2 \psi_1 \sin^2 \psi_2 - \cos^2 \psi_2 \sin^2 \psi_1}, \\ \kappa_1^0 \neq \kappa_2^0. \quad (21)$$

Подставим (21) в оставшиеся равенства (18) (при $k \geq 3$), тогда

$$\frac{\kappa_1^0 \sin^2 \psi_2 - \kappa_2^0 \sin^2 \psi_1}{\cos^2 \psi_1 \sin^2 \psi_2 - \cos^2 \psi_2 \sin^2 \psi_1} \cos^2 \psi_k + \\ + \frac{\kappa_2^0 \cos^2 \psi_1 - \kappa_1^0 \cos^2 \psi_2}{\cos^2 \psi_1 \sin^2 \psi_2 - \cos^2 \psi_2 \sin^2 \psi_1} \times \\ \times \sin^2 \psi_k = \kappa_k^0 = \text{const} \neq 0, \quad 3 \leq k \leq K. \quad (22)$$

Исключим из (14), (17) за счёт (21) функции κ_r, κ_φ (при этом учтём первое равенство (5)), а затем преобразованные соотношения (14) подставим в (12), (9), после чего получим замкнутую систему K разрешающих уравнений (12), (17), (22), содержащую K неизвестных функций $\psi_k, 1 \leq k \leq K$. При таком преобразовании статические граничные условия (9) также будут содержать в качестве неизвестных только функции ψ_k , а после подстановки κ_φ (см. (21)) во второе равенство (10) через углы армирования выразим и второе кинематическое граничное условие. Не будем выписывать эту систему и соответствующие ей граничные условия в развернутом виде в силу громоздкости получающихся уравнений и соотношений. Отметим лишь следующее: в силу того,

что уравнения (22), статические граничные условия (9) и второе условие (10) в этом случае являются трансцендентными уравнениями относительно неизвестных ψ_k , то решение задачи РА при $K \geq 2$ может быть не единственным, что характерно для обратных задач механики композиционных материалов.

В случае же $K = 1$ (см. (20)) имеем лишь одно равенство (19), эквивалентное (18), а значит, равенства (21), (22) не выполняются. Из соотношения (19) при $K = 1$ следует

$$\kappa_r - \kappa_\varphi \equiv R(\kappa_\varphi, f) = (\kappa_k^0 - \kappa_\varphi)/f^2, \quad (23)$$

где

$$f(r) \equiv \cos \psi_1(r). \quad (24)$$

Подставим (23) в равенства (17), (14), тогда после элементарных преобразований с учётом первого соотношения (5) получим

$$\kappa'_\varphi = R(\kappa_\varphi, f)/r = (\kappa_k^0 - \kappa_\varphi)/(rf^2); \quad (25)$$

$$\begin{aligned} M_r(r) &= D_0(1 - \bar{\Omega}_1/(rf))\bar{\kappa}^{\mu_0-1}(3\kappa_\varphi + 2R(\kappa_\varphi, f)) + S_1\bar{\Omega}_1 f/r, \\ M_\varphi(r) &= D_0(1 - \bar{\Omega}_1/(rf))\bar{\kappa}^{\mu_0-1}(3\kappa_\varphi + R(\kappa_\varphi, f)) - S_1\bar{\Omega}_1(f - 1/f)/r, \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$\bar{\kappa} \equiv 2\sqrt{R^2(\kappa_\varphi, f) + 3\kappa_\varphi R(\kappa_\varphi, f) + 3\kappa_\varphi^2}; \quad (27)$$

$$\bar{\Omega}_1 \equiv \Omega_1 + \Omega_2. \quad (28)$$

(Равенство (28) получено в силу последнего соотношения (20) при $K = 1$.)

После подстановки (26) в уравнение равновесия (12) и первое статическое граничное условие (9) окончательно будем иметь

$$A(r, \kappa_\varphi, f)f' = B(r, \kappa_\varphi, f), \quad r_0 \leq r \leq r_1; \quad (29)$$

$$\begin{aligned} D_0(1 - \bar{\Omega}_1/(rf))\bar{\kappa}^{\mu_0-1}(3\kappa_\varphi + 2R(\kappa_\varphi, f)) + S_1\bar{\Omega}_1 f/r &= M_n^{(i)}, \\ r = r_i, \quad i = 0 \text{ и/или } i = 1, \end{aligned} \quad (30)$$

где

$$\begin{aligned} A(r, \kappa_\varphi, f) &\equiv S_1\bar{\Omega}_1 + D_0\bar{\kappa}^{\mu_0-1}[(3\kappa_\varphi + 2R)\bar{\Omega}_1/f^2 - 4R(r - \bar{\Omega}_1/f)/f - \\ &\quad - 4(\mu_0 - 1)\bar{\kappa}^{-2}(r - \bar{\Omega}_1/f)(3\kappa_\varphi + 2R)^2 R/f], \\ B(r, \kappa_\varphi, f) &\equiv P(r) - S_1\bar{\Omega}_1(f - 1/f)/r - \\ &\quad - D_0\bar{\kappa}^{\mu_0-1}[3\kappa_\varphi + 2R + (r - \bar{\Omega}_1/f)(3 - 2/f^2)R/r + \\ &\quad + 2(\mu_0 - 1)\bar{\kappa}^{-2}(r - \bar{\Omega}_1/f)(3\kappa_\varphi + 2R)(3R - 2R^2 + \\ &\quad + 3(2 - 1/f^2)\kappa_\varphi)R/r - (1 - \bar{\Omega}_1/(rf))(3\kappa_\varphi + R)]. \end{aligned} \quad (31)$$

В соотношениях (30), (31) нужно учесть выражения для функций $P(r)$, $\bar{\kappa}$, $R(\kappa_\varphi, f)$ (см. (12), (23), (27)).

Система трёх обыкновенных квазилинейных дифференциальных уравнений (25), (29) и (см. (16))

$$v'(r) = -r\kappa_\varphi(r), \quad r_0 \leq r \leq r_1 \quad (32)$$

замкнута относительно трёх неизвестных функций κ_φ , f , v и разрешена относительно производных от этих функций. Для однозначного интегрирования этой системы нужно использовать граничные условия (10) и (30). Второе граничное условие (9), как уже отмечалось, определяет постоянную F_r^0 , см. (12).

Поставленная таким образом при $K = 1$ (см. (20)) двухточечная граничная задача может быть численно проинтегрирована, например, методом пристрелки [7]. Этим методом удалось проинтегрировать граничные задачи РА для системы (25), (29), (32) при следующих типах закрепления кольцевых пластин:

- 1) опора с изгибающим моментом на одной кромке, изгибающий момент и поперечная сила — на другой;
- 2) опора с изгибающим моментом на одной кромке, податливая опора с защемлением — на другой;
- 3) жёсткая заделка на одной кромке, изгибающий момент и поперечная сила — на другой;
- 4) опоры с изгибающими моментами на обеих кромках.

Для круглых (некольцевых) пластин осесимметричную задачу РА в классе гладких функций решить нельзя в силу нарушения последнего физического ограничения (11) при $r \rightarrow 0$, так как в силу ограниченности косинуса из (8) при $\Omega_k \neq 0$ следует $\omega_k(r) \rightarrow \infty$, если $r \rightarrow 0$. (Исключение составляет лишь частный случай укладки арматуры в окружном направлении $\psi_k \equiv \pi/2$, который здесь не рассматривается.)

Согласно (23), (27) граничное условие (30) является существенно нелинейным, поэтому возможно существование неединственного решения поставленной задачи РА при одних и тех же входных данных. Эти решения должны удовлетворять не только неравенствам (11), но и ограничениям

$$0 < f \leq 1, \quad r_0 \leq r \leq r_1, \quad (33)$$

вытекающим из определения функции $f(r)$ (см. (24)) и первых неравенств (11).

Кроме того, если для некоторого значения $\bar{\Omega}_1$ (см. (28)) граничная задача РА решена, то, варьируя величины Ω_1 , Ω_2 , подчиняющиеся лишь ограничениям $\Omega_1 > 0$, $\Omega_2 > 0$, $\bar{\Omega}_1 = \Omega_1 + \Omega_2$ ($\bar{\Omega}_1 > 0$ — фиксированное значение), можно изменять в определенной степени некоторые свойства решения задачи РА (причём во всех получающихся при этом проектах траектории РА общий расход материалов компонент композиции и напряжённое состояние в них не изменяются). Действительно, разные пропорции Ω_1/Ω_2 при фиксированном суммарном значении $\bar{\Omega}_1$ позволяют задавать разные распределения крутящего момента $M_{r\varphi}(r)$ в пластине, который в осесимметричном случае с учётом (8), (20) при $K = 1$ имеет вид

$$M_{r\varphi}(r) = \sum_k S_k \omega_k \cos \psi_k \sin \psi_k = S_1(\Omega_1 - \Omega_2) \sin(\psi_k)/r.$$

В частности, за счёт соответствующего выбора величин Ω_1 , Ω_2 можно удовлетворить и статическому граничному условию по крутящему моменту, если он задан на одной из кромок пластины. Так, при задании $\Omega_1 = \Omega_2 = \bar{\Omega}_1/2$ получим, что во всей конструкции $M_{r\varphi} = 0$.

Следует подчеркнуть, что изотропные кирхгофовские кольцевые пластины при осесимметричном изгибе остаются как бы нечувствительными к наличию или отсутствию на их кромке крутящего момента [1], т. е. $M_{r\varphi}$ как бы вообще не влияет на состояние таких пластин, что с точки зрения реального поведения конструкции, конечно же, не верно.

Отметим еще одну особенность, присущую рассматриваемым задачам РА. Постоянные Ω_k (или ω_{0k} , или $\bar{\Omega}_1$, см. (8), (28)) определяют количество арматуры k -того семейства, внедряемой в пластину [6], и задаются проектировщиком. Выбор количества используемой арматуры является в определенной степени произвольным, удовлетворяющим лишь условиям существования решения задачи РА. Следовательно, задачи РА в осесимметричном случае обладают константными произволами, связанными с выбором величин Ω_k или ω_{0k} . При $K = 1$ и выполнении ограничений (20) эти произволы определяются величиной $\bar{\Omega}_1$ и отношением Ω_1/Ω_2 (см. (28)). Влияние отношения Ω_1/Ω_2 при фиксированном $\bar{\Omega}_1$ на структуру РА и состояние пластины обсуждалось выше. Варьирование же величины Ω_1 позволяет получить «пучки» решений задачи. Таких пучков может быть несколько в силу возможности существования нескольких альтернативных решений при одном и том же значении $\bar{\Omega}_1$.

На практике возможность такого управления решениями задачи РА позволяет выбрать из пучка решений проекты с определенными свойствами: с наименьшим расходом арматуры или связующего; с наименьшей податливостью в условиях установившейся ползучести; наиболее удобные с точки зрения практической реализации и др.

Покажем, что для некоторых типов закрепления кольцевых пластин гладкие решения задачи РА вообще не существуют. Для этого рассмотрим условие РА (18), переписанное с учётом (16):

$$v'' \cos^2(\psi_k) + v' \sin^2(\psi_k)/r = -\kappa_k^0 = \text{const} \neq 0, \quad r_0 \leq r \leq r_1, \quad (34)$$

предполагая, что все функции имеют требуемую в процессе рассуждений гладкость.

При таких условиях функция v не может иметь одновременно точки локального минимума и локального максимума. Действительно, пусть в некоторой точке реализуется условие локального минимума ($v' = 0$, $v'' > 0$), а в другой точке — условия локального максимума ($v' = 0$, $v'' < 0$), но тогда в одной из этих точек невозможно выполнение равенства (34), так как $\cos^2 \psi_k > 0$ и $\kappa_k^0 \neq 0$ имеет фиксированное значение во всей пластине.

Таким образом, в случае гладких решений задачи РА функция v не может иметь одновременно точку локального максимума и точку локального минимума. Следовательно, как легко видеть, гладкие решения осесимметричной задачи РА не могут существовать при следующих типах закрепления кольцевых пластин:

- 1) жёсткая заделка пластины на обеих кромках;
- 2) жёсткая заделка на одной кромке и опора — на другой;
- 3) жёсткая заделка на одной кромке и податливая опора с защемлением — на другой.

Очевидно, что при указанных типах закрепления в окрестностях точек локальных минимумов необходимо выполнение неравенства $\kappa_k^0 < 0$ (или, что то же самое, $\sigma_k^0 < 0$), а в окрестности точек локальных максимумов $\kappa_k^0 > 0$

(или $\sigma_k^0 > 0$), что следует из (13), (34). Поэтому в таких случаях обязательно нужно использовать разрывные решения задачи РА. При этом найдутся такие линии контакта двух подобластей непрерывности решения, по разные стороны от которых напряжения в равнонапряжённых волокнах будут иметь разные знаки. (Изучение сопряжённых решений задачи РА выходит за рамки настоящего исследования, поэтому не будем более подробно останавливаться на обсуждении этого вопроса.)

3. Обсуждение результатов расчётов. В качестве первого примера рассмотрим задачу проектирования кольцевой пластины, армированной двумя семействами равнонапряжённых волокон постоянного поперечного сечения, подчиняющимися условиям (20) при $K = 1$. Пластина постоянной толщины $2h = 2$ см ограничена кромками радиусов $r_0 = 0,4$ м и $r_1 = 1$ м. Внешняя кромка жёстко закреплена ($v_1 = 0, \theta_1 = 0$, см. (10)), а на внутренней кромке заданы изгибающий момент $M_n^{(0)} = 13,33$ кН и поперечная сила $F_{zn}^{(0)} = -8$ кН/м (см. (9)). Распределённая поперечная нагрузка отсутствует ($p(r) \equiv 0$, см. (1), (12)). Конструкция изготовлена из меди, армирована стальной проволокой У8А и равномерно нагрета на 200°C . При этом характеристики установившейся ползучести материалов компонент композиции (см. (6)) имеют следующие значения [8, 9]:

$$\begin{aligned} \text{Cu} : m_0 &= 2,16, & B_0 &= 5,63 \cdot 10^{-9} (\text{МПа})^{-m_0} \cdot \text{ч}^{-1}, \\ \text{У8А} : m_1 &= 24,98, & B_1 &= 1,054 \cdot 10^{-84} (\text{МПа})^{-m_1} \cdot \text{ч}^{-1}. \end{aligned} \quad (35)$$

(Кривые установившейся ползучести, соответствующие параметрам (35), изображены на рис. 1 в [3].)

Потребуем, чтобы напряжение в армирующих волокнах на верхней лицевой поверхности было $\sigma_k^0 = 1$ ГПа ($k = 1$ и $k = 2$), а плотности армирования на внутренней кромке зададим следующими равенствами (см. (8)):

$$\omega_1(r_0) = \omega_{01}, \quad \omega_2(r_0) = \omega_{02}; \quad \omega_{01} = \omega_{02}; \quad \omega_0 = \omega_{01} + \omega_{02} = 0,2. \quad (36)$$

В процессе решения сформулированной задачи РА выяснилось, что она имеет по меньшей мере два альтернативных решения. На рис. 1 приведены структуры армирования, соответствующие этим двум решениям. Решение, соответствующее РА-структуре, изображенной на рис. 1, а, далее будем называть первым решением, а на рис. 1, б — вторым. На рис. 2 приведены зависимости интенсивности напряжений σ_i в связующем на лицевых поверхностях пластины (рис. 2, а) и безразмерной скорости прогиба $\bar{v} = hv/(r_1^2 \bar{\xi}_1^{(1)})$ (рис. 2, б) от полярного радиуса r . (Здесь $\bar{\xi}_1^{(1)} = 9,097 \cdot 10^{-7} \text{ ч}^{-1}$ — характерное значение скорости деформаций установившейся ползучести проволоки У8А, см. (16) в [3].) Номера кривых на этом рисунке соответствуют номерам решений рассматриваемой задачи РА. Сопоставление кривых на рис. 2 показывает, что напряжённое состояние в связующем и скорость прогиба ползучести в первом решении задачи (см. структуру на рис. 1, а) почти на порядок меньше, чем во втором решении (см. структуру на рис. 1, б), хотя общий расход материала волокон, определяемый по формуле

$$V_f = 4\pi h \sum_k \int_{r_0}^{r_1} \omega_k(r) r dr, \quad (37)$$

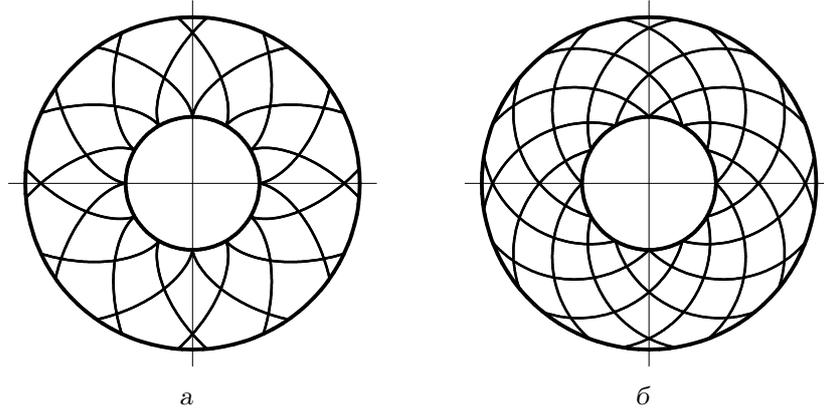


Рис. 1. Структуры армирования, соответствующие двум альтернативным решениям задачи РА: а) структура, принадлежащая первому пучку решений; б) структура, принадлежащая второму пучку решений

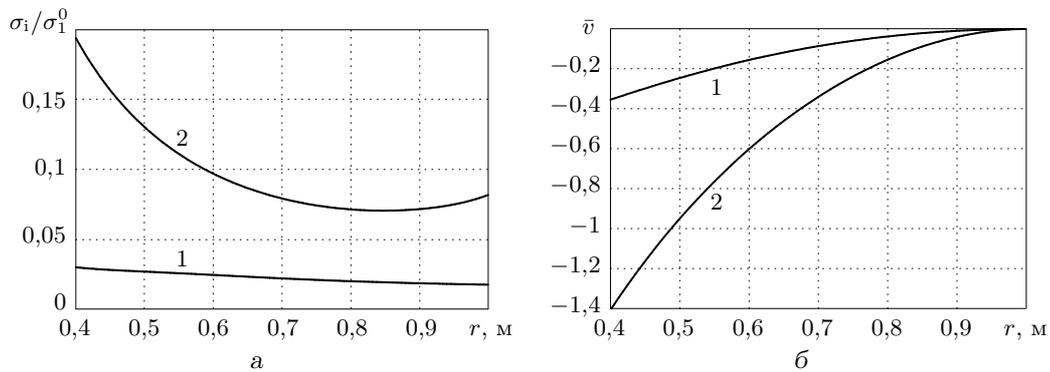


Рис. 2. Интенсивность напряжений в связующем на лицевых поверхностях (а) и скорость прогиба установившейся ползучести (б) в пластинах, соответствующих двум альтернативным решениям задачи РА

в обоих проектах почти одинаков (различие составляет всего 0,63%). Очевидно, что с точки зрения уменьшения податливости конструкции в условиях установившейся ползучести первое решение задачи РА предпочтительнее второго.

Варьируя значение ω_0 в (36), можно получить два пучка решений рассматриваемой задачи РА. Расчёты показали, что первый пучок решений существует лишь при $0,1977 \leq \omega_0 \leq 0,99$, а второй пучок — при $0 < \omega_0 \leq 0,258$. В обоих пучках решений увеличение ω_0 сопровождается увеличением общего расхода материала арматуры (37), но величины $\bar{\sigma}_* = \max_r(\sigma_i(r)/\sigma_1^0)$ и $\bar{v}_* = \max_r |\bar{v}(r)|$ в зависимости от ω_0 ведут себя по-разному. Так, на рис. 3 изображены зависимости $\bar{\sigma}_*$ (рис. 3, а) и \bar{v}_* (рис. 3, б) от относительного объёмного содержания арматуры в конструкции $\bar{V}_f = V_f/V$, где $V = 2\pi h(r_1^2 - r_0^2)$ — объём пластины. Номера кривых на этом рисунке соответствуют номерам пучков решений. Обе кривые на рис. 3, а ведут себя монотонно (хотя функция, описываемая линией 1, возрастает, а функция 2 — убывает), а на рис. 3, б — немонотонно. Согласно рис. 3, б, все проекты РА, принадлежащие первому

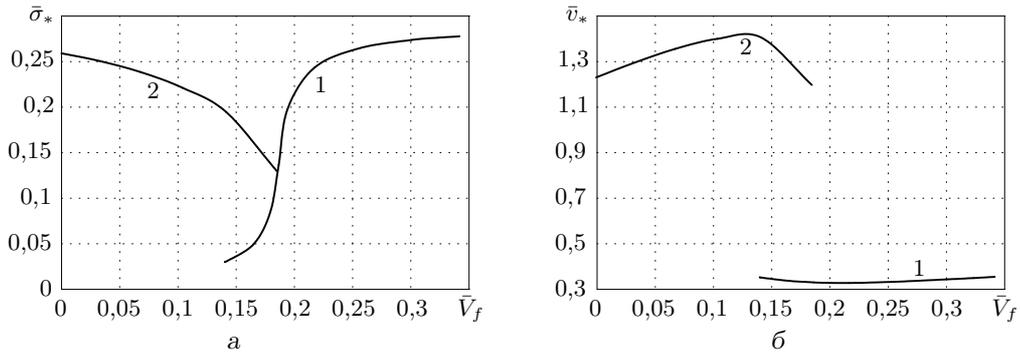


Рис. 3. Зависимости максимальных безразмерных значений интенсивности напряжений в связующем (а) и скорости прогиба установившейся ползучести (б) от относительного объёмного содержания арматуры в проектах двух пучков решений задачи РА

пучку решений, обладают существенно меньшей податливостью в условиях ползучести, чем проекты, принадлежащие второму пучку. Точка локального минимума на кривой 1 рис. 3, б позволяет выбрать РА-проект, обеспечивающий наименьшую (на множестве рассматриваемых структур армирования) податливость конструкции в условиях установившейся ползучести. (Этому проекту соответствует значение $\omega_0 \approx 0,7$, см. (36).)

Систему разрешающих уравнений (25), (29), (32) и соответствующие ей граничные условия (10), (30) можно обезразмерить подобно тому, как это было сделано в [3] в случае нагружения пластин в своей плоскости. При этом в соотношениях (30), (31) удаётся выделить малый параметр при постоянной D_0 (см. (12) в [3]). Следовательно, система разрешающих уравнений рассматриваемой задачи РА, как и в [3], является системой жёстких дифференциальных уравнений с сингулярным возмущением, а значит, решение соответствующей двухточечной граничной задачи может обладать ярко выраженными краевыми эффектами, причём краевые эффекты могут возникнуть только в связующем, так как арматура во всей пластине равнонапряжена (см. (7)). Приведём пример, демонстрирующий возможность появления краевого эффекта в задаче РА. (Отметим, что краевой эффект в изотропных однородных пластинах при поперечном изгибе в условиях установившейся ползучести не возникает [1].)

Рассмотрим пластину прежней толщины, изготовленную из тех же материалов и работающую при прежней температуре. Конструкция ограничена кромками радиусов $r_0 = 0,5$ м и $r_1 = 1$ м. На внутренней кромке пластина свободно оперта ($v_0 = 0$, $M_n^{(0)} = 0$), а на внешней кромке задан изгибающий момент $M_n^{(1)} = 5,333$ кН ($F_{zn}^{(1)} = 0$). Распределённая поперечная нагрузка отсутствует ($p(r) \equiv 0$). Плотность армирования на внешней кромке (см. (8)) зададим так:

$$\omega_1(r_1) = \omega_{01} = 0,05, \quad \omega_2(r_1) = \omega_{02} = 0,05.$$

Напряжение в арматуре на верхней лицевой поверхности σ_k^0 имеет прежнее значение.

На рис. 4 изображено решение сформулированной задачи РА. Из рис. 4, а видно, что траектории армирования в этом случае почти во всей пластине прямолинейны и искривление их наблюдается лишь в малой окрестности

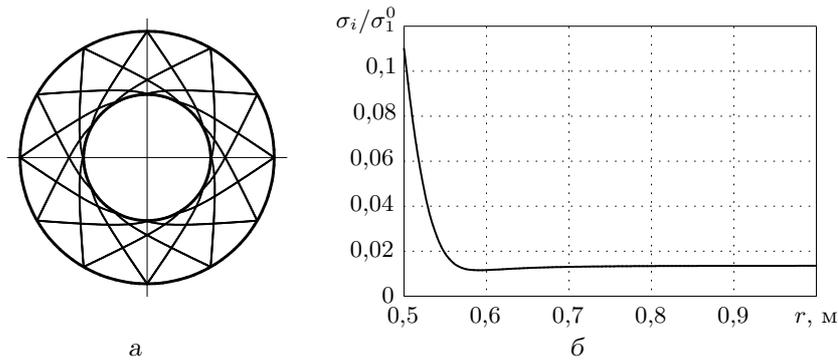


Рис. 4. Решение задачи РА с краевым эффектом в связующем: а) структура армирования; б) интенсивность напряжений в связующем на лицевых поверхностях

внутреннего контура. Рисунок же 4, б демонстрирует ярко выраженный краевой эффект, возникающий в связующем в окрестности внутренней кромки (в остальной части пластины в связующем реализуется напряжённое состояние, близкое к равнонапряжённому, см. горизонтальный участок кривой на рис. 4, б).

Возможность возникновения краевых эффектов в задачах РА изгибаемых пластин и возможность существования нескольких решений одной и той же задачи накладывают повышенные требования к разработке методов решения соответствующих граничных задач. В частности, эти методы должны надёжно выделять альтернативные решения и обеспечивать высокую точность решения в зонах краевых или локальных эффектов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 08-01-00046-а).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Качанов Л. М. Теория ползучести. — М.: Физматгиз, 1960. — 456 с.
2. Немировский Ю. В., Янковский А. П. Равнонапряжённое армирование металлокомпозитных пластин волокнами постоянного поперечного сечения в условиях установившейся ползучести // *Механика композитных материалов*, 2008. — Т. 44, № 1. — С. 11–34.
3. Янковский А. П. Применение методов теории возмущений в плоской задаче равнонапряжённого армирования металлокомпозитных пластин при установившейся ползучести // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2009. — № 2(19). — С. 53–71.
4. Доннелл Л. Г. Балки, пластины и оболочки. — М.: Наука, 1982. — 567 с.
5. Немировский Ю. В., Янковский А. П. Установившаяся ползучесть слоисто-волоконистых изгибаемых металлокомпозитных пластин // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2008. — № 2(17). — С. 66–76.
6. Немировский Ю. В., Янковский А. П. О некоторых особенностях уравнений оболочек, армированных волокнами постоянного поперечного сечения // *Механика композиционных материалов и конструкций*, 1997. — Т. 3, № 2. — С. 20–40.
7. Холл Дж., Уатт Дж. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1979. — 312 с.
8. Писаренко Г. С., Мозсаровский Н. С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести: Справочное пособие. — Киев: Наукова думка, 1981. — 496 с.
9. Композиционные материалы: Справочник / ред. Д. М. Карпинос. — Киев: Наукова думка, 1985. — 592 с.

Поступила в редакцию 31/VIII/2010;
в окончательном варианте — 10/X/2010.

MSC: 74K20, 74R20

**EQUAL-STRESS REINFORCEMENT THE RING BENDING
METAL-COMPOSITES PLATES WORKING IN CONDITIONS OF
STEADY CREEP**

A. P. Yankovskii

Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics,
Siberian Branch of the Russian Academy of Science,
4/1, Institutskaya str., Novosibirsk, 630090.

E-mail: nemirov@itam.nsc.ru

The problem equal-stress reinforcements (ESR) is transverse the bending ring plates working in conditions of steady creeping of materials of all a component of a composition is formulated. The system of the resolving equations is analysed and boundary conditions at which smooth solutions of ESR-problem do not exist are certain. The opportunity of existence of several alternative solutions of ESR-problem is shown at the same input information and an opportunity of management by the gained ESR-projects. On a concrete instance the opportunity of origination of a border effect in bonding agent a bent ESR-plate is shown.

Key words: metal-composites, equal-stress reinforcement, bending plates, steady creep, nonuniqueness of the solution.

Original article submitted 31/VIII/2010;
revision submitted 10/X/2010.

Andrey P. Yankovskii (Dr. Sci. (Phys. & Math.)), Leading Research Scientist, Lab. of Fast Processes Physic.